ELECTRE

امین رضائی کلات

پیدایش

مبدأ ELECTRE به سال ۱۹۶۵ و کمپانی اروپایی SEMA که تا کنون نیز فعال است، بر می گردد. این کمپانی در آن زمان در رابطه با تصمیم گیری با معیارهای چندگانه بین گزینه های مختلف در دنیای واقعی فعالیت می کرد و برای این منظور از روشی به نام MARSAN استفاده می کرد. ولی به دلیل نواقصی که این روش داشت و مشکلاتی که ایجاد کرده بود، یک تیم تحقیقاتی را مأمور کرد تا روش بهتر و کاراتری ابداع کنند. تلاش های این تیم منجر به ایجاد روش ELECTRE شد. این روش بعدها با نام ELECTRE I شناخته شد. در سال ۱۹۶۶ نتایج حاصله طی یک مقاله تحقیقاتی به چاپ رسید و در سال

۱۹۶۸ به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفت. بعد ها برای بهبود این روش و قابل استفاده تر کردن آن برای موارد خاص تحقیقات بیشتری توسط افراد مختلف انجام گرفت که منجر به ایجاد انواع دیگری از آن شد.

این روش بر اساس روابط غیر رتبه ای می باشد، یعنی لزوماً به رتبه بندی گزینه ها منتهی نشده و ممکن است بعضی از آنها حذف شوند ، در ضمن برای موارد جبرانی به کار می رود ولی گاهی با برخی تغییرات به عنوان زیر مجموعه ای از روش های غیر جبرانی نیز کاربرد دارد. فرضیات این روش عبارتند از:

۱- معیارها کمی یا قابل کمی شدن باشند.

۲- معیارها کاملاً ناهمگن باشند.

در ادامه انواع مختلف **ELECTRE** را مورد بررسی قرار می دهیم.

ELECTRE I -۱

مراحل این روش به صورت زیر می باشد:

۱-بی مقیاس سازی با استفاده از نرم :

$$N = [n_{ij}] \quad , \quad n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

۲-محاسبه ماتریس بی مقیاس شده موزون:

$$V = N \times W_{n\times n}$$

V= عبارت است از ماتریس بی‌مقیاس شده موزون

$W_{n\times n}$ = عبارت است از ماتریس قطری وزن‌های به‌دست آمده برای شاخص‌ها

۳- تشکیل مجموعه های هماهنگ و ناهماهنگ از طریق مقایسه تمام گزینه ها با تمام شاخص ها. در مجموعه هماهنگ بیشتر بودن مطلوبیت یک گزینه نسبت به سایر گزینه ها مد نظر است و در مجموعه ناهماهنگ کمتر بودن مطلوبیت آن.

مجموعه هماهنگ:

- اگر شاخص مورد نظر، دارای جنبه‌ی مثبت باشد، داریم :

$$A_{k,l} = \{j | v_{kj} \geq v_{lj}\} \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

- اگر شاخص، دارای جنبه‌ی منفی باشد، داریم :

$$A_{k,l} = \{j | v_{kj} \leq v_{lj}\} \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

مجموعه ناهماهنگ:

ـ اگر شاخص مورد نظر، دارای جنبه‌ی مثبت باشد، داریم :

$$D_{k,l} = \{j | v_{kj} < v_{lj}\} \quad , \quad j = 1,\dots,m$$

ـ اگر شاخص، دارای جنبه‌ی منفی باشد، داریم :

$$D_{k,l} = \{j | v_{kj} > v_{lj}\} \quad , \quad j = 1,\dots,m$$

۴- تشکیل ماتریس های هماهنگ و ناهماهنگ:

ماتریس هماهنگ: این ماتریس m×m بوده و قطر اصلی آنها فاقد عنصر است. سایر عناصر آن نیز از مجموع اوزان شاخص های متعلق به مجموعه هماهنگ به دست می آید. با فرض ۱ بودن مجموع اوزان شاخص ها:

$$I_{kl} = \sum w_j \quad , \quad j \in A_{k,l}$$

ماتریس ناهماهنگ: این ماتریس m×m بوده و قطر اصلی آنها فاقد عنصر است. سایر عناصر به وسیله فرمول زیر با توجه به مجموعه ناهماهنگ و از روی ماتریس بی مقیاس شده موزون به دست می آید:

$$NI_{kl} = \frac{Max\left|v_{kj} - v_{lj}\right| \quad , \quad j \in D_{k,l}}{Max\left|v_{kj} - v_{lj}\right| \quad , \quad j \in \text{همه شاخص ها}}$$

این معیار نشان دهنده نسبت عدم مطلوبیت مجموعه ناهماهنگ kوl به کل ناهماهنگی در شاخص ها می باشد.

۵- تشکیل ماتریس هماهنگ موثر:

ابتدا حد آستانه را تعیین می کنیم:

$$\bar{I} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} I_{kl} / m(m-1)$$

حال داریم:

$$H_{kl} = ۱ \quad \text{اگر} \quad \rightarrow I_{kl} \geq \bar{I}$$

$$H_{kl} = ۰ \quad \text{اگر} \quad \rightarrow I_{kl} < \bar{I}$$

این ماتریس نشان دهنده ارجحیت یک گزینه به گزینه دیگر است.

۶- تشکیل ماتریس ناهماهنگ موثر:

ابتدا حد آستانه را تعیین می کنیم:

$$\overline{NI} = \sum_{l=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{m} NI_{kl} / m(m-۱)$$

حال داریم:

$$G_{kl} = ۰ \quad \text{اگر} \quad \rightarrow NI_{kl} \geq \overline{NI}$$

$$G_{kl} = ۱ \quad \text{اگر} \quad \rightarrow NI_{kl} < \overline{NI}$$

۷- تشکیل ماتریس کلی موثر :

$$F_{kl} = H_{kl} \times G_{kl}$$

شرط این که یک گزینه ارجح باشد این است که:

برای حداقل یک l	و	$F_{lk} = ۱$
برای کلیه l ها	و	$F_{kl} = ۰$

می توان هر ستونی از H را که دارای حداقل یک عنصر یک است حذف کرد و سپس بر اساس سطرهای دیگر تصمیم گرفت.

مثال عددی:

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	۵	۸	۱۳	٤
A_2	٤	۱۰	۹	۲
A_3	۸	۱۲	٦	۳

$, w = [۰/۳۰۵ ,۰/۰۹۲ ,۰/۳۳۶ ,۰/۲۶۷]$

گام ۱:

N=

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	۰/٤۸۸	۰/٤۵٦	۰/۷٦۹	۰/۷٤۳
A_2	۰/۳۹۰	۰/۵۷۰	۰/۵۳۲	۰/۳۷۱
A_3	۰/۷۸۱	۰/٦۸٤	۰/۳۵۵	۰/۵۵۷

گام ۲:

$$V = N \times W_{n\times n} =$$

	$C_۱^-$	$C_۲^+$	$C_۳^+$	$C_۴^+$
$A_۱$	۰/۱۴۹	۰/۰۴۲	۰/۲۵۸	۰/۱۹۸
$A_۲$	۰/۱۱۹	۰/۰۵۲	۰/۱۷۹	۰/۰۹۹
$A_۳$	۰/۲۳۸	۰/۰۶۳	۰/۱۱۹	۰/۱۴۹

گام ۳:

$S_{۱۲} = \{۳,۴\}$ $\quad$ $D_{۱۲} = \{۱,۲\}$

$S_{۱۳} = \{۱,۳,۴\}$ $\quad$ $D_{۱۳} = \{۲\}$

$S_{۲۳} = \{۱,۳\}$ $\quad$ $D_{۲۳} = \{۲,۴\}$

$S_{۲۱} = \{۱,۲\}$ $\quad$ $D_{۲۱} = \{۳,۴\}$

$S_{۳۱} = \{۲\}$ $\quad$ $D_{۳۱} = \{۱,۳,۴\}$

$S_{۳۲} = \{۲,۴\}$ $\quad$ $D_{۳۲} = \{۱,۳\}$

گام ۴:

$$I_{۱۲} = w_{۳} + w_{۴} = ۰/۳۳۶ + ۰/۲۶۷ = ۰/۶۰۳$$

$$I_{۱۳} = w_{۱} + w_{۳} + w_{۴} = ۰/۳۰۵ + ۰/۳۳۶ + ۰/۲۶۷ = ۰/۹۰۸$$

$$I_{۲۳} = w_{۱} + w_{۳} = ۰/۳۰۵ + ۰/۳۳۶ = ۰/۶۴۱$$

$$I_{۲۱} = w_{۱} + w_{۲} = ۰/۳۰۵ + ۰/۰۹۲ = ۰/۳۹۷$$

$$I_{۳۱} = w_{۲} = ۰/۰۹۲$$

$$I_{۳۲} = w_{۲} + w_{۴} = ۰/۰۹۲ + ۰/۲۶۷ = ۰/۳۵۹$$

$$I_{kl} = \begin{bmatrix} - & ۰/۶۰۳ & ۰/۹۰۸ \\ ۰/۳۹۷ & - & ۰/۶۴۱ \\ ۰/۰۹۲ & ۰/۳۵۹ & - \end{bmatrix}$$

$$NI_{۱۲} = \frac{Max\{|v_{۱۱} - v_{۲۱}|, |v_{۱۲} - v_{۲۲}|\}}{Max\{|v_{۱۱} - v_{۲۱}|, |v_{۱۲} - v_{۲۲}|, |v_{۱۳} - v_{۲۳}|, |v_{۱۴} - v_{۲۴}|\}}$$

$$= \frac{Max\{|۰/۱۴۹ - ۰/۱۱۹|, |۰/۰۴۲ - ۰/۰۵۲|\}}{Max\{|۰/۱۴۹ - ۰/۱۱۹۱|, |۰/۰۴۲ - ۰/۰۵۲|, |۰/۲۵۸ - ۰/۱۷۹|, |۰/۱۹۸ - ۰/۰۹۹|\}}$$

$$= \frac{Max\{۰/۰۳, ۰/۰۱\}}{Max\{۰/۰۳, ۰/۰۱, ۰/۰۷۹, ۰/۰۹۹\}} = \frac{۰/۰۳}{۰/۰۹۹} = ۰/۳۰۳$$

$$NI_{۱۳} = \frac{Max\{|v_{۱۲} - v_{۳۲}|\}}{Max\{|v_{۱۱} - v_{۳۱}|, |v_{۱۲} - v_{۳۲}|, |v_{۱۳} - v_{۳۳}|, |v_{۱۴} - v_{۳۴}|\}}$$

$$= \frac{Max\{۰/۰۲۱\}}{Max\{۰/۰۸۹, ۰/۰۲۱, ۰/۱۳۹, ۰/۰۴۹\}} = ۰/۱۵۱$$

$$NI_{۲۱}=\frac{Max\left\{\left|v_{۲۳}-v_{۱۳}\right|,\left|v_{۲۴}-v_{۱۴}\right|\right\}}{Max\left\{\left|v_{۲۱}-v_{۱۱}\right|,\left|v_{۲۲}-v_{۱۲}\right|,\left|v_{۲۳}-v_{۱۳}\right|,\left|v_{۲۴}-v_{۱۴}\right|\right\}}$$

$$=\frac{Max\left\{۰/۰۷۹,۰/۰۹۹\right\}}{Max\left\{۰/۰۳,۰/۰۱,۰/۰۷۹,۰/۰۹۹\right\}}=۱$$

$$NI_{۲۳}=\frac{Max\left\{\left|v_{۲۲}-v_{۴۲}\right|,\left|v_{۲۴}-v_{۳۴}\right|\right\}}{Max\left\{\left|v_{۲۱}-v_{۳۱}\right|,\left|v_{۲۲}-v_{۳۲}\right|,\left|v_{۲۳}-v_{۳۳}\right|,\left|v_{۲۴}-v_{۳۴}\right|\right\}}$$

$$=\frac{Max\left\{۰/۰۱۱,۰/۰۵\right\}}{Max\left\{۰/۱۱۹,۰/۰۱۱,۰/۰۶,۰/۰۵\right\}}=۰/۴۲۰$$

$$NI_{۳۱} = \frac{Max\{|v_{۳۱} - v_{۱۱}|, |v_{۳۳} - v_{۱۳}|, |v_{۳۴} - v_{۱۴}|\}}{Max\{|v_{۳۱} - v_{۱۱}|, |v_{۳۲} - v_{۱۲}|, |v_{۳۳} - v_{۱۳}|, |v_{۳۴} - v_{۱۴}|\}}$$

$$= \frac{Max\{۰/۰۸۹, ۰/۱۳۹, ۰/۰۴۹\}}{Max\{۰/۰۸۹, ۰/۰۲۱, ۰/۱۳۹, ۰/۰۴۹\}} = ۱$$

$$NI_{۳۲} = \frac{Max\{|v_{۳۱} - v_{۲۱}|, |v_{۳۳} - v_{۲۳}|\}}{Max\{|v_{۳۱} - v_{۲۱}|, |v_{۳۲} - v_{۲۲}|, |v_{۳۳} - v_{۲۳}|, |v_{۳۴} - v_{۲۴}|\}}$$

$$= \frac{Max\{۰/۱۱۹, ۰/۰۶\}}{Max\{۰/۱۱۹, ۰/۰۱۱, ۰/۰۶, ۰/۰۵\}} = ۱$$

$$NI_{k,l} = \begin{bmatrix} - & ۰/۳۰۳ & ۰/۱۵۱ \\ ۱ & - & ۰/۴۲۰ \\ ۱ & ۱ & - \end{bmatrix}$$

گام۵:

$$\bar{I} = \frac{۳}{۶} = ۰/۵$$

$$H = \begin{bmatrix} - & ۱ & ۱ \\ ۰ & - & ۱ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix}$$

گام ۶:

$$\overline{NI} = \frac{۳/۸۷۴}{۶} = ۰/۶۴۶$$

$$G = \begin{bmatrix} - & ۱ & ۱ \\ ۰ & - & ۱ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix}$$

گام ۷:

$$F = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_۱ & A_۲ & A_۳ \end{array} \\ & \begin{bmatrix} - & ۱ & ۱ \\ ۰ & - & ۱ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_۱ \\ A_۲ \\ A_۳ \end{array} \end{array}$$

$$A_۱ > A_۲ > A_۳$$

۲- ELECTRE IS

این روش مشابه **ELECTRE I** می باشد ، با این تفاوت که میزان برتری یک آلترناتیو نسبت به آلترناتیو دیگر در یک معیار در ماتریس هماهنگ در نظر گرفته می شود، یعنی به جای برتری قطعی، برتری به صورت فازی در نظر گرفته می شود. در ضمن می توان برای اختلاف آلترناتیوها در معیارها حدود در نظر گرفت. در نتیجه داریم:

$$c_j(M_i, M_k) = \begin{cases} 0 & p_j < g_j(M_k) - g_j(M_i), \\ \dfrac{g(M_i) + p_j - g(M_k)}{p_j - q_j} & q_j < g_j(M_k) - g_j(M_i) \le p_j, \\ 1 & g_j(M_k) - g_j(M_i) \le q_j. \end{cases}$$

عناصر ماتریس هماهنگ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$I_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \omega_j c_j(M_i, M_k)}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j}$$

در صورت نداشتن p و q می توان آنها را برابر ماکزیمم و مینیمم اختلاف بین مقادیر آلترناتیوها در هر معیار قرار داد.

توجه شود که ماتریس ناهماهنگ به همان صورت قبل در نظر گرفته می شود. بقیه مراحل مانند روش اول است ولی در نهایت جواب نسبتا دقیق تری ارائه می دهد.

۳- ELECTRE II

ن تفاوت اصلی این روش با ELECTRE I این است که دو حد آستانه دیگر نیز در نظر گرفته می شود : حد آستانه قوی هماهنگ (بین ۰/۵ و ۱) و حد آستانه قوی ناهماهنگ (بین ۰ و ۰/۵). یک آلترناتیو در صورتی در ماتریس هماهنگ (ناهماهنگ) موثر مقدار ۱ می گیرد که مقدار آن در مجموعه هماهنگ (ناهماهنگ) نسبت به حد آستانه قوی هماهنگ (ناهماهنگ) بهتر باشد، که در این صورت گویند برتری قوی است. ولی در صورتی که یکی از مقادیر بیشتر از حد آستانه ولی کمتر از حد آستانه قوی باشد، گویند برتری ضعیف است و آلترناتیو نسبت به دیگری بهتر در نظر گرفته نمی شود. به عنوان مثال در صورتی که حد آستانه قوی هماهنگ ۰/۷ و حد آستانه قوی ناهماهنگ ۰/۳ در نظر گرفته شود، مثالی که در بالا ارائه شد به صورت زیر در می آید:

$$I_{kl}=\begin{bmatrix} - & ۰/۶۰۳ & ۰/۹۰۸ \\ ۰/۳۹۷ & - & ۰/۶۴۱ \\ ۰/۰۹۲ & ۰/۳۵۹ & - \end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix} - & ۰ & ۱ \\ ۰ & - & ۰ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix}$$

$$NI_{k,l}=\begin{bmatrix} - & ۰/۳۰۳ & ۰/۱۵۱ \\ ۱ & - & ۰/۴۲۰ \\ ۱ & ۱ & - \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} - & ۰ & ۱ \\ ۰ & - & ۰ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} A_۱ & A_۲ & A_۳ \end{array} & \\ F=\begin{bmatrix} - & ۰ & ۱ \\ ۰ & - & ۰ \\ ۰ & ۰ & - \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_۱ \\ A_۲ \\ A_۳ \end{array} \end{array}$$

$$A_۱ > A_۲ = A_۳$$

۴- ELECTRE III

این روش در عین حال که پروسه ELECTRE II را دنبال می کند مانند روش ELECTRE IS از روش فازی نیز استفاده می کند. یعنی در عین حال که حدود قوی در آن مورد استفاده قرار می گیرد، میزان اختلاف بین مقادیر یک معیار دو آلترناتیو برای محاسبه هر دو ماتریس هماهنگ و ناهماهنگ را به فرم فازی در نظر می گیرد. ماتریس هماهنگ مانند روش ELECTRE IS حساب می شود، با این تفاوت که برای نوشتن فرم فازی، به جای اینکه اختلاف مقادیر بین حدود بالا و پایین در نظر گرفته شود، اختلاف آنها بین حد پایین و حد پایین قوی در نظر گرفته می شود.

فرم فازی برای محاسبه ماتریس ناهماهنگ نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$(v_j \geq p_j \geq q_j)$$

$$d_j(M_i, M_k) = \begin{cases} 0 & g_j(M_k) - g_j(M_i) < p_j, \\ \dfrac{g(M_k) - p_j - g(M_i)}{v_j - p_j} & p_j \leq g_j(M_k) - g_j(M_i) \leq v_j, \\ 1 & v_j < g_j(M_k) - g_j(M_i), \end{cases}$$

$$NI_{ik} = \frac{\max_{j \in J_{\bar{ik}}} \left| \omega_j d_j(M_i, M_k)(r_{ij} - r_{kj}) \right|}{\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \left| \omega_j (r_{ij} - r_{kj}) \right|}$$

۵- ELECTRE IV

در تمام روش های قبلی وزن شاخص ها مشخص بود و به طور مستقیم در محاسبات جهت رتبه بندی استفاده می شد. ELECTRE IV تنها روشی است که در آن بدون در نظر گرفتن وزن شاخص ها محاسبات انجام می شود. روش شبیه ELECTRE III می باشد، ولی با توجه به در دست نداشتن اوزان شاخص ها، مستقیماً با در نظر گرفتن اختلاف مقدار دو آلترناتیو در یک معیار و حدود تعیین شده، یکی از آنها به طور ضعیف، نسبی یا قوی نسبت به دیگری ترجیح داده می شود. در نهایت با تشکیل ماتریس کلی موثر رتبه بندی انجام می شود.

این روش در زمان هایی که تصمیم گیرنده نمی تواند در رابطه با اهمیت شاخص ها و وزن گذاری آنها تصمیم بگیرد، مفید می باشد.

پایان