t Ĥn♯·»k±{♯Ï IµTeĤ♯ÂºIL¶♯JIT¨♯ÁIµ¹ÀĤn

فصل دوم:اصول احتمال

www.ieun.ir

www.ieun.ir

# فصل دوم

# اصول احتمال

www.ieun.ir



۱– یک مغازه خرده فروشی دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد.۲۴ درصد از مشتریان کارت نوع A، ۶۱ درصد کارت نوعB و ۱۱ درصد هر دو نوع کارت را با خود دارند . چند درصد از مشتریان کارتی دارند که مورد قبول فروشگاه است؟

منظور پیدا کردن (AUB) می باشد:

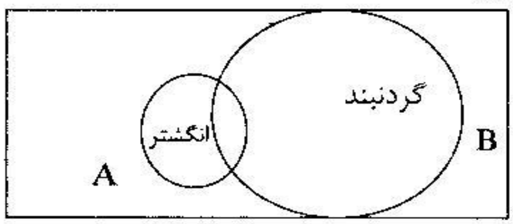
$$A = ۲۴\%, B = ۶۱\%, A \cap B = ۱۱\%$$
$$(A \cup B) = A + B - (A \cap B) = ۲۴ + ۶۱ - ۱۱ = ۷۴\%$$

۲–۶۰ درصد از دانش آموزان یک مدرسه دخترانه انگشتر و گردنبند ندارند . ۲۰ درصد انگشتر و ۳۰ درصد گردنبند دارند . اگر یک دانش آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه این دانش آموز ،

الف) انگشتر یا گردنبند داشته باشد چقدر است؟

ب) انگشتر و گردنبند داشته باشد چقدر است؟

برای درک بهتر مسئله به نمودار ون توجه کنید:




الف)

$$P(A \cup B)' = ۰/۶ \Rightarrow P(A \cup B) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$
$$P(A) = ۰/۲ \qquad P(B) = ۰/۳$$

ب)
$$P(A \cap B) = (A \cup B) - P(A) - P(B) = ۰/۱$$

۳– یک مشتری در بازدید از یک فروشگاه ، کت و شلواری را با احتمال ۰/۲۲ پیراهنی ، را با احتمال ۰/۳ و جورابی را با احتمال ۰/۲۸ خریداری می کند. اگر وی کت و شلوار و پیراهن را با احتمال ۰/۱۱ کت و شلوار و جوراب را با احتمال ۰۰۱۴ و پیراهن و جواب را با احتمال ۰/۱ وهر سه را با احتمال ۰/۰۶ خریداری کند،

الف)احتمال اینکه وی هیچکدام را نخرد چقدر است؟

ب)احتمال اینکه وی دقیقاً یک کالا را خریداری کند چقدر است؟

www.ieun.ir



الف)

$$P(K\cap J)=0/14,\ P(K\cap P)=0/11,\ P(J)=0/28,\ P(P)=0/3,\ P(K)=0/22$$

$$,P(K\cap P\cap J)=0/06,\ P(P\cap J)=0/1\ \left[\left(P(K\cup P\cup J)\right)\right]'=?$$

$$P(K\cup P\cup J)=P(K)+P(P)+P(J)-P(K\cap P)-P(K\cap J)-P(P\cap J)+P(K\cap P\cap J)$$

$$P(K\cup P\cup J)=0/51 \qquad \Rightarrow \qquad \left[P(K\cup P\cup J)\right]'=0/49$$

ب)

$P(P\cup J)=0/48$ احتمال خرید پیراهن یا جوراب

احتمال خرید کت و شلوار $\Rightarrow$

$$P(K)=P(K\cup P\cup J)-P(P\cup J)=0/51-0/48=0/03$$

$P(K\cup J)=0/36$ احتمال خرید کت و شلوار یا جوراب

احتمال خرید پیراهن $\Rightarrow$

$$P(P)=P(K\cup P\cup J)-P(K\cup J)=0/51-0/36=0/15$$

$P(K\cup P)=0/4$ احتمال خرید کت و شلوار یا پیراهن

احتمال خرید جوراب $\Rightarrow$

$$P(J)=P(K\cup P\cup J)-P(K\cup P)=0/51-0/41=0/1$$

احتمال خرید دقیقاً یک جنس $\Rightarrow$ $P(K)+P(P)+P(J)=0/03+0/15+0/1=0/28$

۴- یک مدرسه ۳ کلاس زبان اسپانیایی ، فرانسوی و آلمانی را ارائه می دهد و هر یک از ۱۰۰ دانش آموز مدرسه می توانند در هریک ازکلاسهای فوق ثبت نام کنند . اگر ۲۸ نفر در کلاس اسپانیایی، ۲۶ نفر در کلاس فرانسه و ۱۶ نفر در کلاس آلمانی ثبت نام کنند و بعلاوه ۱۲ نفر دردو کلاس اسپانیایی و فرانسوی ، ۴ نفر در دو کلاس اسپانیایی و آلمانی،۶ نفر دردو کلاس فرانسوی و آلمانی و ۲ نفر در هر سه کلاس ثبت نام کرده باشند . آنگاه:

www.ieun.ir



الف)اگر دانش آموزی را به تصادف انتخاب کنیم ، با چه احتمالی اودر هیچ کلاسی ثبت نام نکرده است؟

ب)اگر دانش آموزی به تصادف انتخاب شود ، با چه احتمالی او دقیقاً در یک کلاس ثبت نام کرده است؟

ج) اگر ۲ دانش آموز به تصادف انتخاب شوند، با چه احتمالی حداقل یکی از آنها در کلاس ثبت نام کرده است؟

الف ) ابتدا احتمال ثبت نام دانش آموزان مورد نظر را در حداقل یک کلاس بدست آورده و برای بدست آوردن جواب مساله آن را از یک کم می کنیم:

$$P(\underset{\text{آلمانی}}{A} \cup \underset{\text{اسپانیایی}}{E} \cup \underset{\text{فرانسه}}{F}) = P(A)+P(E)+P(F)-P(A\cap E)-P(A\cap F)-P(E\cap F)+P(A\cap E\cap F)$$

$$=۰/۱۶+۰/۲۸+۰/۲۶-۰/۰۴-۰/۰۶-۰/۱۲+۰/۰۲=۰/۵$$

۰/۵=۰/۵-۱= احتمال ثبت نام در هیچ کلاس

ب) مانند قسمت ب سئوال قبل (سئوال سوم) داریم:

$$\begin{cases} P(E\cup F)=۰/۴۲ \\ P(۱)=P(E\cup F\cup A)-P(E\cup F)=۰/۰۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(E\cup A)=۰/۴ \\ P(۲)=۰/۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} P(F\cup A)=۰/۳۶ \\ P(۳)=۰/۱۴ \end{cases}$$

**P** (دقیقاً یک کلاس) = **P**(۱) +**P**(۲) +**P**(۳)=۰/۳۲

ج) احتمال ثبت نام حداقل یک دانش آموز از انتخاب دو دانش آموز به صورت تصادفی عبارتست از :

با توجه به قسمت الف نصف دانش آموزان در کلاسها $P(M)=\dfrac{\binom{۵۰}{۱}\binom{۵۰}{۱}+\binom{۵۰}{۲}}{\binom{۱۰۰}{۲}}=\dfrac{۱۴۹}{۱۹۸}$

ثبت نام کرده اند و نصف دیگر ثبت نام نکرده اند.

www.ieun.ir



۵- در شهری با جمعیت ۱۰۰،۰۰۰ نفر سه روزنامه I، II و III منتشر می شود. نسبت کسانیکه این روزنامه ها را مطالعه می کنند بصورت زیر داده شده است.

I: ۱۰ درصد  II: ۳۰ درصد  III: ۵ درصد  I و II: ۸ درصد

I و III: ۲ درصد  II و III: ۴ درصد  I، II و III: یک درصد

الف) تعداد افرادی که فقط یک روزنامه را مطالعه می کنند چقدر است؟

ب) چه تعدادی حداقل ۲ روزنامه را مطالعه می کنند؟

ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد چند نفر حداقل یک روزنامه صبح بعلاوه یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

د) چند نفر هیچ روزنامه ای را مطالعه نمی کنند؟

هـ) چند نفر فقط یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

الف) مانند قسمت ب سئوالهای ۳ و ۴ : نفر ۲۰۰۰۰ = (۱۰۰۰۰۰) (۰/۲)

ب) $P$ (دقیقاً یکی) $= P(I \cup II \cup III) - P$ (دقیقاً یک روزنامه) $- P$ (سه روزنامه)

$= ۰/۳۲ - ۰/۲ = ۰/۱۲ \Rightarrow$ (۰/۱۲) (۱۰۰۰۰۰) = ۱۲۰۰۰ نفر

ج) $P(I \cap II) = ۰/۰۸$ و $P(II \cap III) = ۰/۰۲$ و $P(I \cap II \cap III) = ۰/۰۱$

چون واژه حداقل ذکر شده است

تعداد افرادی که حداقل یک روزنامه صبح = (۰/۰۸+۰/۰۲+۰/۰۱)×۱۰۰۰۰۰=۱۱۰۰۰ نفر

بعلاوه یک روزنامه بعد از ظهر مطالعه می کنند

د) $P$ (هیچ فردی روزنامه نخواند) $= ۱ - P(I \cup II \cup III) = ۱ - ۰/۳۲ = ۰/۶۸$

تعداد افراد = (۰/۶۸) (۱۰۰۰۰۰) = ۶۸۰۰۰ نفر

هـ) صبح عصر

$P(I \cap II) = ۰/۰۸$   $P(II \cap III) = ۰/۰۲$

$\Rightarrow$ $P$(فقط یک صبح و یک عصر) $= ۰/۰۸ + ۰/۰۲ = ۰/۱$

تعداد افراد = (۰/۱) (۱۰۰۰۰۰) = ۱۰۰۰۰ نفر

۶- اطلاعات زیر در رابطه با شغل، وضعیت تأهل و تحصیلات ۱۰۰۰ نفر مشترک یک مجله داده شده است: ۳۱۲ نفر شاغل، ۲۷۰ نفر متأهل، ۵۲۵ نفر دانشجوی شاغل،

www.ieun.ir



۱۴۷ نفر دانشجوی متأهل ، ۸۶ نفر متأهل شاغل و ۲۵ نفر دانشجوی شاغل و متأهل هستند. نشان دهید که اعداد گزارش شده غلط هستند

راهنمایی:

اگر W, M و G نشان دهنده مجموعه های شاغلین ، متأهلین و دانشجویان باشد فرض کنید یک نفر از ۱۰۰۰ نفر به تصادف انتخاب شده است و گزاره (۴-۴) را بکار برده ، نشان دهید که اگر اطلاعات فوق صحیح باشد آنگاه . $P(M \cup W \cup G) > 1$

شاغل $P(Sh)=۰/۳۱۲$ و متأهل $p(M)=۰/۴۷$ و دانشجو $p(D)=۰.۵۲۵$ و $P(Sh \cap D)=۰.۰۴۲$

$P(M \cap D)=۰/۱۴۷$ و $P(M \cap Sh)=۰/۰۸۶$ و $P(D \cap Sh \cap M)=۰.۰۲۵$

چون احتمال مورد نظر بزرگتر از یک شده است و چنین چیزی امکان ندارد لذا اطلاعات غلط هستند.

$P(Sh \cup D \cup M)=۱.۰۵۷>۱$

۷- *

۸- *

۹- *

۱۰- اگر ۸ مهره رخ شطرنج را به تصادف روی صفحه شطرنج قرار دهیم احتمال اینکه هیچ یک از رخ ها دیگری را نزند یعنی اینکه هیچ سطر و یا ستونی بیش از یک رخ نداشته باشد را بدست آورید.

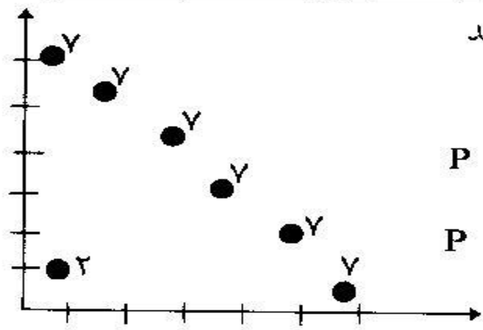
$$\frac{۱۵۲}{۸^۸} = ۹/۰۵۹۹ \times ۱۰^{-۶}$$

۱۱- *

۱۲- اگر دو تاس را پرتاب کنیم ، احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر i باشد را بدست آورید . مقدار آن را برای ۱۲ و ۱۱ و ۰۰۰ و ۳ و ۲ = i پیدا کنید.

با توجه به نمودار می توان تمام احتمالات مورد نظر را محاسبه نمود:

فضای نمونه ای پر تاب دو تاس ۳۶ می باشد




$P$ (جمع = ۲) $= \frac{۱}{۳۶}$

$P$ (جمع = ۷) $= \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

۱۳- یک زوج تاس را پرتاب می کنیم تا جمع ۵ یا ۷ ظاهر شود. احتمال اینکه جمع ۵ ابتدا ظاهر شود را بدست آورید.

راهنمایی: اگر $E_n$ نشان دهنده پیشامد ظاهر شدن ۵ در $n$ امین پرتاب و ظاهر نشدن ۵ یا ۷ در $(n-۱)$ پرتاب اول باشد. $P(E_n)$ را محاسبه کنید و بررسی نمایید که $\sum_{n=۱}^{\infty} P(E_n)$ احتمال مورد نظر است.

تعداد حالتهای مجموع ۵ { (۳و۲)، (۲و۳)، (۱و۴)، (۴و۱) } چهار حالت می باشد.

و تعداد حالتهای مجموع ۷ {(۶و۱)، (۱و۶)، (۵و۲)، (۲و۵)، (۳و۴)، (۴و۳)} شش حالت می باشد.

لذا احتمال اینکه جمع ۵ ابتدا ظاهر شود $\frac{۴}{۱۰}$ می باشد

۱۴- در یک بازی، بازیکنی دو تاس را پرتاب می کند اگر مجموع دو عدد ظاهر شده ۲ یا ۳ یا ۱۲ باشد بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می کند تا اینکه او نتیجه قبلی را بدست آورد و یا نتیجه ۷ حاصل گردد. اگر نتیجه ۷ ابتدا ظاهر شود بازیکن بازنده است در حالیکه اگر نتیجه قبلی پیش از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را بدست آورید.

ابتدا حالتهای ممکن را در نظر می گیریم

{(۶و۶)، ....، (۵و۵)، (۶و۴)، ....، (۴و۴)، (۶و۳)، ....، (۳و۳) و (۶و۳)، ....، (۲و۲)، (۶و۱)، ....، (۱و۱)}

۱۵- ظرفی شامل ۳ توپ قرمز و ۷ توپ سیاه است. بازیکن های A و B یکی پس از دیگری توپ ها را از ظرف خارج می کنند تا یک توپ قرمز انتخاب شود. احتمال اینکه

www.ieun.ir



بازیکن A توپ قرمز را انتخاب کند بدست آورید. (ابتدا بازیکن A ، توپ از ظرف انتخاب می کند و سپس بازیکن B و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد، درضمن توپهای انتخاب شده به ظرف بازگردانده نمي شوند.)

چهار امکان وجود دارد که مجموع این چهار حالت احتمال مورد نظر خواهد بود.

حالت اول : فرض می کنیم که فرد A در همان ابتدا مهره قرمز را انتخاب کند که احتمال آن $\left(\frac{۳}{۱۰}\right)$ می باشد.

حالت دوم: فرض می کنیم که فرد A مهره سیاه بردارد و چون فرد B نیز باید مهره سیاه بردارد تا فرد A در مرحله بعد مهره قرمز را بردارد داریم : چون برداشتن توپها یا مهره ها بدون جایگزاری است :

$$\Rightarrow \frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۷۵}{۱۰۰۰}$$

حالت سوم :فرض می کنیم در مرتبه دوم هم فرد A مهره (توپ) قرمز را برندارد لذا این عمل ادامه می یابد:

$$\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=۰/۰۸۳۳$$

حالت چهارم : فرض می کنیم در مرتبه سوم نیز فرد A مهره قرمز را برندارد و چون فرد B نیز نباید مهره قرمز را بردارد داریم :

$$\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}=۰/۰۲۵$$

اگر فرض کنیم که در مرحله چهارم هم فرد A مهره سیاه را بردارد چون تنها سه مهره قرمز باقی می ماند و فرد B ناچار به انتخاب مهره قرمز خواهد شد لذا این فرض با فرض ابتدای مسأله متناقض خواهد بود. با جمع کردن احتمال چهار حالت فوق داریم:

P (توپ قرمز را بردارد | A اولین را بردارد A) $=۰/۳+۰/۱۷۵+۰/۰۸۳۳+۰/۰۲۵=۰/۵۸۳۳$

۱۶- ظرفی شامل ۵ توپ قرمز و ۶ توپ آبی و ۸ توپ سبز است.اگر یک مجموعه ۳ تایی از توپها به تصادف انتخاب شود ، احتمال زیر را بدست آورید.

الف) توپها از یک رنگ باشند.

www.ieun.ir



ب) توپها از رنگهای متفاوت باشند.

مساله را در صورتی که رنگ توپ انتخاب شده را یادداشت نموده و سپس قبل از انتخاب دوم در ظرف بازگردانده شود. حل کنید این نوع انتخاب را نمونه گیری با جایگذاری گویند.

الف) سه حالت ممکن است رخ دهد : حالت اول : هر سه قرمز ، حالت دوم : هر سه آبی ، حالت سوم : هر سه سبز

$$P\ (\text{توپها هم رنگ باشند}) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۹}{۳}} + \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۹}{۳}} + \frac{\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۹}{۳}} = ۰/۰۸۸$$

ب) احتمال اینکه توپها از رنگهای متفاوت باشند عبارتست از

$$P\ (\text{رنگ متفاوت}) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۹}{۳}} = ۰/۲۴۷۷$$

اگر قرار باشد نمونه گیری با جایگذاری انجام گیرد داریم.

الف ) حالت اول : هر سه قرمز باشند: $p\ (\text{هر سه قرمز}) = \frac{۵}{۱۹} \times \frac{۵}{۱۹} \times \frac{۵}{۱۹} = \frac{۱۲۵}{۶۸۵۹}$

حالت دوم : هر سه آبی باشند: $p\ (\text{هر سه آبی}) = \frac{۶}{۱۹} \times \frac{۶}{۱۹} \times \frac{۶}{۱۹} = \frac{۲۱۶}{۶۸۵۹}$

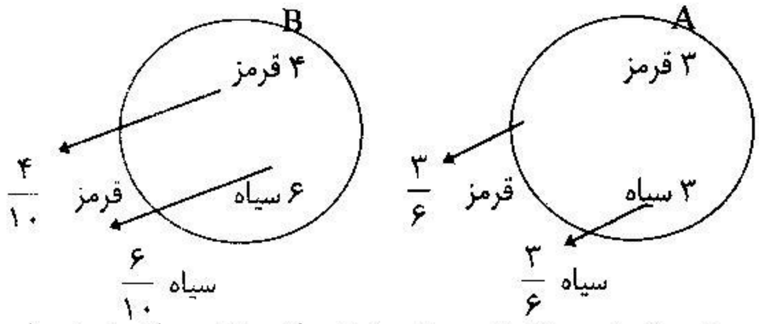
حالت سوم : هر سه سبز باشند: $p\ (\text{هر سه سبز}) = \frac{۸}{۱۹} \times \frac{۸}{۱۹} \times \frac{۸}{۱۹} = \frac{۵۱۲}{۶۸۵۹}$

$$p(\text{توپها از یک رنگ}) = p(\text{هر سه قرمز}) + p(\text{هر سه آبی}) + p(\text{هر سه سبز}) = ۰/۱۲۴۳$$

ب) احتمال اینکه توپها از رنگهای متفاوت باشند :

$$p\ (\text{رنگها متفاوت}) = \frac{۵}{۱۹} \times \frac{۶}{۱۹} \times \frac{۸}{۱۹} = ۰/۰۳۵$$

۱۷-ظرف A شامل ۳ توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است. در حالیکه ظرف B دارای ۴ توپ قرمز و ۶ توپ سیاه است. اگر یک توپ را به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه توپها دارای یک رنگ باشند چقدر است؟




p (توپها یک رنگ) =

p(قرمز) + p(سیاه)

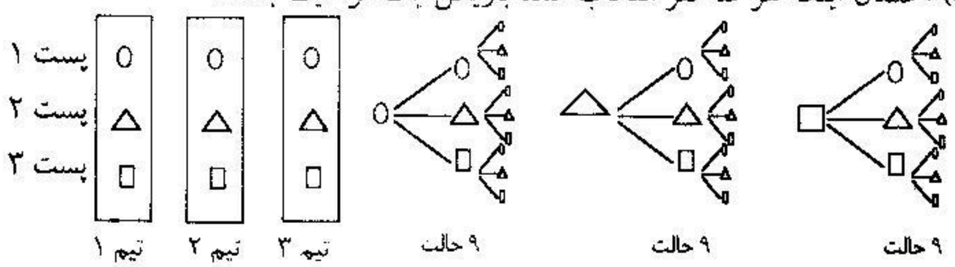
$= (\frac{۳}{۶} \times \frac{۴}{۱۰}) + (\frac{۳}{۶} \times \frac{۶}{۱۰})$

$= ۰/۵$

۱۸- یک تیم بسکتبال سه نفره شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است.

الف) از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک فرد به تصادف انتخاب می شود. احتمال اینکه یک تیم کامل انتخاب شود را بدست آورید　　۲۷=۹+۹+۹= فضای نمونه

ب) احتمال اینکه هر سه نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند.




الف) کامل بودن تیم یعنی هر یک از ترکیبهای ( □ و △ و ○ ) که با کمی دقت ملاحظه می شود در ۶ حالت از ۲۷ حالت فضای نمونه تیم کامل است پس:

$$p\,(\text{تیم کامل}) = \frac{۶}{۲۷} = \frac{۲}{۹}$$

ب) بازیکن یک موقعیت، یعنی هر یک از ترکیبهای( □و □ و □ ) یا (△و△و△) یا (○ و ○ و ○) که ۳ حالت از ۲۷ حالت دارای این ترکیبها می باشد.

www.ieun.ir



۱۹- یک گروه از افراد خردسال شامل $b$ پسر بچه و $g$ دختر بچه را بـه تصـادف در یـک خط ردیف می کنیم یعنی هر یک از $(b+g)!$ جایگشت افراد هـم شـانس هستند. احتمـال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت $(۱ \le i \le b+g)$ دختر بچه باشد را بدست آورید.

دختر بچه i ام را از جمع خارج کرده احتمال مورد نظر را محاسبه می کنیم:

ابتدا تعداد حالتهایی که b پسر و (۱ − g) دختر کنار هم قرار می گیرند را محاسبه می کنیم :

$$\frac{(b+g-۱)!}{b!(g-۱)!} = A$$

احتمال مورد نظر عبارت است از:

$$p(\text{کل}) = \frac{A}{(b+g)!}$$

۲۰- در جنگلی ۲۰ گوزن وجود دارد که ۵ تای آنها را پس از به دام انداختـن علامتگـذاری و رها کرده اند. مدتی بعد ۴ گوزن را مجدداً به دام می اندازند. احتمال اینکه ۲ تـا از گـوزن های به دام افتاده دارای علامت باشند را بدست آورید. چه فرضی را در نظر می گیرید؟

$$\mathbf{P}(\text{۲ تا از ۴ تا با علامت باشند}) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۲}}{\binom{۲۰}{۴}} = \frac{۷۰}{۳۲۳} = ۰/۲۱۶۷$$

۱۵ بدون علامت

۵ باعلامت

۲۱-در یک بازی شانس ، بازیکن بایستی ۸ عدد را از بین اعداد ۱ تا ۴۰ انتخاب کند؛ هیئت برگزار کننده سپس در یک نمایش ۸ عدد از ۴۰ عدد را انتخاب مـی کنـد فـرض کنیـد هـر یک از $\binom{۴۰}{۸}$ انتخاب هیئت برگزار کننده هم شانس باشـند. احتمـال پیشـامد هـای زیـر را برای بازیکن بدست آورید.

الف) هر ۸ عدد انتخاب شده توسط هیئت برگزار کننده نیز انتخاب شوند.

www.ieun.ir



ب)۷ تا از ۸ عدد انتخاب شده توسط هیئت برگزار کننده انتخاب شوند.

ج) حداقل ۶ تااز آنها انتخاب شوند.

الف)

$$P(A) = \frac{\binom{8}{8}}{\binom{40}{8}} = 1/3 \times 10^{-6}$$

ب)

$$P(B) = \frac{\binom{8}{7}\binom{32}{1}}{\binom{40}{8}} = 3/328 \times 10^{-6}$$

ج)

$$P(C) = \frac{\binom{8}{8} + \binom{8}{7}\binom{32}{1} + \binom{8}{6}\binom{32}{2}}{\binom{40}{8}} = 1/839 \times 10^{-4}$$

۲۲-*

۲۳- تعداد ۳۰ نفر روانپزشک و ۲۴ نفر روانشناس در یک کنفرانس شرکت کرده اند. ۳ نفر از آنها را برای حضور در یک میزگرد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداقل یک روانپزشک انتخاب شود چقدر است؟

$$P\text{(انتخاب حداقل یک روانپزشک)} = \frac{\binom{30}{1}\binom{24}{2} + \binom{30}{2}\binom{24}{1} + \binom{30}{3}}{\binom{54}{3}} = 0/9184$$

۲۴- *

www.ieun.ir



۲۵- معلمی به دانش آموزان یک کلاس ۱۰ سوال داده و به آنها اطلاع می دهد که امتحان نهایی شامل ۵ سوال تصادفی از سوالات داده شده است . اگر دانش آموزی توانسته باشد به ۷ سوال پاسخ دهد ، مطلوب است احتمال اینکه،

الف) در امتحان به هر ۵ سوال پاسخ صحیح بدهد؟

ب) حداقل به ۴ سوال امتحانی پاسخ صحیح بدهد؟

الف) $P(\text{پاسخ دادن به هر ۵سوأل}) = \dfrac{\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۷}} = ۰/۰۸۳۳$

ب) $P(\text{انتخاب حداقل یک روانپزشک}) = \dfrac{\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۷}} = ۰/۵$

۲۶ – $n$ جوراب داریم که ۳ تای آنها قرمز است. اگر احتمال انتخاب ۲ جوراب قرمز به تصادف برابر با $\frac{۱}{۲}$باشد، مقدار $n$ را بدست آورید.

برای محاسبه مقدار n داریم: $P(\text{۲ جوراب قرمز}) = \dfrac{\binom{۳}{۲}}{\binom{n}{۲}} = \dfrac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \frac{۳}{\left(\dfrac{n!}{۲!(n-۲)!}\right)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۶}{n(n-۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow n(n-۱) = ۱۲ \Rightarrow \boxed{n = ۴}$$

۲۷- در شهری ۵ هتل وجود دارد . اگر در یک روز ۳ نفر ساکن هتل شده باشند. احتمال اینکه هر یک در هتلی جداگانه مستقر باشند را بدست آورید. چه فرضهایی را برای حل مساله در نظر می گیرید؟

www.ieun.ir



فرض می کنیم ۳ توپ را می خواهیم در ۵ ظرف توزیع کنیم تعداد حالتهای توزیع این سه توپ به دلیل اینکه توپها با هم متفاوت هستند (افراد متفاوت می باشند) عبارتست از : $5^3$ که فضای نمونه ای خواهد بود.

توپ اول می تواند هر یک از ۵ ظرف را انتخاب کند، توپ دوم می تواند وارد هر یک از ۴ ظرف باقیمانده شود و در نهایت توپ سوم می تواند وارد هر یک از ۳ ظرف باقیمانده شود. لذا داریم: $5 \times 4 \times 3$

$$p\text{(افراد در هتلهای جداگانه باشند)} = \frac{5\times4\times3}{5^3} = 0/48$$

۲۸- شهری ۴ نفر تعمیر کار تلویزیون دارد. اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب باشند. با چه احتمالی دقیقاً به $i$ تعمیر کار مراجعه می شود؟ مسئله را برای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ = $i$ حل کنید . چه فرضهایی رادر نظر می گیرید؟

این مسأله حالت کلی تری از مسأله ۲۷ می باشد . مثلاً

$$P\text{(مراجعه به دقیقاً ۴ تعمیرکار)} = \frac{4\times3\times2\times1}{4^4} = 0/09375$$

۲۹ -اگر تاسی را ۴ مرتبه پرتاب کنیم ، احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد ۶ ظاهر شود چقدراست؟

در ۴ مرتبه پرتاب تاس: $p\text{(ظاهر شدن حداقل یکبار عدد ۶)} = 1 - p\text{(ظاهر شدن عدد ۶)}$

$$p\text{(ظاهر نشدن ۶ در یکبار پرتاب)} = \frac{5}{6} \Rightarrow p\text{(ظاهر نشدن ۶ در چهار پرتاب)} = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$$

$$p\text{(ظاهر شدن حداقل یکبار عدد ۶)} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0/5177$$

۳۰- دو تاس را $n$ مرتبه به طور متوالی پرتاب می کنیم . احتمال اینکه حداقل یک مرتبه جفت ۶ ظاهر شود رابدست آورید. $n$ چقدر بزرگ باشد تا احتمال فوق حداقل برابر با $\frac{1}{2}$ گردد؟

$$p\text{(ظاهر شدن حداقل یکبار جفت ۶)} = 1 - p\text{(ظاهر نشدن جفت ۶)}$$

www.ieun.ir



p (ظاهر شدن جفت ۶ در یکبار پرتاب) $=\frac{۳۵}{۳۶} \Rightarrow$ p (ظاهر نشدن جفت۶ در n پرتاب) $=(\frac{۳۵}{۳۶})^n$

p (ظاهر شدن حداقل یکبار جفت ۶) $= ۱-(\frac{۳۵}{۳۶})^n = ?$

برای یافتن N باید شرط زیر را درنظر گرفت: $۱-(\frac{۳۵}{۳۶})^n \leq \frac{۱}{۲}$

که با حل نا معادله ۲۴ = n بدست خواهد آمد.

۳۱- الف) اگر $N$ نفر شامل $A$ و $B$ به تصادف در یک ردیف قرار گیرند. احتمال اینکه $A$ و $B$ پهلوی هم باشند چقدر است؟

ب) احتمال پیشامد فوق، وقتی که افراد به تصادف روی محیط یک دایره قرار گیرند را بدست آورید.

الف) A و B را یک نفر در نظر می گیریم لذا داریم: $p(B,A)=\frac{(N-۱)!}{N!}$

ب) چون تعداد حالتهایی که N نفر دو ر یک میز باشند برابر با $(n-1)!$ است پس:

$$P\ (\text{پهلوی هم } B,A) = \frac{(N-۲)!}{(N-۱)!}$$

۳۲- از یک گروه دانشجویان شامل ۳ نفر دانشجوی سال اول، ۴ نفر سال دوم ، ۴ نفر سال سوم و ۳ نفر سال چهارم شورای ۴ نفره بـه تصـادف انتخـاب مـی کنیـم. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) از هر سال یک نفر در شورا باشند.

ب) ۲ نفر دانشجوی سال دوم و ۲ نفر دانشجوی سال سوم در شورا باشند.

ج) فقط دانشجویان سال دوم و سال سوم در شورا باشند.

الف) باید از هر سال یکنفر انتخاب شود.

$$P\ (\text{از هر سال یک نفر}) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۴}{۴}} = ۰/۱۴۳۸$$

www.ieun.ir



ب) $$P(\text{۲ نفر سال دوم و ۲ نفر سال سوم}) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۴}{۴}} = ۰/۰۳۶$$

ج) $$P(\text{فقط سال دوم و سال سوم}) = \frac{۲\times\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۴}{۴}} = ۰/۰۷$$

۳۳- خانمی $n$ کلید دارد که یکی از آنها درب منزلش را باز می کند.

الف) اگراو کلید ها را به تصادف انتخاب کرده و آنهایی که درب را باز نمی کنند کنار گذارد با چه احتمالی او در $K$ امین تلاش درب را باز می کند؟

ب) اگر او کلید های قبلی را کنار نگذارد احتمال پیشامد فوق چقدر است؟

الف) $\left(\frac{n-k}{n}\right)$　　ب) $\frac{۱}{n}$

۳۴- چند نفر بایستی دریک اطاق حضور داشته باشند. تا احتمال اینکه حداقل دو نفر از آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند.بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد؟ فرض کنید تولد در ماههای مختلف هم شانس است.

احتمال اینکه هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند عبارتست از:

$$p(A) = \frac{۱۲\times۱۱\times\cdots\times(۱۲-n+۱)}{(۱۲)^n}$$

$$۱-p(A) \succ \frac{۱}{۲} \Rightarrow p(A) \prec \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{n=۵}$$

۳۵- اضج ثج اخاسط ۱۲□سج چاح□ك ات‌ب‌ص‌اص الل□ش‌گ گ‌لُش□تاص أ□گ□ا ج‌ل‌چ تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند چقدر است؟

$$P(\text{هیچکدام در یک ماه متولد نشوند}) = \frac{۱۲\times۱۱\times\cdots\times۲\times۱}{(۱۲)^{۱۲}} = ۵/۳۷\times۱۰^{-۵}$$

www.ieun.ir



۳۷- یک گروه متشکل از ۶مرد و ۶ زن را به تصادف به دو گروه ۶ نفره تقسیم می کنیم احتمال اینکه هر دو گروه تعداد مساوی مرد داشته باشند را بدست آورید.

$$p\text{(هر دو گروه تعداد مساوی مرد)} = \frac{\binom{۶}{۳,۳}\times\binom{۶}{۳,۳}}{\binom{۱۲}{۶,۶}} = \frac{۲۰\times۲۰}{۹۲۴} = ۰/۴۳۲۹$$

۳۸- *

۳۹- فرض کنید $n$ توپ را به تصادف در $N$ ظرف توزیع کنیم. احتمال اینکه $m$ توپ در ظرف اول باشد را بدست آورید. فرض کنید که همه $N^n$ ترتیب توزیع توپها هم شانس باشند.

چون توپها یکسان فرض نشده اند توزیع آنها در n ظرف $N^n$ خواهد بود. برای آنکه m توپ در ظرف اول قرار گیرد m توپ و ظرف اول را از مجموعه کل (فضای نمونه ای ) بر می داریم:

$$\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

۴۰- در کمدی ۱۰جفت کفش نگهداری می شود. اگر ۸ کفش به تصادف انتخاب شود، احتمال پیش آمدهای زیر را بدست آورید.

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود.

ب) درست یک جفت کفش انتخاب شود.

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود: برای اینکه هیچ جفت کفش انتخاب نشود باید هر لنگه کفش مربوط به یک جفت متفاوت باشد تعداد راههای انتخاب ۸ لنگه کفش از بین ۱۰ جفت کفش برابر است با : $\binom{۱۰}{۸}$

یعنی ۸ جفت متفاوت انتخاب شود و برای هر جفت کفش دو انتخاب برای پای راست و چپ وجود دارد. پس $۲^۸$ انتخاب ممکن است رخ دهد. در این صورت :

www.ieun.ir



$$p(\text{انتخاب درست هیچ جفت کفش}) = \frac{2^8\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}} = 0/0914۵$$

ب) چون انتخاب ۸ لنگه کفش یعنی انتخاب ۴ جفت کفش لذا داریم:

$$p(\text{انتخاب درست یک جفت کفش}) = \frac{4\times 2^6\binom{10}{6}}{\binom{20}{8}} = 0/4267$$

۴۱- یک تیم بسکتبال متشکل از ۶ بازیکن سیاه پوست و ۴ بازیکن سفید پوست است اگر بازیکنها دو به دو هم اطاق باشند. احتمال اینکه در دو اطاق یک بازیکن سفید پوست و یک بازیکن سیاه پوست باشد را بدست آورید.

ابتدا فضای نمونه ای را بدست می آوریم چون ۱۰ نفر را به ۵ گروه ۲ نفری تقسیم کرده ایم داریم:

$$\binom{10}{2,2,2,2,2}$$

$$\frac{10!}{2^5 5!}$$ چون ترتیب قرار گرفتن آنها برای ما مطرح نیست.

برای بدست آوردن احتمال مربوطه داریم:

$$p(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}2!\left[\frac{(4-2)!}{2^{2-1}(2-1)!}\right]\left[\frac{(6-2)!}{2^{3-1}(3-1)!}\right]}{\frac{10!}{2^5 5!}} = \frac{4}{7}$$

با توجه به فرمول ارائه شده در فصل دوم:

۴۲- اگر ۴ زوج به تصادف در یک ردیف صندلی بنشینند، احتمال اینکه هیچ شوهری پهلوی همسرش نباشد را بدست آورید.

احتمال اینکه n زوج $(n \le 4)$ از این ۴ زوج پهلوی هم باشند عبارتست از :

www.ieun.ir



$$P(A)=\frac{۲^n(۸-n)!}{۸!}$$

احتمال اینکه حداقل یک زوج پهلوی هم باشند عبارتست از :

$$p(B)=\binom{۴}{۱}\frac{۲^۱۷!}{۸!}-\binom{۴}{۲}\frac{۲^۲۶!}{۸!}+\binom{۴}{۳}\frac{۲^۳۵!}{۸!}-\binom{۴}{۴}\frac{۲^۴۴!}{۸!}=\frac{۲۳}{۳۵}$$

$P($هیچ شوهری پهلوی همسرش نباشد$) = ۱ - P(B) = ۱-\frac{۲۳}{۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$ ،

۴۳- ＊

۴۴- ＊