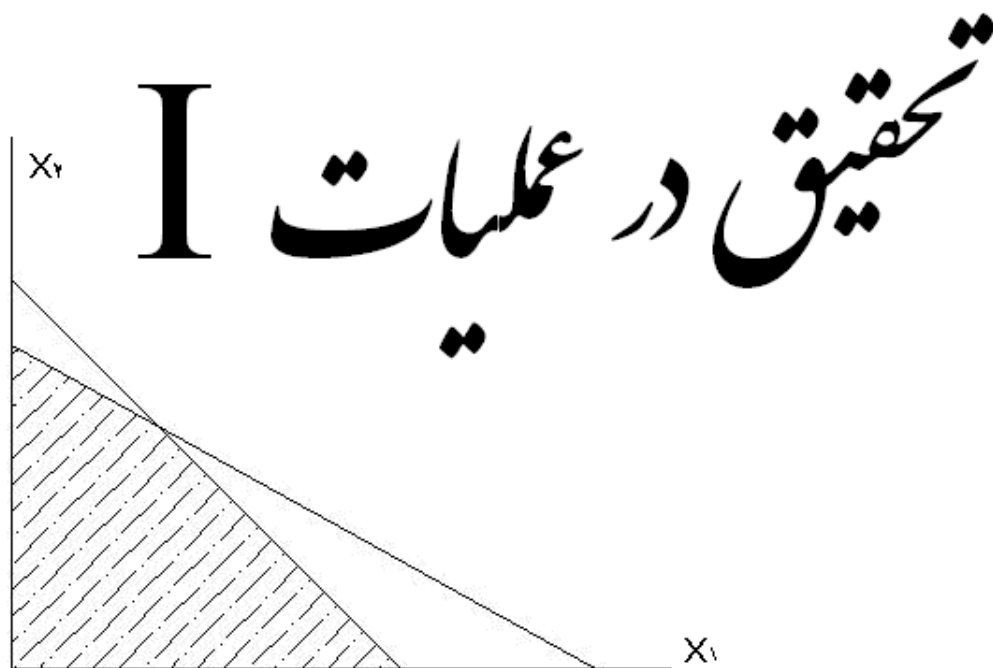




	Z	X_I^t	X_{II}^t	RHS
Z	۱	$C_B B^{-1} A - C_I$	$C_B B^{-1} - C_{II}$	$Z = C_B \times X_B = C_B B^{-1} P_o$
X_B	۰	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} P_o$

حمید بازرگان

تحقیق در عملیات

۶.....	مقدمه
۶.....	مراحل بررسی تحقیق در عملیات
۶.....	مدل سازی
۶.....	تعریف مدل
۷.....	انواع مدل
۷.....	مدل فیزیکی:
۸.....	مدل مصور
۹.....	مدل کلامی (verbal)
۱۰.....	مدل ریاضی
۱۰.....	ساختار مدل ریاضی در تحقیق در عملیات
۱۲.....	تقسیم بندی مدل های ریاضی تحقیق در عملیات
۱۲.....	تعریف برنامه ریزی خطی و فرم کلی مدل آن
۱۲.....	فرم کلی مدل برنامه ریزی خطی
۱۳.....	واژه ها و عناصر اساسی مدل برنامه ریزی خطی
۱۶.....	شکل متعارفی مسئله برنامه ریزی خطی
۱۹.....	شکل استاندارد مسئله برنامه ریزی خطی
۲۰.....	حل ترسیمی مسائل ۲ متغیره در برنامه ریزی خطی
۲۶.....	شرح الگوریتم simplex
۲۶.....	نمایش فضای جواب به کمک شکل استاندارد
۲۸.....	تعیین جبری نقاط اکستریم
۲۹.....	طریقه یافتن جواب پایه ای
۳۰.....	ویژگی های اساسی (fundamental properties)
۳۱.....	برقراری شرائط شدنی بودن (feasibility) و بهینگی (optimality)
۳۳.....	ضابطه انتخاب متغیر ورودی (entering variable)
۳۳.....	ضابطه انتخاب متغیر خروجی (leaving or exiting variable)
۳۷.....	تعریف عنصر لولا و سطر لولا
۳۸.....	مختصری از عملیات گاس - جردن (عملیات ردیفی ERO)
۳۹.....	حل دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ به کمک عملیات گاس - جردن
۴۱.....	مثالهایی برای برای عملیات ERO
۴۱.....	تهیه معکوس ماتریس به کمک عملیات سطری
۴۵.....	تشریح بنیاد ریاضی الگوریتم سیمپلکس
۴۵.....	تعاریف ریاضی
۴۶.....	ترکیب محدب Convex Combination
۴۷.....	مجموعه محدب
۴۷.....	نقاط اکستریم یک مجموعه محدب
۵۱.....	تشریح ریاضی ۲ شرط فوق
۵۱.....	ضابطه ریاضی شرط بهینگی برای انتخاب متغیر ورودی

۵۳	ضابطه ریاضی شرط شدنی بودن feasibility
۵۵	یافتن متغیر خروجی
۵۶	مقدار بهبود تابع هدف
۵۸	شکل ماتریسی جدول سیمپلکس
۶۳	توجیه ضابطه انتخاب متغیر ورودی و خروجی از روی مساله استاندارد
۶۴	تکنیکهای متغیر فرضی یا مصنوعی (Artificial)
۶۴	(A) روش M یا روش جریمه Big M Method
۶۷	(B) روش ۲ فاز یا ۲ مرحله‌ای (Two-Phase Method)
۷۲	حالات خاص در روش سیمپلکس
۷۳	حالت ۱- حالت تباہیدگی
۷۳	تعریف مساله LP تباہیده
۷۷	تعریف دور زدگی (cycling)
۷۹	انواع تباہیدگی
۸۰	بروز اشکال در الگوریتم سیمپلکس در حل مسائل تباہیده
۸۱	حالت ۲ - فضای جواب نامحدود (unbounded feasible space)
۸۸	حالت ۳ - حالت جواب‌های بهینه چندگانه
۹۰	دسته جواب چند گانه با داشتن چند جواب بهینه
۹۱	دسته جواب چند گانه با داشتن یک جواب بهینه
۹۴	حالت ۴ - عدم وجود جواب‌های ممکن یا شدنی Nonexisting feasible solution
۹۸	روش سیمپلکس اصلاح شده Revised simplex
۹۹	مراحل سیمپلکس اصلاح شده برای مسئله بیشینه سازی
۱۰۴	چند الگوریتم روش سیمپلکس
۱۰۵	مساله دوال (دوگان، همزاد، مزدوج، ثانویه، Dual)
۱۰۵	مساله دوال (دوگان، همزاد، مزدوج، ثانویه) در برنامه‌ریزی خطی
۱۱۱	تعیین جواب بهینه مساله اولیه و یا دوال از جدول بهینه Simplex مساله همزاد آن
۱۱۷	تعبیر اقتصادی مساله Dual
۱۱۹	روابط و خصوصیات مهم بین Dual , primal
۱۱۹	رابطه ۱- ثانویه مساله ثانویه، مساله اولیه است
۱۱۹	رابطه ۲- رابطه بین مقادیر تابع هدف ۲ مساله
۱۱۹	قضیه دوالیتی ضعیف
۱۱۹	رابطه ۳- روابط بین جواب‌های مساله که تحت عنوان قضیه Dual مطرح می‌شود
۱۲۰	رابطه ۴ (قضیه کمک مکمل یا رابطه کمکی مازاد Complementary Slackness)
۱۲۳	خصوصیات مهم چهارگانه مسائل اولیه و ثانویه:
۱۲۴	خصوصیت I:
۱۲۴	قضیه دوال
۱۲۵	خصوصیت II:
۱۳۰	خصوصیت III:
۱۳۰	خصوصیت IV:
۱۳۳	کوششی جهت یک تعبیر اقتصادی برای مساله Dual , primal (با ذکر یک مثال)
۱۳۵	تفسیر رابطه کمک مکمل
۱۳۶	لم فارکاس

۱۳۸.....	DUAL SIMPLEX ALGORITHM	روش سیمپلکس ثانویه
۱۳۹.....		مراحل الگوریتم
۱۴۲.....	(CRISS CROSS SIMPLEX)	سیمپلکس ضربدری
۱۴۸.....	(PRIMAL- DUAL) P-D	الگوریتم
۱۴۸.....		گامهای الگوریتم P-D برای مساله پیشینه سازی
۱۵۲.....		روش سیمپلکس برای متغیرهای کراندار (محدود شده)
۱۵۲.....		الف- محدودیت شامل متغیر با کران پایین
۱۵۳.....		ب- محدودیت شامل متغیر با کران بالا (upper bound)
۱۵۶.....		تحلیل حساسیت یا پس بهینگی
۱۵۶.....		I تغییرات گسسته در مقادیر ضرائب
۱۵۷.....		II تغییرات بصورت پارامتری
۱۵۷.....		(I) حالت گسسته
۱۵۸.....		تغییر در C_j ها (تغییر در C_B و تغییر در C_N)
۱۵۸.....		الف تغییر در C_B
۱۵۹.....		ب) تغییر در C_N
۱۶۱.....		تغییر در a_{ij}
۱۶۴.....		اضافه کردن یک متغیر جدید
۱۶۶.....		اضافه کردن یک محدودیت جدید
۱۶۹.....	parametric Linear programming	II تحلیل حساسیت پارامتری
۱۶۹.....		تغییرات خطی در بردار C
۱۷۸.....		بررسی تغییرات خطی در بردار P_0
۱۸۲.....		بررسی تغییرات در بقیه حالت ها
۱۸۴.....	TRANSPORTATION	مسأله حمل و نقل
۱۸۵.....		هدف مسئله حمل و نقل:
۱۸۶.....		مدل متوازن حمل و نقل (با میزان عرضه و تقاضای برابر)
۱۸۶.....		ثانویه مدل فوق
۱۸۷.....		روش حل مسائل حمل و نقل با سیمپلکس حمل و نقل
۱۸۸.....		فاز I: تعیین جواب پایه شدنی یا bfs اولیه (Starting basic feasible Solution)
۱۸۹.....		روش گوشه چپ بالایی برای یافتن جواب اولیه پایه (bfs)
۱۹۳.....		روش تخمین فوگل (VAM) برای یافتن جواب اولیه پایه (bfs)
۱۹۵.....		روش تخمین راسل (RAM) برای یافتن bfs
۲۰۰.....	The Trasportation simplex Method- phase II	فاز II : بهینگی جواب
۲۰۱.....		شرح روش UV یا MODI برای بهینه نمودن جواب اولیه
۲۰۲.....		توضیح در مورد تعیین نحوه حلقه (Loop) گام ۴ برای تعیین متغیر خروجی در روش UV
۲۰۸.....		تحلیل حساسیت برای مسائل حمل و نقل
۲۱۲.....		متغیرهای کران دار در حمل و نقل
۲۱۲.....		وجود نامساوی در محدودیت های حمل و نقل:
۲۱۳.....		-توضیح در مورد حل کامپیوتری مسائل حمل و نقل
۲۱۴.....		مدلهای دیگری از مساله حمل و نقل
۲۱۴.....	TRANS-SHIPMENT MODELLNG	مدل حمل و نقل غیر مستقیم
۲۱۸.....		یافتن مسیر کمترین هزینه با مدل حمل و نقل

۲۱۸.....	مدل تخصیص یا واگذاری (Assignment Problem)
۲۱۹.....	الگوریتم مجارستانی برای حل مسائل تخصیص از نوع کمینه سازی:
۲۲۴.....	حل مسائل واگذاری (تخصیص) با روش حمل و نقل
۲۲۶.....	حل مسئله تخصیص با Lingo
۲۲۷.....	حالت کلی مسئله تخصیص
۲۲۸.....	معرفی نرم افزار برای حل مسائل برنامه ریزی خطی
۲۲۸.....	نمونه کار با Lingo
۲۲۹.....	نمونه کار با MATLAB با دستور linprog
۲۳۱.....	برنامه حل مسئله غیرمتوازن حمل و نقل در محیط Lingo
۲۳۵.....	الگوریتم تجزیه
.....	منابع

مقدمه

اصطلاح تحقیق در عملیات (Operations Research) ظاهراً از فعالیت‌ها و راه‌حل‌هایی ناشی می‌شود که گروهی از دانشمندان انگلیسی در جنگ جهانی دوم در مسائل سوق‌الجیشی و جنگی انجام داده بودند تا مؤثرترین روش استفاده از منابع محدود نظامی را بیابند. بعبارت دیگر اینها به تحقیق در عملیات نظامی جهت بهینه کردن استفاده از آنها پرداخته بودند. این رشته تصمیم‌گیری از آغاز بعنوان رشته‌ای شناخته شده است که اطلاعات علمی را به منظور تعیین بهترین نحوه استفاده از منابع محدود بکار می‌گیرد.

پس از مسائل جنگی موسسات تجاری و صنعتی در صدد استفاده از روش‌های تحقیق در عملیات برآمدند. اولین تکنیک ریاضی که مورد قبول همه در تحقیق عملیات قرار گرفت روش *Simplex* برنامه‌ریزی خطی نام دارد که توسط *G.B. Dantzig* در ۱۹۴۷ ارائه شد. کامپیوترهای دیجیتال در موفقیت روش تحقیق در عملیات (*O.R.*) بسیار مؤثر بودند. اکنون این فعالیت‌ها از کاربردهای تجاری و نظامی و صنعتی فراتر رفته و در بسیاری از رشته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مراحل بررسی تحقیق در عملیات

مراحل عمده‌ای که یک گروه تحقیق در عملیات باید در طرح و اجرای یک بررسی طی کند عبارتند از:

۱- تعریف مسأله ۲- مدل‌سازی ۳- حل مدل ۴- تحقیق درستی مدل ۵- پیاده‌سازی نتایج نهایی

مدل‌سازی

در تحقیق در عملیات ابتدا رفتار سیستم موردبررسی و تحلیل قرار گرفته و مدلی از وضعیت طبیعی آن سیستم ساخته می‌شود.

تعریف مدل

مدل هر سیستم نمایشی انتزاعی از وضعیت سیستم واقعی است که جزییات معینی از سیستم واقعی را در بر دارد.

- مدل توصیفی از یک سیستم برای تسهیل محاسبات و پیش‌بینی است.

- مدل یک سیستم معرف آن سیستم است و به منظور بررسی آن تعریف می شود و همواره با فرض ها، خلاصه سازی ها و ساده سازی همراه است. در اکثر بررسی ها در نظر گرفتن همه جزئیات لازم نیست اما باندازه کافی برای بررسی باید جزئیات را در بر داشته باشد.

سیستم ممکن است از قبل وجود داشته باشد یا اینکه هنوز به مرحله اجرا در نیامده باشد. در حالت اول هدف مدل تحلیل رفتار سیستم به منظور بهبود عملکرد آن است و در حالت دوم هدف مدل عبارت از تعیین بهترین ساختار برای سیستم مورد نظر در آینده است.

پیچیدگی یک سیستم ناشی از بسیاری عناصر (متغیرهایی) است که رفتار آن را کنترل می کنند اما آن بخشی از متغیرها که نقش تعیین کننده مؤثر دارند مد نظرند. از این رو ساده سازی صورت می گیرد.

در ساده سازی سیستم واقعی روی تعیین متغیرهای مؤثر خود روابط حاکم به آن مرکز صورت می گیرد و مدل، که تجریدی از وضعیت دنیای واقعی است، روابط بین این متغیرها را به شکلی که تحلیل پذیر باشد مشخص و ساده می نماید.

انواع مدل

مدلها انواع مختلف دارند که از آن جمله است:

فیزیکی، مصور (*Visual*)، کلامی (*Verbal*)^۱ و ریاضیاتی یا تحلیلی
(جزوه دکتر گاتفرید، ۱۹۷۷ و شبیه سازی دکتر محلولی، ۱۳۷۶)

مدل فیزیکی:

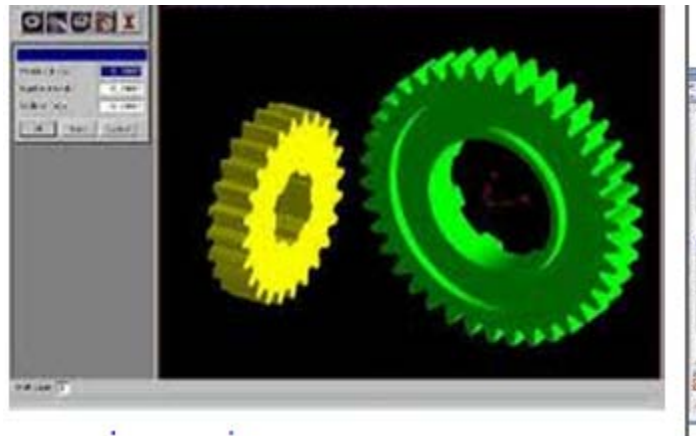
مدل فیزیکی، یک شیء فیزیکی، بامقیاس کوچک است نظیر مدل هواپیما

¹ A verbal model is described with words rather than symbols, graphs, formulas, etc

² Visual modeling is the graphic representation of objects and systems of interest using graphical languages



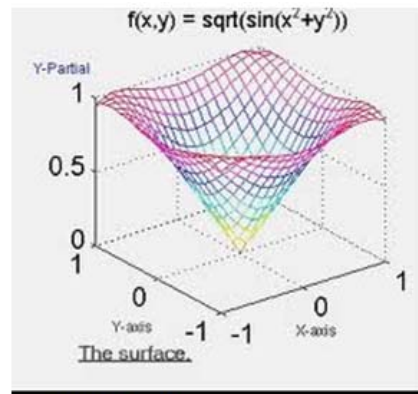
شکل ۱ نمونه یک مدل فیزیکی



شکل ۲ نمونه دیگر از یک مدل فیزیکی

مدل مصور

مدل مصور نمایانده تصویر است. سیستم‌های مورد نظر با استفاده از زبان تصویر توصیف می‌شود. (شکل ۳)

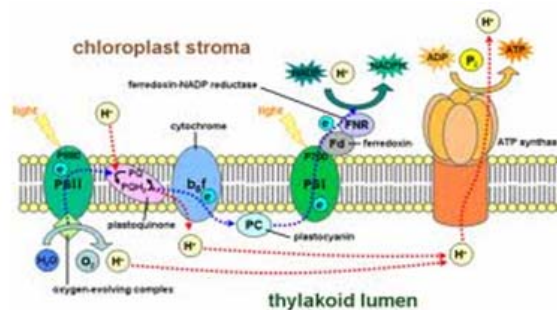


[partialgif3.gif](#)

340 × 317 - A **visual model** of the partial derivative with respect to y.

[archives.math.utk.edu](#)

شکل ۳ یک مدل مصور از مشتق گیری جزئی نسبت به y



[Thylakoid_membrane.png](#)

500 × 285 - Photosynthesis: **Visual Model**. In today's class, the students assembled a new ...

[sjsbiology.blogspot.com](#)

[Similar - More sizes](#)

شکل ۴ یک مدل مصور چرخه فتوسنتز گیاهی (از اینترنت)

مدل کلامی (verbal)

مدل کلامی با کلام یا واژه وضعیت را توصیف می کند تا با علامت، نمودار فرمول و غیره.

مثال با توجه به صورت مسئله زیر کدام یک از ۴ مدل کلامی داده شده صحیح است؟

دانش آموزان کلاس پنجم با معلمان خود به گردش رفتند و رودیه برای هردانش آموز ۲۰۰ تومان و برای هر معلم ۳۰۰ تومان است. معلم ها دوازده نفر

بودند جمع کل ورودیه پرداختی ۴۲۰۰ تومان بود. در زیر کدامیک از اشکال مدل کلامی این مساله را برای یافتن تعداد دانش آموزان نشان می دهد؟

ورودی به هر معلم	×	تعداد معلمان	×	ورودی به دانش آموز	+	تعداد دانش آموزان	=	کل هزینه
ورودی به هر معلم	×	تعداد معلمان	-	ورودی به دانش آموز	×	تعداد دانش آموزان	=	کل هزینه
ورودی به هر معلم	×	تعداد معلمان	+	ورودی به دانش آموز	×	تعداد دانش آموزان	=	کل هزینه
ورودی به هر معلم	×	تعداد معلمان	×	ورودی به دانش آموز	-	تعداد دانش آموزان	=	کل هزینه

شکل ۵ نمونه یک مدل کلامی

مدل ریاضی

مدل ریاضی از علائم و روابط ریاضی برای معرفی سیستم استفاده می کند با تهیه مدل ریاضی بدنبال حل مدل

می باشیم تا شاخص های کارایی مطلوب بدست آید.

شایان ذکر است که مدل شبیه سازی یک سیستم را می توان نوع خاصی از مدل ریاضی سیستم دانست که برای اجراء طراحی شده نه حل. یک اجراء از میان اجراهای مختلف مد نظر قرار می گیرد. عموماً نام تحقیق در عملیات با مدل ریاضی همراه است. در فرموله کردن این نوع مدل چنین فرض می شود که تمام متغیرهای مربوطه کمی بوده و برای بیان رفتار سیستم آنها توسط توابع ریاضی بهم مربوط می شوند سپس جواب مدل از راه محاسبات ریاضی مناسب بدست می آید.

ساختار مدل ریاضی در تحقیق در عملیات

۱- متغیرهای تصمیم گیری **decision variables**: متغیرها مجهولاتی هستند که باید از روی جواب مدل تعیین شوند.

۲- پارامترها

۳- محدودیت‌ها *Constraints*

۴- تابع هدف: تابعی است از متغیرهای تصمیم که اگر کمیتی مطلوب باشد قصد بیشینه‌سازی آن را داریم و اگر کمیتی نامطلوب است قصد کمینه‌سازی آن را داریم. این تابع می‌تواند میزان سود یا هزینه سیستم بصورت تابعی ریاضی از متغیرهای تصمیم‌گیری باشد. مدل‌های ریاضی تحقیق در عملیات را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت

تابع هدف $Z = f(x_1 \dots x_n)$

$$s.t. \quad g_i(x_1 \dots x_n) (\leq, \geq, =) b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

در اکثر سیستم‌های دنیای واقعی قیود نامنفی بودن متغیرهای تصمیم نیز وجود دارد:

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ساده‌سازی یک مدل ریاضی

پس از ساختن یک مدل ریاضی ممکن است ساده کردن آن به منظور سهولت در تحلیل آن ضروری باشد. برخی از ساده‌سازی‌های رایج:

۱- تبدیل متغیرهای گسسته به متغیرهای پیوسته

۲- خطی کردن توابع غیرخطی زیرا توابع غیرخطی مستلزم راه‌حل‌های پیچیده است.

مثلاً اگر داشته باشیم $Z = \max(\min(x_1, x_2, \dots, x_n))$ با فرض $Y = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به صورت زیر خطی می‌شود

$$\max Z = Y$$

$$x_i \geq Y$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

۳- حذف برخی از محدودیت‌های غیرجدی یا کم‌تأثیر

هرچه مدل محدودیت‌های کمتری داشته باشند کارایی آن بیشتر می‌شود.

¹ maximization

² minimization

تقسیم‌بندی مدل‌های ریاضی تحقیق در عملیات

همانطور که متوجه شدید در تحقیق در عملیات از مدل برای برنامه‌ریزی هرچه بهتر سیستم‌های نظامی، صنعتی، تجاری، مدیریتی، اقتصادی، شهرسازی، ساختمانی، حمل‌ونقل،... موجود یا مربوط به آینده استفاده می‌کنیم. مدل‌های برنامه‌ریزی از نظر تقسیم‌بندی ریاضی به چند دسته تقسیم می‌شوند از جمله:

- ۱- برنامه‌ریزی خطی *Linear Programming*
- ۲- برنامه‌ریزی با اعداد صحیح *Integer Prog.*
- ۳- برنامه‌ریزی پویا *Dynamic Prog.*
- ۴- برنامه‌ریزی با متغیرهای از درجه یک بالا (برنامه ریزی غیرخطی) *Non-linear*
- ۵- برنامه ریزی آرمانی *Goal Prog.*

تعریف برنامه‌ریزی خطی و فرم کلی مدل آن^۱
ابتدا توجه خود را به اصطلاح برنامه‌ریزی خطی معطوف می‌نماییم.
در اینجا کلمه برنامه‌ریزی را می‌توان به مفهوم تعیین ارزش متغیرها با توجه به منابع موجود برای مسأله دانست عبارت دیگر برنامه‌ریزی شامل پژوهشی ریاضی در رسیدن به مناسب‌ترین راه حل است.
کلمه خطی دال بر این مطلب است که روابط بین متغیرهای دو مدل مورد نظر از نوع درجه یک می‌باشد.

پس می‌توان گفت:

برنامه‌ریزی خطی عبارت است از یک تکنیک ریاضی جهت تخصیص منابع محدود موجود به بهترین صورت ممکن در حالیکه روابط فیما بین عوامل متغیرها خطی باشد.

فرم کلی مدل برنامه‌ریزی خطی

(ص ۳۷ ترجمه حمدی طه)

یک برنامه‌ریزی خطی ممکن است از نوع بیشینه‌سازی یا کمینه‌سازی باشد. مدل به صورت زیر است.
تابع هدف

$$\text{Min or Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \text{ یا}$$

^۱ از کتاب مرحوم دکتر اصغر پور (۱۳۷۷)

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & (\leq, =, \geq) & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & (\leq, =, \geq) & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \vdots & (\leq, =, \geq) & b_i \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & (\leq, =, \geq) & b_m
 \end{array}$$

با محدودیت‌های

متغیرهای آزاد^۱ در علامت یا $x_j \geq 0$

تعداد محدودیت $i = 1 \dots m \rightarrow$ تعداد متغیر $j = 1 \dots n \rightarrow$

که در آن x_j ها متغیرهای تصمیم‌گیری^۲ آند.

تعداد محدودیت $i = 1 \dots m \rightarrow$ a_{ij}, b_i, c_j

تعداد متغیر $j = 1 \dots n \rightarrow$

ثابت‌هایی هستند که با شناخت جنبه‌های فنی مسئله معین می‌شوند. مثال برای a_{ij} ها (ص ۳۳ دکتر

مهرگان)

واژه‌ها و عناصر اساسی مدل برنامه‌ریزی خطی

واژه	علامت مورد استفاده	مفهوم واژه در قالب یک مسأله تولیدی
فعالیت	-	تولید محصولات مختلف مثلاً انواع B, A

¹ Unrestricted

² Decision variable

متغیرهای تصمیم‌گیری	x_1 . . . x_n	مقدار تولید از هر محصول B, A در دوره زمانی تولید که با x_2, x_1 نمایش داده می‌شوند.
تابع هدف	$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	کل سود ناشی از فروش محصولات B, A (یا مجموع هزینه ناشی از تولید محصولات)
ضرائب متغیرهای تصمیم در تابع هدف صورت مسئله $[c_j]$ ها	$c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$	سود (یا هزینه) ناشی از فروش (یا تولید) هر محصول B, A
اعداد سمت راست در محدودیت‌ها (RHS) ^۱ میزان منابع، ظرفیت‌ها و یا امکانات موجود برای دستیابی به هدف	b_1 : b_m	مواد اولیه، نفر-ساعت، نیروی انسانی، ظرفیت ماشین‌آلات
ضرائب فنی یا تکنولوژیکی	$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}$ $a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}$: $a_{ij} \ \dots$ $a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}$	برای مثال مواد اولیه، میزان کار لازم برای ساخت یک واحد محصول B, A
جواب (solution)	برداری از مقادیری از متغیرهای تصمیم به طوری که همه محدودیت‌ها را ارضا می‌کند.	
جواب شدنی، موجه یا ممکن (feasible)	جوابی که علاوه بر محدودیت‌ها، قیود علامت را ارضا می‌کند.	

¹ Right hand side

جواب بهینه (optimum)	جواب موجهی که تابع هدف را بهینه (بیشینه یا کمینه) می کند.
-------------------------	---

دو مثال ساده برای مدلسازی با برنامه ریزی خطی

مثال ۱ - یک کارگاه ۲ نوع وسیله چوبی کوچک A, B تولید می کند. هر واحد وسیله A ۲۷۰۰۰ تومان بفروش می رسد و ۱۰۰۰۰ تومان ماده اولیه مصرف می کند. هر واحد وسیله A که تولید می شود هزینه های کارگری و بالاسری کارگاه را ۱۴۰۰۰ تومان افزایش میدهد. وسیله B هر قلم ۲۱۰۰۰ تومان ارزش داشته و ۹۰۰۰ تومان ماده خام مصرف می کند هر قلم وسیله B هزینه بالاسری و کارگری را ۱۰۰۰۰ تومان افزایش می دهد. هر وسیله A به ۲ ساعت کار کارگر پرداخت کاری و یک ساعت کار نجاری نیاز دارد و هر قلم وسیله B به یک ساعت کار کارگری پرداخت کاری و یک ساعت کار نجاری نیاز دارد. کارگاه محدودیتی در زمینه ماده اولیه ندارد اما تنها ۱۰۰ ساعت کار پرداخت کاری و ۸۰ ساعت کار نجاری در هفته در اختیار دارد. تقاضا برای وسیله A نامحدود ولی وسیله B حداکثر ۴۰ عدد در هفته بفروش می رسد. مدل تولید این کارگاه را طوری تهیه کنید که سود هفتگی آن بیشینه گردد (وینستون، ۱۹۹۴).

حل : تعداد تولیدی وسیله A در هفته : x_1 تعداد تولیدی وسیله B در هفته : x_2
 $Z = (27000 - 10000 - 14000) x_1 + (21000 - 9000 - 10000) x_2$
 $\text{Max } Z = 3000x_1 + 2000x_2$

محدودیت ساعت نجاری: $1x_1 + 1x_2 \leq 80$

محدودیت ساعت پرداخت کاری : $2x_1 + 1x_2 \leq 100$

محدودیت تقاضا برای وسیله B : $x_2 \leq 40$

محدودیت علامت : $x_1, x_2 \geq 0$

مثال ۲ -

کارگاهی را در نظر بگیرید که ۳ نوع ماشین I، II، III دارد که میتوانند محصولات ۱، ۲، ۳ و ۴ را تولید کنند. از زمان تنظیم ماشین جهت کار روی محصول بعدی صرفنظر می شود. جدول زیر میزان کار لازم هر ماشین روی هر محصولات قطعه را نشان میدهد.

	زمان لازم برای هر محصول (ساعت)				
ماشین	۱	۲	۳	۴	کل زمان سالانه موجود از هر ماشین (ساعت)

۲۰۰۰	۱	۲.۴	۱	۱.۵	I
۸۰۰۰	۳.۵	۱	۵	۱	II
۵۰۰۰	۱	۳.۵	۳	۱.۵	III
	۴.۱۸	۸.۳۴	۷.۳۰	۵.۲۴	سود هر قطعه

مطلوبست مدل تعیین تعداد تولید هر یک از محصولات روی هر ماشین بطوریکه سود هفتگی ماکزیمم گردد.

حل : تعداد محصولی i که روی ماشین j در هفته تولید میشود. x_{ij} $i=1,2,3,4$ $j=I,II,III$

$$\text{تابع هدف} \quad \text{Max } Z = 5.24 \sum_{j=1}^{III} x_{1j} + 7.30 \sum_{j=1}^{III} x_{2j} + 8.34 \sum_{j=1}^{III} x_{3j} + 4.18 \sum_{j=1}^{III} x_{4j}$$

$$1.5x_{1I} + x_{2I} + 2.4x_{3I} + x_{4I} \leq 2000 \quad \text{I محدودیت ماشین نوع}$$

$$x_{1II} + 5x_{2II} + x_{3II} + 3.5x_{4II} \leq 8000 \quad \text{II محدودیت ماشین نوع}$$

$$1.5x_{1III} + 3x_{2III} + 3.5x_{3III} + x_{4III} \leq 5000 \quad \text{III محدودیت ماشین نوع}$$

طرف چپ محدودیت ها تعداد ساعت استفاده از ماشین ها را برای تولید ۴ محصول در هفته نشان می دهد.

$$\text{محدودیت علامت} \quad x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \quad j=I,II,III$$

برای آشنایی بیشتر فصل مدلسازی کتاب حمدی طه مطالعه شود. نمونه هایی از مسائل برنامه ریزی خطی در این کتاب قابل مطالعه می باشد. لازم به ذکر است که برنامه ریزی خطی در بهینه سازی موارد مختلف (درسازه های ساختمانی نظیر خرپا، در نیروگاهها....) کاربرد دارد.

از آنجا که در حل مسائل برنامه ریزی خطی به شکل جدیدی از مسائل نیاز داریم، ذیلاً به تعریف شکل متعارفی و شکل استاندارد می پردازیم.
شکل متعارفی^۱ مسئله برنامه ریزی خطی

ویژگی های فرم متعارفی مسأله چنین است (ترجمه حمدی طه ص ۳۸)

¹ Canonical form

۱- کلیه متغیرهای تصمیم‌گیری غیرمنفی‌اند

۲- همه محدودیت‌ها از نوع $\leq$ ‌اند

۳- تابع هدف از نوع بیشینه‌سازی است. پس برای فرم متعارفی داریم:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

دقت کنید در این فرم مقادیر b_i می‌توانند منفی باشند

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با پنج تبدیل به شکل متعارفی تبدیل نمود.

۱- کمینه‌سازی یک تابع مثل $f(x)$ هم‌ارز است با بیشینه‌سازی منفی این تابع $-f(x)$ مثلاً

$$\text{Min } Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad \text{هم‌ارز است با}$$

$$\text{Max } -Z = -c_1 x_1 - \dots - c_n x_n$$

۲- یک نامساوی در یک جهت ($\leq$ یا $\geq$) می‌تواند از راه ضرب ۲ طرف نامساوی در منفی یک (-1) به

یک نامساوی در جهت مخالف آن تبدیل شود، پس قید خطی $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$ هم‌ارز است با

$$-a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq -b$$

همچنین $-p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq -q$ هم‌ارز است با $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq q$.

۳- بجای یک تساوی می‌توان ۲ نامساوی در ۲ جهت مخالف قرار داد. مثلاً

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \quad \text{هم‌ارز است با ۲ محدودیت همزمان}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b \quad , \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$$

یا

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b \quad , \quad -a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq -b$$

۴- یک محدودیت نامساوی که سمت چپ آن قدر مطلق دارد بدو نامساوی معمولی بدل شود: نا

مساوی $|a_1 x_1 + a_2 x_2| \leq b$ هم‌ارز است با:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq -b \quad , \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$$

هم‌چنین به ازای $q \geq 0$ نامساوی $|p_1 x_1 + p_2 x_2| \geq q$ هم‌ارز است با یکی از ۲ نامساوی

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \geq q \quad \text{یا} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq -q$$

۵- متغیر آزاد (یعنی متغیری که می‌تواند + یا - یا صفر باشد) با تفاضل ۲ متغیر غیرمنفی هم ارز است. لذا اگر x آزاد در علامت باشد بجای آن می‌توان تفاضل دو متغیر غیرمنفی گذاشت. مثلاً:

$$X = X^+ - X^- \quad \text{که در آن } X^+, X^- \text{ متغیرهای غیرمنفی‌اند.}$$

اگر x منفی باشد بجای آن متغیر $-X = X' > 0$ تعریف می‌شود سپس هر جا x دیدیم $-x$ می‌گذاریم.

مثال ص ۴۰ ترجمه حمدی طه

تمرین ۱۷-۲ ص ۴۹ ترجمه حمدی طه

مثال: مطلوب است فرم متعارفی مسأله زیر

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15$$

$$|19x_1 - 7x_2 + 5x_3| \leq 13$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ unrestricted}$$

جهت فرم متعارفی مسأله فوق‌الذکر، اول تبدیل $X_3 = X_4 - X_5$ انجام می‌دهیم

$$\text{Max } -Z = -2x_1 - 3x_2 - 5x_4 + 5x_5$$

sub. to

$$-x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \leq 5$$

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_4 + 9x_5 \leq 15$$

$$+6x_1 - 7x_2 + 9x_4 - 9x_5 \leq -15$$

$$19x_1 - 7x_2 + 5x_4 - 5x_5 \leq 13$$

$$-19x_1 + 7x_2 - 5x_4 + 5x_5 \leq -13$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_4, x_5 \geq 0$$

شکل استاندارد^۱ مسئله برنامه ریزی خطی

ویژگی‌های شکل استاندارد مساله LP چنین است (از: ترجمه حمدی طه)

۱- کلیه محدودیت‌ها به صورت تساوی هستند بجز قیود نا منفی که به صورت نامساوی (≥ 0) باقی می‌ماند.

۲- عنصر سمت راست هر محدودیت (RHS) مقداری غیرمنفی است. پس چنانچه RHS منفی بود طرفین رابطه را در منفی یک ضرب کنید.

۳- همه متغیرها غیرمنفی‌اند پس چنانچه متغیری ≤ 0 یا آزاد بود طبق آنچه که قبلاً گفتیم عمل کنید تا همه متغیرها غیرمنفی شوند.

۴- تابع هدف در شکل استاندارد می‌تواند هم از نوع Max باشد هم از نوع Min

محدودیت‌های نامساوی را با کم یا اضافه کردن متغیرهای کمکی نا منفی به تساوی تبدیل نمایید مثلاً

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 0, s_1 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - s_2 = 0 \quad s_2 \geq 0$$

مثلاً اگر داشته باشیم

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

شکل استاندارد آن با اضافه کردن متغیرهای کمکی $S_1, \dots, S_m$ به محدودیت‌ها بدست می‌آید.

¹Standard form

۲۰

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

مسئله در فرم استاندارد m معادله با $m+n$ مجهول پیدا می‌کند که ∞ جواب دارد باید بدنبال بهترین جواب گشت.

یک مثال ساده

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4$$

$$x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - 3x_4 \leq -2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

فرم استاندارد

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4$$

$$x_2 + x_3 + s_1 = 5$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_4 - s_2 = 2$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4$$

$$s_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$

توجه: اگر در فرم استاندارد تساوی داشته باشیم هیچ متغیر کمکی به آن اضافه یا از آن کم نمی‌شود و عیناً در معادلات می‌آید.

حل ترسیمی مسائل ۲ متغیره در برنامه ریزی خطی

راه حل ترسیمی برای مسائل چند متغیره عملی نیست اما برای حالت ۲ متغیره بکار می‌رود زیرا توانایی توضیح و نمایش مفاهیم اصلی راه حل مسائل چند متغیره را بطور ترسیمی داراست.

مخصوصاً در طریق ترسیمی این قضیه را که جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه

(*Extreme point*) منطقه موجه یا منطقه جواب (*feasible or solution space*) منطبق

است نشان داده می‌شود و نیز نشان داده می‌شود که در هر نقطه گوشه دقیقاً $n-m$ مجهول صفر است.

خلاصه روش ترسیمی

(الف) مشخص کردن ناحیه ی جواب ممکن (شدنی)

گام ۱: در صورتی که متغیرهای تصمیم غیرمنفی باشند فقط ربع اول را در محور مختصات مدنظر قرار دهید در غیراینصورت ربع های مورد نظر را مشخص کنید.

گام ۲: هر محدودیت بصورت نا معادله را با توجه به علامت تساوی آن، بعنوان یک معادله ، بصورت یک خط رسم کنید.

گام ۳: برای رسم قسمت نامعادله محدودیت، یک نقطه را بدلتخواه در یکی از دو طرف خط انتخاب کرده و مختصات آنرا در نا معادله قرار دهید. در صورت صدق، سطح مورد نظر همان سمتی که نقطه انتخابی شما در آن طرف قرار دارد. در صورت عدم صدق سطح سمت دیگر سطح مورد نظر است.

گام ۴: برای تمامی محدودیت ها اینکار را انجام داده و فصل مشترک محدودیت ها (منطقه موجه) را مشخص کنید.

(ب) یافتن جواب بهینه

گام ۵: برای تابع هدف یک مقدار فرضی دلخواه در نظر گرفته و خط مربوطه را رسم کنید. خط را در جهت افزایش Z (در صورتی که هدف Max باشد)، یا کاهش Z (در صورتی که هدف Min باشد)، حرکت دهید. برای تعیین جهت افزایش یا کاهش تابع هدف نیاز مند رسم تابع هدف با دو مقدار دلخواه می باشد که بطور موازی رسم خواهد شد. این جهت را با رسم بردار گرادیان تابع هدف نیز می توان مشخص کرد.

گام ۶) آن نقطه گوشه ای که آخرین نقطه تماس خط تابع هدف حرکت داده شده را در جهت مورد نظر با منطقه موجه نشان میدهد نقطه بهینه است.

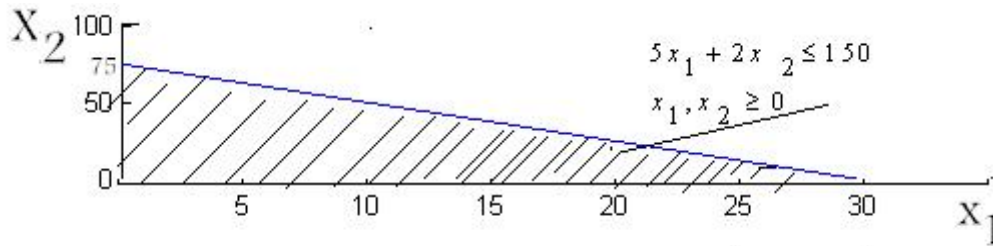
گام ۷) معادلات محدودیت ها یی را که نقطه بهینه از تقاطع آنها تشکیل شده است را پیدا کنید. با حل این دستگاه معادله ، مختصات نقطه بهینه بدست می آید. آنگاه مقدار بهینه تابع هدف (Z^*) را بدست آورید.

$$\text{Max } Z = ۲x_1 + ۲x_2 - ۲۰$$

st

$$۵x_1 + ۲x_2 \leq ۱۵۰$$

$$x_1, x_2 \geq ۰$$



شکل ۶

مثال (ص ۴۲ تا ۴۴ انگلیسی حمیدی طه صفحه ۵۱ تا ۵۳ کتاب فارسی):

► Example 3-2-1

$$\text{Maximize } Z = 4x_1 + 3x_2$$

subject to

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (۱)$$

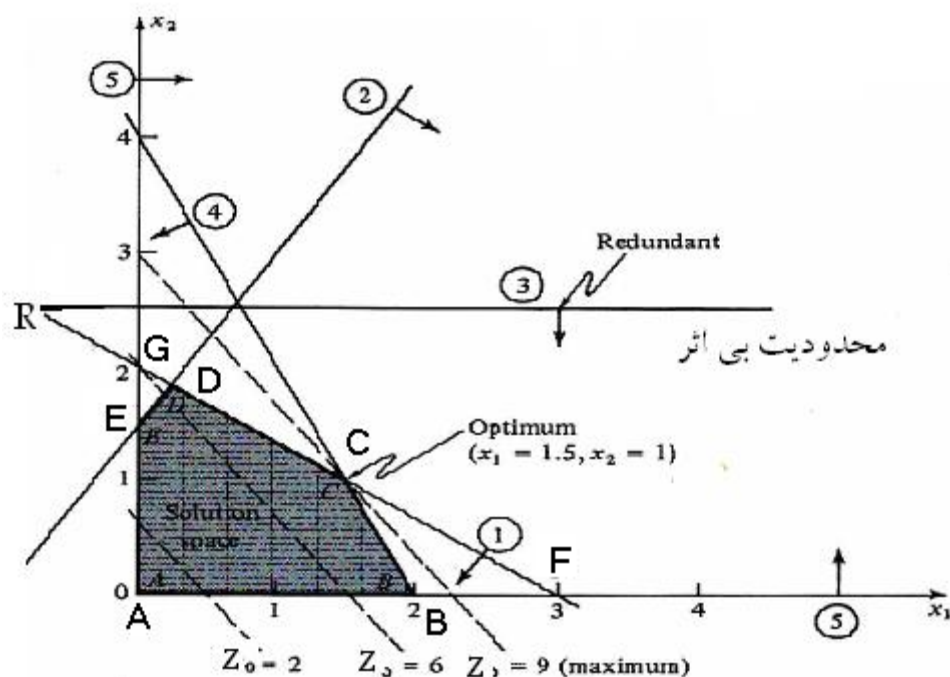
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (۲)$$

$$2x_2 \leq 5 \quad (۳)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (۴)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (۵)$$

نمایش ترسیمی



شکل ۷ (از کتاب حمدی طه شکل ۳-۱)

براساس این شکل، نقطه $C(x_1^*, x_2^*)$ Extreme point نقطه بهینه است. مختصات آن با تلافی دادن ۲ معادله زیر، بدست می آید:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 & x_1 = 1/5 & (x_1^* = 1/5, x_2^* = 1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 1 & Z^* = 4(1/5) + 3(1) = 9 \end{cases}$$

البته اگر تابع هدف چیز دیگری بود نقطه دیگری بدست می آمد. چند تابع هدف با نقطه بهینه آن در جدول زیر

{ صفحه ۴۴ کتاب حمدی طه (۵۲ ترجمه) دیده می شود.

Objective function	Optimum corner point	Optimum solution		Z^*
		x_1^*	x_2^*	
$Z = 10x_1 + x_2$	B	2,	0,	20
$Z = x_1 + 20x_2$	D	3/13,	24/13	483/13
$Z = -4x_1 + 2x_2$	E	0,	3/2	3
$Z = -x_1 - x_2$	A	0,	0,	0

جهت بردار گرادیان تابع هدف $(\nabla Z = \frac{\partial Z}{\partial x_1} i + \frac{\partial Z}{\partial x_2} j = 4i + 3j)$ ، نیز

جهت [بیشترین] افزایش تابع را نشان می دهد.

این مثال نشان می دهد که جستجو برای جواب بهینه به بررسی تنها تعداد متناهی از نقاط گوشه ای از فضای موجه تبدیل می شود. البته در تحقیق در عملیات برای این موضوع یک قضیه وجود دارد.

قضیه:^۱

جواب بهینه مسائل برنامه ریزی خطی بر روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه قرار دارد.

مثال ۲ برای حل ترسیمی

مساله دو متغیره زیر با ناحیه شدنی داده شده در نظر بگیرید

Graphical solution interpretation of **Giapetto** . from Winston(1994)

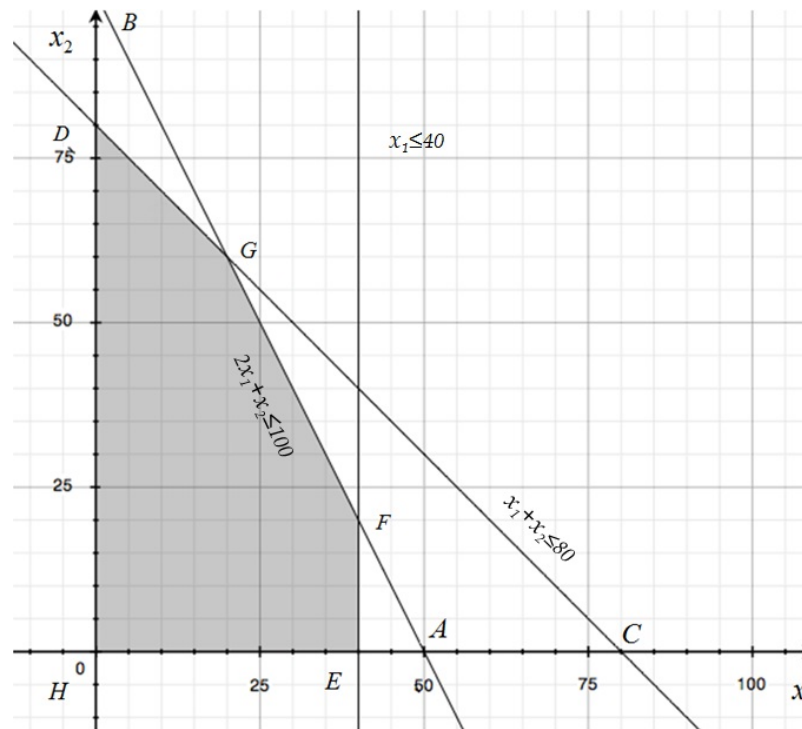
Objective function

$Max Z = 3x_1 + 2x_2$	1
$2x_1 + x_2 \leq 100$	2
$x_1 + x_2 \leq 80$	3
$x_1 \leq 40$	4
$x_1 \geq 0$	5
$x_2 \geq 0$	6

منطقه شدنی مربوطه در شکل ۸^۲ به صورت چند ضلعی HEFGD دیده می شود.

^۱ ص ۴۱ کتاب دکتر مهرگان

^۲ با تشکر از آقای مهندس صادق کاظمی دانشجوی ارشد به خاطر رسم با نرم افزار Grapher

شکل ۸ ناحیه شدنی مثال^۱

اگر نقطه $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ بخواهد در ناحیه شدنی قرار داشته باشد باید در تمام نامساوی‌های دوم تا ششم صدق کند. توجه کنید که بر طبق نامساوی‌های ۵ و ۶ ناحیه شدنی در ربع اول قرار دارد. تمام نقاط زیر یا روی خط AB در نامساوی (۲) صدق می‌کند. نامساوی (۳) بوسیله تمام نقاط روی یا زیر خط CD ارضا می‌شود. تمام نقاط روی یا سمت چپ خط CF در نامساوی (۴) صدق می‌کند. از شکل ۸ متوجه می‌شویم که مجموعه نقاطی از ربع اول که در محدودیت‌ها صدق می‌کنند نقاط داخل یا روی محیط چند ضلعی DGFEH است بعد از مشخص کردن ناحیه شدنی، بدنبال نقطه‌ای از ناحیه می‌گردیم که بیشترین مقدار $Z = 3x_1 + 2x_2$ را بخود اختصاص دهد.

ابتدا ما به دلخواه مقداری به Z اختصاص می‌دهیم برای اینکه جواب بهینه بیابیم، باید خطی رسم نمائیم که تمام نقاط روی آن یک مقدار Z داشته باشد (خطوط هم تراز). در یک مساله بیشینه سازی یک چنین خطی خط هم سود و در یک مساله کمینه سازی خط هم هزینه نیز نامیده شده است. برای رسم یک خط هم تراز یک نقطه در ناحیه شدنی گرفته مقدار Z را برای آن حساب کنید. ما نقطه $(x_1=20, x_2=0)$ را انتخاب می‌کنیم. Z آن $3(20) + 2(0) = 60$ می‌شود. از آنجا که تمام خطوط هم تراز دارای

^۱ با تشکر از آقای مهندس صادق کاظمی دانشجوی ارشد بخاطر رسم مجدد شکل (با نرم افزار Grapher)

شیب یکسانند پس وقتی یک خط هم تراز را رسم کردیم تمام خطوط هم تراز را با حرکت دادن به موازات آن خط می توان پیدا کرد.

اکنون مشخص است چگونه جواب یک مساله ۲ متغیره را می توان یافت. پس از رسم یک خط هم تراز، خط را در جهت افزایش Z (در مساله بیشینه سازی) حرکت دهید تا جایی برسید که بعد از یک نقطه، دیگر این خط هم تراز ناحیه شدنی را قطع نکند آخرین خط هم تراز (هم سود) آن که با ناحیه شدنی دارد مشخص کننده بیشترین مقدار Z و جواب بهینه در مساله بیشینه سازی است. در مساله بیشینه سازی فوق تابع هدف $Z=3x_1+2x_2$ وقتی زیاد می شود که x_2, x_1 زیاد شوند. لذا خطوط دیگر هم سود را با حرکت به موازات $3x_1+2x_2=60$ در جهت شمال شرق می سازیم. از شکل ۸. در می یابیم که خط هم تراز که از نقطه G می گذرد آخرین خط هم تراز است که ناحیه شدنی را قطع می کند. لذا نقطه ای است که در ناحیه شدنی با بیشترین مقدار Z را دارد. لذا جواب بهینه مساله $Giapto$ است توجه کنید G محل تقاطع خطوط $2x_1+x_2=100$ و $x_1+x_2=80$ است یعنی نقطه $x_1^*=20, x_2^*=60$ یا $Z^*=3(20)+2(60)=180$.

شرح الگوریتم *simplex*

ص ۵۴ کتاب ترجمه بازرگان

الگوریتم *simplex* مبتنی بر نقاط اکستریم شدنی و شکل استاندارد است که قبلاً معرفی شد.

این بخش، طی ۳ قسمت بصورت جبری توضیح داده می شود.

در قسمت ۱ نشان داده می شود که چگونه فضای جواب (موجه) به وسیله معادلات شکل استاندارد نمایش داده می شود.

در قسمت ۲ تعیین نقاط اکستریم شدنی از روی فرم استاندارد بیان میشود و

در قسمت ۳ شرایطی بیان می شوند که بر طبق آنها روش *simplex* جواب بهینه را تنها با تعیین انتخابی بعضی از نقاط اکستریم موجه بدست می دهد.

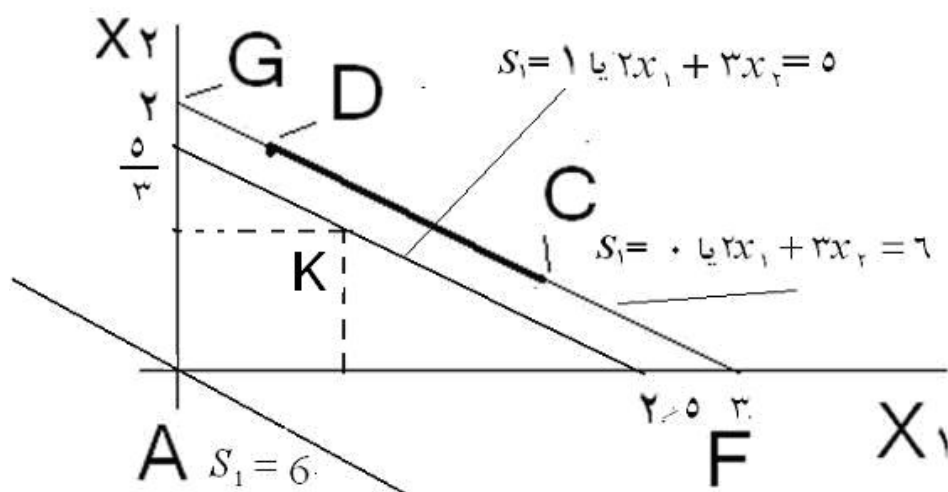
نمایش فضای جواب به کمک شکل استاندارد

برای انتقال از نمایش ترسیمی به نمایش جبری مثال زیر را در نظر بگیرید. که قبلاً در شکل ۷ بطور ترسیمی رسم شد (مثال ۱).

مثال (۳-۳-۱ کتاب)

فرم استاندارد مثال ۱ چنین است (ص ۴۵ حمدی طه و ص ۵۱-۵۲ ترجمه)

برسد.



شکل ۹

و برای $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0$ تعبیرات مشابهی می‌توان نمود.

هر نقطه از فضای موجه را می‌توان برحسب متغیرهای کمکی معمولاً دقیقاً نمایش داد مثلاً نقطه داخلی K با مختصات $x_1 = 1, x_2 = 1$ با

$$S_1=1, S_2=4 \text{ (A)}$$

$$S_2=4, S_4=1 (\forall$$

$$S_1=1, S_3=3(3$$

$$S_3 = 3(4 S_4 = 1 ,$$

$S_1 = 1, S_2 = 4(5)$ قابل نمایش دادن است.

در نتیجه نقاط فضای موجه بطور جبری از روی مقادیر مختلف برای متغیرهای کمکی یعنی S_i ها قابل نمایش است.

تعیین جبری نقاط اکستریم

گفته شد که جواب بهینه باید در یک نقطه اکستریم از فضای جواب قرار داشته باشد. مثال ۳-۳-۱ نشان می‌دهد که فضای موجه مسأله (ناحیه $ABCDE$ شکل ۷ صفحه ۴۳ $H.T$ یا ص ۵۲ ترجمه) توسط معادلات ۱ تا ۴ و قیود غیرمنفی بودن قابل نمایش است. با کنار گذاشتن قیود غیرمنفی دستگاه به چهار معادله ۶ مجهولی تبدیل می‌شود (قیود غیرمنفی با در نظر گرفتن جواب‌های غیرمنفی معادلات ۱ تا ۴ بطور ضمنی به حساب آورده خواهد شد). مقادیر متغیرها در نقاط گوشه فضای شدنی شکل ۷ بر اساس معادلات فرم استاندارد چنین است:

نقطه اکستریم	A	B	C	D	E
متغیرهای پایه	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$s_1 = 0$	$s_1 = 0$	$x_1 = 0$
	$x_2 = 0$	$s_2 = 0$	$s_2 = 0$	$s_2 = 0$	$s_2 = 0$
بقیه متغیرها (متغیرهای غیر پایه)	$s_1 = 6$	$x_1 = 2$	$x_1 = 1.5$	$x_1 =$	$x_2 = 1.5$
	$s_2 = 3$	$s_1 = 2$	$x_2 = 1$	$x_2 =$	$s_1 = 1.5$
	$s_3 = 5$	$s_2 = 9$	$s_2 = 0.5$	$s_2 =$	$s_3 = 2$
	$s_4 = 4$	$s_3 = 5$	$s_3 = 3$	$s_4 =$	$s_4 = 2.5$

بعنوان تمرین مختصات نقطه D را بدست آورید.

در هر نقطه اکستریم فضای جواب این مسئله یعنی چند وجهی $ABCDF$ دقیقاً $n-m=6-4=2$ متغیر از ۶ متغیر صفر می‌باشد و این خاصیت منحصر بفرد نقاط اکستریم است.

به آسانی دریافت میشود که در شکل ۷

در کل نقاط DE $s_2 = 0$

در کل نقاط CD $s_1 = 0$

در کل نقاط BC $s_3 = 0$

در این مثال در هر نقطه غیر اکستریم یا هیچ متغیری صفر نیست و یا حداکثر یک متغیر برابر صفر است. برای مثال در نقطه وسط خط DE شکل ۷ $S_2=0$ و نقطه درونی $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}$ متغیر صفر ندارد زیرا از معادلات فرم استاندارد برای این نقطه $S_1=1, S_2=0, S_3=3, S_4=4$ بدست می آید.

پس با مساوی قرار دادن همزمان $2=4-6=-m-n$ متغیر در شکل استاندارد نقاط *Extreme* قابل تعیین است. برای مثال با صفر قراردادن $X_2=S_4=0$ معادلات ۱ تا ۴ شکل استاندارد به ۴ معادله چهار مجهولی زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} 2x_1 + s_1 = 6 \\ -3x_1 + s_2 = 3 \\ + s_3 = 5 \\ 2x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ s_1 = 2 \\ s_2 = 9 \\ s_3 = 5 \end{cases}$$

که همراه با $X_2=0, S_4=0$ معرف نقطه B در شکل ۷ است.

البته اگر در معادلات صفحه ۲۱ مثلاً ۲ متغیر S_3, S_1 را همزمان صفر قرار دهیم دستگاه زیر بدست می آید که بعلت منفی بودن جواب برای X_1 قابل قبول نیست و لذا معرف هیچ نقطه از نقاط اکستریم شدنی و بلکه فضای شدنی یا موجه (*feasible*) نمی باشد.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + s_2 = 3 \\ 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + s_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -0.75 < 0 \text{ i.e. infeasible}$$

$X_1 = -0.75$ به همراه $X_2=2.5$ معرف نقطه R در شکل ۷ است که خارج از فضای شدنی است. جوابی که مطابق روش فوق بدست می آید جواب پایه‌ای (*Basic Solution*) برای دستگاه m معادله n مجهولی شکل استاندارد نامیده می شود و ممکن است شدنی یا غیر شدنی باشد.

طریقه یافتن جواب پایه‌ای

جواب پایه‌ای برای دستگاه خطی m معادله با n مجهول با صفر قرار دادن $n-m$ متغیر و سپس حل معادلات حاصل برحسب m مجهول باقیمانده معین می شود، با این شرط که جواب حاصل منحصر بفرد باشد^۱. بعبارت دیگر مقادیر سایر متغیرها منحصر بفرد باشد و این در صورتی خواهد بود

^۱ providing the solution is unique

۳۰

که ستون‌های m متغیر باقی‌مانده بطور خطی مستقل باشند. در این حالت $n-m$ متغیر صفر را متغیرهای غیرپایه‌ای و m متغیر باقی‌مانده را متغیرهای پایه‌ای می‌نامند. اگر در جواب حاصل تمام متغیرهای پایه‌ای غیرمنفی باشند آن جواب یک جواب پایه‌ای شدنی (ممکن یا موجه) نامیده می‌شود در غیراین صورت یک جواب پایه‌ای غیر شدنی (*infeasible*) است.

لذا یک نقطه شدنی اکستریم توسط یک جواب پایه‌ای شدنی مشخص می‌شود. لازم بذکر است که برخی از دستگاه‌های m معادله با m مجهول جواب پایه ندارند:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

دستگاه جواب ندارد.

۶ صفحه

IE2001 OR (Pittsburgh University)

ویژگی‌های اساسی (fundamental properties)

نقاط گوشه‌ای شدنی (*feasible extreme points*) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بوسیله جواب‌های پایه‌ای شدنی پایه (bfs= basic feasible solutions) مشخص می‌شود. پس تعریف هندسی نقاط گوشه‌ای فضای شدنی با صورت جبری جواب پایه‌ای شدنی برابری دارد.

برقراری شرائط شدنی بودن (feasibility) و بهینگی (optimality) در روش سیمپلکس

یک راه یافتن جواب بهینه این است که تعداد $\binom{n}{n-m}$ ^۱ و یا $\binom{n}{m}$ دستگاه معادله را حل کرده و هر جوابی که تابع هدف را بهینه نمود بعنوان جواب بهینه برگزینیم اما این روش کارائی ندارد. زیرا اولاً ممکن است تعداد جواب‌های پایه‌ای خیلی زیاد باشد و ثانیاً بسیاری از این جواب‌ها شدنی نیستند. ثالثاً تابع هدف در محاسبه جواب‌ها نقشی ندارد و تنها زمانی از آن استفاده می‌شود که همه جواب‌ها معین شده باشد.

ایجاد ۲ شرط زیر از نارسائی‌های فوق جلوگیری می‌کند و در عمل از یک جواب شدنی پایه‌ای شروع سپس از طریق یک رشته از جواب‌های شدنی پایه‌ای (غیرتکراری *non-redundant*) طوری حرکت می‌کند که تابع هدف بهتر شود.

- ۱- شرط بهینگی: جهت تضمین اینکه هیچ‌گاه با جواب‌های بدتر روبرو نشویم.
- ۲- شرط شدنی بودن: جهت تضمین اینکه با شروع از یک جواب پایه‌ای شدنی تنها با جواب‌های شدنی پایه‌ای مواجه شویم.

جدول سیمپلکس

جهت کمک به ایجاد ۲ شرط فوق شکل استاندارد با توجه به فرم ماتریسی آن به صورت جدول خاصی ارائه می‌شود.

در مثال ۱ قبلی (مثال ۳-۳-۱ کتاب حمدی طه)

(

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } Z - 4x_1 - 3x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 & = & 0 \\ 0Z + 2x_1 + 3x_2 + S_1 & = & 6 \\ 0Z - 3x_1 + 2x_2 + S_2 & = & 3 \\ 0Z + 0x_1 + 2x_2 + S_3 & = & 5 \\ 0Z + 2x_1 + x_2 + S_4 & = & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

در شروع مقدار ۲ متغیر x_1, x_2 را صفر را در نظر بگیرد (متغیرهای غیرپایه‌ای)

^۱ متذکر می‌شود ترکیب $\binom{n}{n-m}$ حداکثر تعداد جواب پایه‌ای را بدست می‌دهد بعضی از این تعداد وجود ندارد از تعدادی که وجود دارند، همه شدنی نیستند.

لذا x_1, x_2 متغیرهای غیرپایه‌ای می‌شوند و S_1, S_2, S_3, S_4 متغیرهای پایه شده و مقادیر آنها برابر مقادیر سمت راست رابطه می‌شود. جدول سیمپلکس چنین می‌شود.

معادله مربوط به	نسبت	$\frac{R}{H}$ S	S_4	S_3	S_2	S_1	x_2	x_1 ↓	Z	
سطر Z	$\frac{6}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰	-۳	-۴	۱	Z
محدودیت اول		۶	۰	۰	۰	۱	۳	۲	۰	S_1
محدودیت دوم		۳	۰	۰	۱	۰	۲	-۳	۰	S_2
محدودیت سوم		۵	۰	۱	۰	۰	۲	۰	۰	S_3
محدودیت چهارم	$\frac{4}{2}$	۴	۱	۰	۰	۰	۱	۲	۰	S_4

جدول سیمپلکس فوق مختصات نقطه مبدأ از فضای جواب را بعنوان اولین جواب پایه شدنی (موجه) می‌دهد. بطور کلی در روش *Simplex* طی چندین تکرار با حرکت از مبدأ مختصات جهت بهبود مقدار تابع هدف مرتباً به $n-m$ متغیر مقدار صفر اختصاص می‌یابد و جواب جدید بدست می‌آورد تا جواب بهینه حاصل شود.

خلاصه کلیات روش سیمپلکس

دستگاه‌های معادلات در جستجوی مجموعه‌ای از جواب‌های پایه‌ای شدنی پی‌درپی حل می‌شود بطوری‌که جواب پایه موجه یا شدنی جدید از جواب قبلی بهتر باشد تا سرانجام یک جواب بهینه بدست آید. با تبدیل یکی از متغیرهای غیرپایه به پایه (متغیر ورودی) در مقابل تبدیل یک متغیر پایه به غیرپایه (متغیر خروجی) می‌توان از جواب پایه شدنی فعلی به یک جواب پایه موجه جدید رسید. تنها تفاوت دو جواب پایه شدنی مجاور در تعویض یک متغیر از متغیرهای پایه آن با متغیری غیرپایه است.

در مثال فوق، چون در شروع x_1, x_2 مساوی صفر قرار داده شد، متغیرهای کمکی به عنوان متغیر پایه انتخاب شده و از آنجا هر معادله خط شامل تنها یک متغیر کمکی با ضریب ۱ است. مقدار هر متغیر کمکی برابر عدد ثابت طرف راست معادلات (*RHS*) است.

ادامه روش سیمپلکس برای یک مساله بیشینه سازی چنین است که متغیری را پیدا می‌کنیم که بجای یک متغیر پایه قبلی جایگزین شود. فرض کنید جدول زیر در اختیار است:

تابلوی عمومی سیمپلکس								
RHS (ارزش Z و X_B)	x_n	...	x_j	...	x_2	x_1	Z	
$Z = y_{..}$	$y_{.n}$	...	$y_{.j}$	...	$y_{.2}$	$y_{.1}$	۱	Z

x_{B1}	*	y_{11}	y_{12}	...		...	y_{1n}	$y_{1.}$
x_{B2}	*			...		...		$y_{2.}$
				...		...		
x_{Bi}	*	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{in}	$y_{i.}$
				...		...		
x_{Bm}	*	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mj}	...	y_{mn}	$y_{m.}$

پس از تهیه اولین جدول باید متغیر ورودی به پایه و متغیر خروجی از پایه مشخص شود و جدول جدید اصلاح شده تهیه گردد.

ضابطه انتخاب متغیر ورودی (entering variable)

ضابطه انتخاب متغیر ورودی جدید به پایه در مسئله بیشینه سازی این است که کوچکترین ضریب منفی را داشته باشد زیرا احتمالاً بیشترین بهبود را در تابع هدف بوجود می آورد. پس در مسأله فوق x_1 متغیر ورودی است. به عبارت دیگر $\min(y_{0j} \quad j = 1, 2, \dots, n)$ را بیابید شماره این مینیمم را با $j=k$ مشخص کنید. اگر $y_{.k} \geq 0$ متوقف شوید وگرنه x_k متغیر ورودی است همانطور که بعداً خواهیم دید اینکار شرط موسوم به بهینگی را ارضا خواهد کرد.

ضابطه انتخاب متغیر خروجی (leaving or exiting variable)

ضابطه انتخاب متغیر خروجی از پایه فعلی چنین است: مینیمم حاصل تقسیم های

$$\frac{y_{i0}}{y_{ik}} = \frac{(RHS)_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0, i = 1, \dots, m$$

به این ردیف متغیر خروجی است.

در مسأله فوق $\min\left(\frac{6}{2}, \frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2}$ که متعلق به S_4 است. پس S_4 خارج می شود و x_1 جای آنرا می گیرد (با اینکار شرط موسوم به شدنی بودن تأمین شده است).

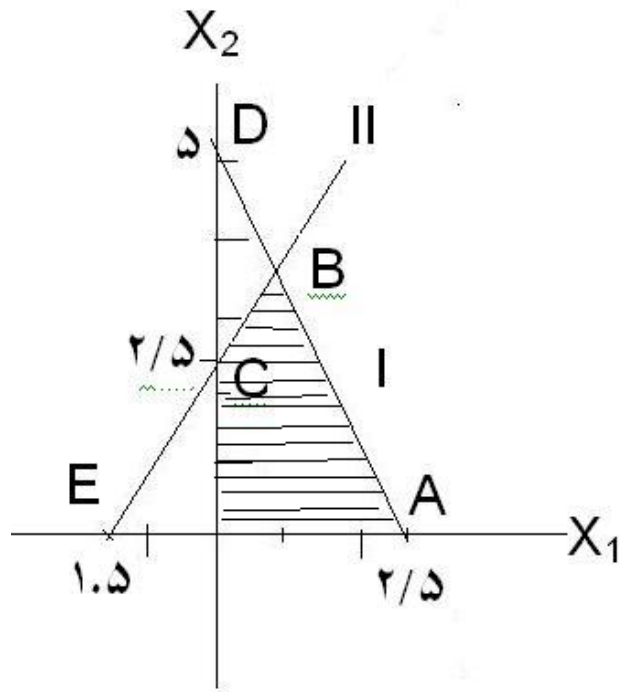
توضیح هندسی شرط شدنی بودن (داشتن حداقل نسبت)

مثال 1

۳۴

$$\text{Max} Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} I & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ II & -4x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$



شکل ناحیه شدنی مثال

$$\text{Max} Z - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + S_1 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + S_2 = 6 \end{cases}$$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
Z		-3	-4			0	نسبت
S_1			1			5	$\frac{5}{1}$
S_2			2			6	$\frac{6}{2}$

x_2 منفی ترین ضریب در سطر صفر را دارد پس x_2 ورودی است و $x_1=0$ باقی می ماند.

پس در ادامه حل روی محور عمودی ($x_1=0$) حرکت می کنیم.

اگر x_2 را جای S_1 قرار دهیم یا جای S_2 بعبارت خروجی کدام باشد؟

اگر x_2 جای S_2 قرار دهیم پس S_2 از پایه خارج می شود و مقدار S_2 صفر می شود

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ S_2 = 0 \end{array} \right. \Leftarrow \text{دستگاه جواب} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{6}{1} \\ Z = 24 \end{array} \right. \text{را خواهد داد.}$$

که مبین نقطه D است که در فضای شدنی نیست

$$\text{اگر } x_2 \text{ جای } S_1 \text{ قرار گیرد } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ S_1 = 0 \end{array} \right. \Leftarrow \text{دستگاه} \left\{ \begin{array}{l} Z = 5 \times 4 = 20 \\ x_2 = \frac{5}{1} \end{array} \right. \text{ که مبین نقطه C است}$$

و شدنی است. C را باید برگزید یا D را؟

C را. (چرا؟). هم این است که می گوییم min نسبت متعلق به هر کدام از متغیرهای پایه

بود آن خروجی است در اینجا متعلق به S_1 است پس S_1 خروجی است.

جدول بعد

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2
Z					
S_1					
S_2					

مقدار Z از دستگاه $Z=4 \times 5=20$ بدست می آید.

توجه

خواهید دید که کمترین نسبت در جدول بعدی مقدار متغیر جدید ورودی به پایه

می شود.

چرا منفی و صفر در نظر گرفته نمی شود توضیح با یک مثال

مثال ۲

$$Max Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + S_1 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + S_2 = 6 \end{array} \right.$$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
Z		-3	-2			0	نسبت

S_1		2	5	$\frac{5}{2} = 2.5$
S_2		-4	6	

X_1 منفی ترین ضریب را در سطر صفر دارد پس ورودی است.

$X_2 = 0$ باقی می ماند چون در پایه نیست.

در ادامه روی محور افقی باید حرکت کنیم.

X_2 متغیر ورودی است جای S_1 قرار گیرد یا جای S_2 ؟

فرض کنید S_2 را از پایه خارج کنیم اگر x_2 جای S_2 در پایه قرار گیرد $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ S_2 = 0 \end{cases}$

دستگاه $\begin{cases} Z = -4/5 \\ x_1 = -1/5 = \frac{6}{-4} \end{cases}$ یعنی نقطه بعدی در ادامه حل E باشد که شدنی نیست.

اگر x_2 جای S_1 در پایه قرار گیرد $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ S_1 = 0 \end{cases}$ دستگاه $\begin{cases} z = 7.5 \\ x_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$ یعنی نقطه بعدی در ادامه

حل A باشد که جوابی شدنی است.

E یا A؟ A (چرا؟) E متناظر با یک ضریب منفی است

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
Z							نسبت
X_2							
S_2							

برای اینکه ببینید چرا ضریب صفر را در تعیین حداقل نسبت دخالت نمی دهیم تمرین زیر را حل کنید.

تمرین: مسأله زیر را استاندارد کرده اولین جدول آنرا نوشته و متغیرهای جدول دوم را تعیین کنید.

$$\text{Max} Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$0x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

تعریف عنصر لولا و سطر لولا

عنصر محل تلاقی ستون متغیر ورودی و سطر متغیر خروجی عنصر لولا و سطری که در آن این عنصر قرار دارد سطر لولا نامیده می شود.

تعبیر هندسی انتخاب متغیر خروجی با توجه شکل ۱۰

از مبدأ به نقطه دیگر باید برویم فرض کنید تصمیم گرفته ایم که x_2 صفر باقی بماند پس باید نقطه بعدی نقطه ای روی محور x_1 باشد و مقدار آن مثبت باشد. همان طور که شکل ۱۰ نشان می دهد تنها محدودیت های ۱ و ۴ قسمت غیرمنفی محور x_1 را قطع می کند و این نتیجه را مستقیماً می توان از روی جدول مشخص نمود. زیرا در جدول در زیرستون x_1 محدودیت های ۱ و ۴ هر دو دارای ضریب مثبت اند. نتیجه کلی این است که اگر ضریب متغیر ورودی در محدودیت منفی یا صفر باشد معادله آن محدودیت، قسمت غیرمنفی محور معرف متغیر ورودی را قطع نمی کند در نتیجه در شرط شدنی بودن دخالت داده نخواهد شد. شکل ۱۰ نشان می دهد که محل برخورد محدودیت های ۱ و ۴ با قسمت غیرمنفی محور x_1 مطابق زیر بدست می آید.

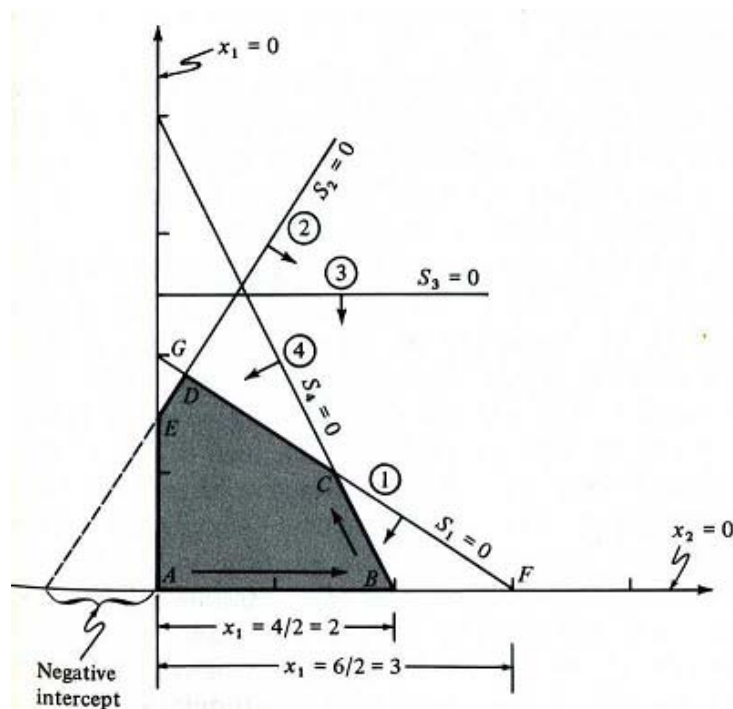


Figure 3-2

شکل ۱۰ (۳-۲ ص ۶۰ کتاب $H.T$ حمدی طه)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 0 = 6 \Rightarrow (x_1)_F = AF = \frac{6}{2} = 3 & (S_1 = .) \\ (2x_1 + 0 = 4), x_2 = 0 \Rightarrow (x_1)_B = AB = \frac{4}{2} & (S_4 = .) \end{cases}$$

. از مبدأ به نقطه اکستریم بعدی روی محور x_1 یعنی نقطه B باید برویم.

در این نقطه AB کوچکتر از AF است از طرفی چون متغیر پایه‌ای فعلی S_4 (وابسته به محدودیت ۴) در نقطه B که دارای مقدار صفر است پس S_4 متغیر خروجی است و باید جزو متغیرهای غیرپایه واقع شود.

حال می‌خواهیم معادلات مسئله استاندارد شامل ۶ متغیر و ۴ محدودیت را طوری با عملیات ردیفی تغییر دهیم. در هر معادله تنها یک بار متغیر پایه جدید (x_1, S_1, S_2, S_3) ظاهر شود بطوریکه اگر مقدار متغیرهای غیر پایه (S_4, x_2) را صفر قرار دهیم مقادیر ۴ متغیر پایه‌ای براحتی بدست می‌آید معادلات با عملیات ERO به صورت زیر تغییر می‌کند. شکل ۱۱ فلوچارت روش $simplex$ برای مسأله پیشنهادی سازی است

هر تکرار نشان دهنده یک نقطه گوشه شدنی است

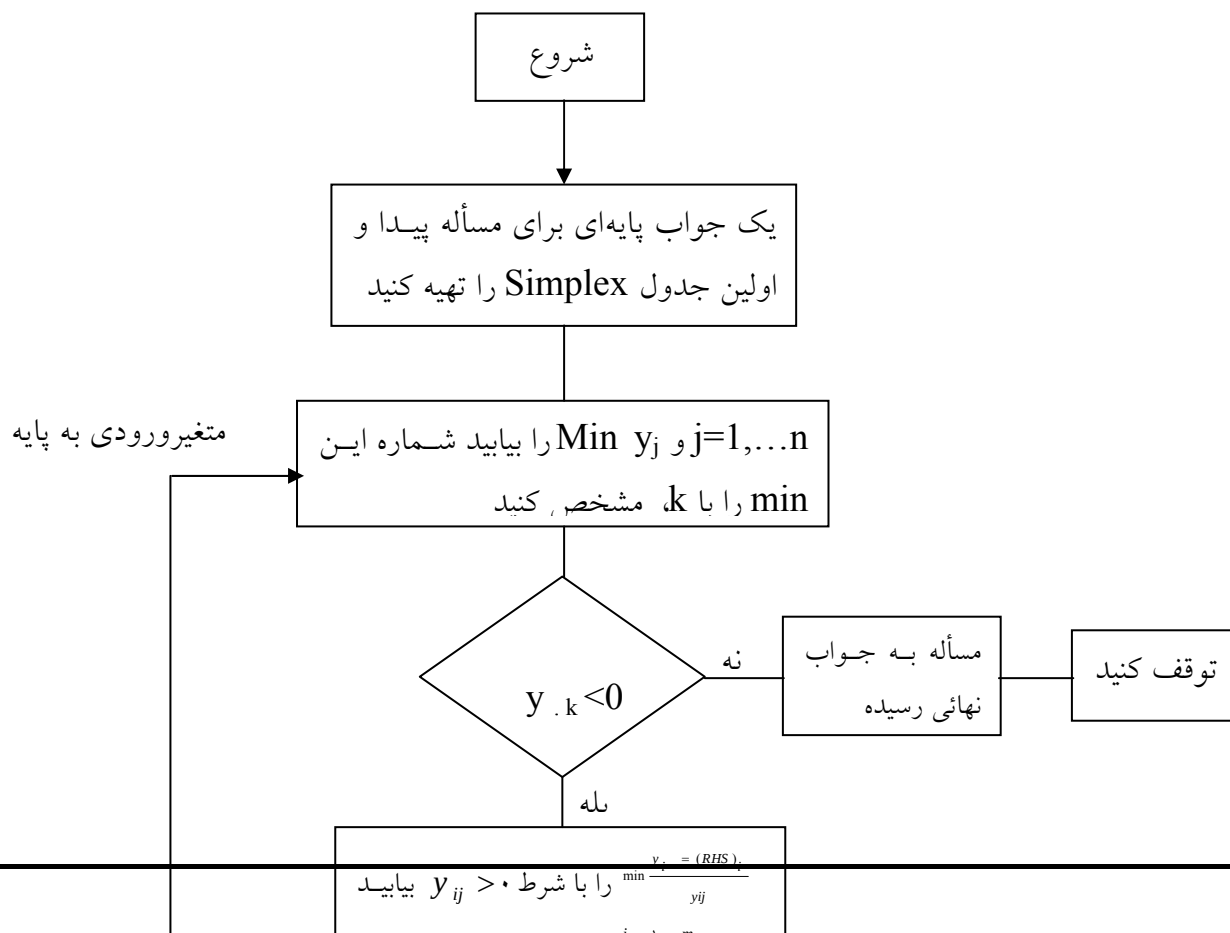
مختصری از عملیات گاس - جردن (عملیات ردیفی ERO)^۱

۳ عمل بسیار متداول و مفید که از جمله در حل دستگاه‌های معادلات، تهیه معکوس ماتریس و روش $Simplex$ کاربرد دارد عبارتند از:

- ۱- ضرب یک سطر در یک عدد غیر صفر (ضرب کردن طرفین یک معادله در یک عدد غیر صفر)
- ۲- جابجا کردن ۲ سطر (جابجا کردن ۲ معادله)
- ۳- ضرب یک سطر دیگر در عدد غیر صفر و جمع آن با سطر مورد نظر (جمع طرفین معادله نام یا ضربی $(\neq 0)$ از معادله دیگر و قرار دادن بجای معادله نام)

¹ Elementary Row operations

حل دستگاه معادلات $[A|b]$ به کمک عملیات گاس - جردن
 عملیات *ERO* فوق می تواند بر روی یک دستگاه معادلات صورت گیرد و هیچ گونه تغییری در جواب
 دستگاه پیش نیاید بعبارت دیگر جواب دستگاه $[A'|b']$ حاصل از اعمال *ERO* یا $[A|b]$ یکی
 است



شکل ۱۱ (از کتاب مرحوم دکتر اصغر پور)

مثالهایی برای عملیات ERO

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\div 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -8y = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -8y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0.125x - 0.125y = 0.125 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0.125x - 0.125y = 0.125 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 0.125y = 1 + \frac{1}{8} \\ 0.125x + y = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \end{array} \right)$$

تهیه معکوس ماتریس به کمک عملیات سطری

یک راه بدست آوردن معکوس ماتریس مربع چنین است

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I_{m \times m} \end{array} \right] \xrightarrow{ERO} \left[\begin{array}{c|c} I_{m \times m} & B^{-1} \end{array} \right] \Rightarrow B^{-1} \text{ معکوس ماتریس } B \text{ است}$$

مثال

$$B | I \Rightarrow I | B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 & 0 \\ 1 & 5 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & | & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{4}{33} + \frac{1}{3} & -\frac{12}{33} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

مثالی دیگر برای حل دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9/5 \\ x_2 = 1/5 \end{cases}$$

می‌توان قدم‌های فوق را بطور سیستماتیک روی ماتریس اعمال کرد که

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 1/5 \end{array} \right)$$

توجه کنید که عملیات سطری طوری انجام شود که یا روی خود سطر موردنظر انجام شود یا ترکیبی از آن سطر و سطر لولا بجای سطر مورد نظر قرار گیرد.

مثال ص ۱۲۷-۱۲۹ کتاب مرحوم دکتر اصغر پور

مسئله پیشنهادی زیر را در نظر بگیرید

جدول ۱								
	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	RHS	
Z	-۲۰	-۲۲	-۲۹	۰	۰	۰	۰	نسبت
S ₁	۱	۱	۲	۱	۰	۰	۱۲۰۰	$\frac{1200}{2} = 600$
S ₂	۲	۱	۱	۰	۱	۰	۱۵۰۰	$\frac{1500}{1} = 1500$
S ₃	۰	۱	۵	۰	۰	۱	۱۶۰۰	$\frac{1600}{5} = 320$

این جدول که نمایشگر شرایط مبدا مختصات (یکی از رئوس ناحیه شدنی) برای مسئله است اولین

جواب پایه‌ای و شدنی می‌باشد. انتقال را از اینجا به سمت سایر رئوس ناحیه شدنی شروع می‌کنیم.

از آنجائیکه در این جدول منفی ترین $z_j - c_j$ ، -۲۹ می‌باشد، x_3 متغیر ورودی است که با پیکان (✓)

مشخص شده است. حاصل تقسیم بردار ثابت RHS بر ضرایب مثبت ستون ورودی عبارتند

از:

$$\frac{1200}{2} = 600$$

$$\frac{1500}{1} = 1500$$

$$\frac{1600}{5} = 320$$

مینیمم این حاصل تقسیم‌ها ۳۲۰ بوده و بنابراین متغیر خروجی S_3 می‌باشد که با فلش ($\leftarrow$) مشخص گردیده است. نتیجه می‌گیریم که ستون سوم ($j=3$) ستون ورودی (یعنی $k=3$) و ردیف سوم ($i=3$) ردیف خروجی (یعنی $r=3$) می‌باشد و همچنین عدد ۵ (y_{ik}) عنصر گردش ($pivot$) یا لولادر اولین انتقال است.

$$Z = y'_{00} = 0 - \frac{1600(-29)}{5} = 9280 \quad 4$$

$$y'_{10} = 1200 - \frac{1600(2)}{5} = 560$$

$$y'_{20} = 1500 - \frac{1600(1)}{5} = 1180$$

$$y'_{r0} = y'_{30} - \frac{1600}{5} = 320$$

$$y'_{02} = -22 - \frac{-29(1)}{5} = -\frac{81}{5}$$

$$y'_{12} = 1 - \frac{2(1)}{5} = \frac{3}{5}$$

$$y'_{r6} = y'_{36} = \frac{1}{5}$$

$$y'_{1k} = y'_{13} = 0$$

جدول شماره (۱) بعد از انتقال به صورت زیر در می‌آید:

جدول (۲)

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	نسبت
$\downarrow$	$\downarrow$							
Z	-۲۰	$-\frac{۸۱}{۵}$	۰	۰	۰	$\frac{۲۹}{۵}$	۹۲۸۰	
$\leftarrow S_1$	۱	$\frac{۳}{۵}$	۰	۱	۰	$-\frac{۲}{۵}$	۵۶۰	۵۶۰
S_2	۲	$\frac{۴}{۵}$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۱۱۸۰	۵۹۰
X_3	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	۳۲۰	

به طریقی مشابه، انتقالهای بعدی به ترتیب به قرار زیر می‌باشند

جدول (۳)

	$X1 \downarrow$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3$	RHS	نسبت
Z	۰	$-\frac{21}{5}$	۰	۲۰	۰	$-\frac{11}{5}$	۲۰۴۸۰	
$X1 \leftarrow$	۱	$\frac{3}{5}$	۰	۱	۰	$-\frac{2}{5}$	۵۶۰	$\frac{560}{3}$ ۵
$S2$	۰	$-\frac{2}{5}$	۰	-۲	۱	$\frac{3}{5}$	۶۰	
$X3$	۰	$\frac{1}{5}$	۱	۰	۰	$\frac{1}{5}$	۳۲۰	$\frac{320}{1}$ ۵

جدول ۴

	$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3 \downarrow$	RHS
Z	۷	۰	۰	۲۷	۰	-۵	۳۴۴۰۰
$X2$	$\frac{5}{3}$	۱	۰	$\frac{5}{3}$	۰	$-\frac{2}{3}$	$933\frac{1}{3}$
$S2$	$\frac{2}{3}$	۰	۰	$-\frac{4}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	$433\frac{1}{3}$
$X3 \leftarrow$	$-\frac{1}{3}$	۰	۰	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$133\frac{1}{3}$

جدول ۵ و نهایی

	$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3$	RHS
Z	۲	۰	۱۵	۲۲	۰	۰	۲۶۴۰۰
$X2$	۱	۱	۲	۱	۰	۰	۱۲۰۰
$S2$	۱	۰	-۱	-۱	۱	۰	۳۰۰
$S3$	-۱	۰	۳	-۱	۰	۱	۴۰۰

پس جواب بهینه $x_3^* = 0$ $x_1^* = 0$ $x_2^* = 1200$ $z^* = 26400$

مقدار تولید بهینه از نوع دوم ۱۲۰۰ می باشد: $X_2^* = 1200$.

از تولید نوع اول و دوم تولید نشود: $X_1^* = X_2^* = 0$.

کلیه موجودی منبع ۱ مصرف شود: $S_1^* = 0$.

به تعداد ۳۰۰ واحد از موجودی منبع دوم مصرف نشود : $S_2^* = 300$.

به تعداد ۴۰۰ از موجودی منبع سوم مصرف نشود : $S_3^* = 400$.

حل مسائل برنامه ریزی خطی (LP) با نرم افزار های مختلف

مثل $ORA, GAMS, GINO, LINGO, MATALB$ امکان پذیر است

حل LP با $LINGO$ و $MATLAB$ در آخر جزوه تشریح شده است

تمرین ۱: ص ۶۱-۶۴ ترجمه حمدی طه حل شود.

تمرین ۲: یک مسئله lp را نوشته، مدل سازی نموده با سیمپلکس به طور دستی و بایک نرم افزار حل

کنید.

تمرین مطلوبست حل

$$\text{Min} Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	۱	-۶۰	-۳۰	-۲۰	۰	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۸	۶	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
S_2	۰	۴	۲	۱/۵	۰	۱	۰	۰	۲۰
S_3	۰	۲	۱/۵	۰/۵	۰	۰	۱	۰	۸
S_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$$X_N = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

تشریح بنیاد ریاضی الگوریتم سیمپلکس

قبل از پرداختن به قضایا چند تعریف ارائه می شود.

تعاریف ریاضی

جواب پایه ای

مجموعه m معادله n مجهولی ($m < n$) خطی مستقل $AX=b$ را که در آن x یک بردار شامل n مجهول است در نظر بگیرید. متذکر می‌شویم یک جواب پایه‌ای برای این دستگاه از صفر قرار دادن $n-m$ متغیر و سپس حل دستگاه حاصل نسبت به m متغیر باقی‌مانده بدست می‌آید البته به شرط اینکه جواب حاصل منحصر بفرد (یگانه) باشد. این شرایط را از لحاظ ریاضی می‌توان بشرح زیر تعریف نمود:

اگر ماتریس A را بصورت n بردار نمایش دهیم: $A = (P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$ که در آن $j=1, \dots, n$ معرف j امین بردار ستونی A است.

و اگر مقدار $n-m$ متغیر را صفر قرار دهیم. جواب متغیرهای باقیمانده در صورتی منحصر بفرد خواهد بود که اگر و تنها اگر بردارهای وابسته به آنها بطور خطی مستقل باشند. بعبارت دیگر ماتریس مربع این بردارها باید یک ماتریس عادی ($nonsingular$) باشد.

تذکر: ماتریس مربع عادی ماتریسی است که دترمینان آن مخالف صفر است (معکوس پذیر است). جواب حاصل از دستگاه حاوی m معادله و m متغیر مزبور را یک جواب پایه‌ای مینامند.

ترکیب محدب Convex Combination

اگر در فضای n بعدی اقلیدسی نقاط متمایز

$$X^{(i)} = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

در دست باشند به ازای $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ، $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

عبارت $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X^{(i)}$ ترکیب محدب (خطی) از $X^{(i)}$ ها نامیده می‌شود. مثال

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, X^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

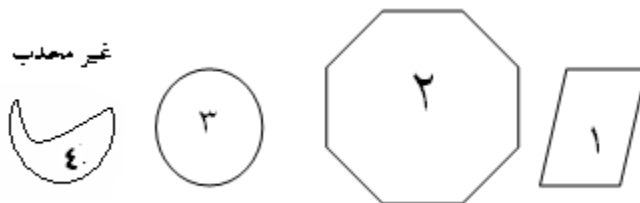
$$\sum_{i=1}^{k=4} \lambda_i = 0.15 + 0.2 + 0.55 + 0.1 = 1$$

$$X = 0.15X^{(1)} + 0.2X^{(2)} + 0.55X^{(3)} + 0.1X^{(4)} =$$

$$0.15 \begin{pmatrix} 1 \\ 2.2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0.55 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

مجموعه محدب

یک مجموعه مثل C را در فضای n بعدی محدب می نامند اگر تمام نقاط پاره خطی که هر ۲ نقطه متمایز C را بهم وصل می کند نیز در C باشد. بطور ریاضی اگر $X^{(1)}$ و $X^{(2)}$ دو نقطه متمایز از C باشند ترکیب محدب آنها یعنی $X = \lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}$ بازای $0 \leq \lambda \leq 1$ باید در مجموعه C باشد.



شکل ۱۲ چند مجموعه محدب و یک مجموعه غیر محدب

نقاط اکستریم یک مجموعه محدب

یک نقطه مثل A را در یک مجموعه محدب C ، اکستریم نامند اگر A نتواند بصورت یک ترکیب محدب از ۲ نقطه متمایز واقع در مجموعه C بیان شود. مثلاً مجموعه ۱ چهار نقطه اکستریم دارد، مجموعه ۲ هشت نقطه و مجموعه ۳ بینهایت نقطه اکستریم دارد.

شکل ماتریسی فرم استاندارد مسأله برنامه ریزی خطی (برای فرم استاندارد)

$$\text{Max } Z = CX$$

$$\text{s.t. : } (A, I) X = P_0 \quad P_0 \geq 0$$

که در آن بردار X شامل کلیه متغیرها (تصمیم گیری، کمکی، فرضی یا مصنوعی، که بعداً تعریف می شوند) است.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{pmatrix} \quad C = (c_1, c_2, \dots, c_{m+n})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ ماتریس}$$

I ماتریس یکه از رتبه m است.

P_0 بردار سمت راست معادلات است.

محدودیتها $(A, I) X = P_0$ به صورت زیر نیز قابل نوشتن است.

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_j P_j = P_0 \text{ or } x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_{m+n} p_{m+n} = P_0$$

P_j = بردار ستونی ماتریس (A, I) است

می توان کاری کرد که همواره ماتریس یک I ، ظاهر شود.

فرض می شود که بردار X شامل متغیرهای تصمیم گیری کمکی، فرضی (مصنوعی) است.

مثال

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 + 2x_2 = 7$$

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

متغیرهای کمکی و مصنوعی را نیز با x نشان می دهیم:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6 + 0x_7$$

s. t.

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_6 = 7$$

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_7 = 9$$

$$x_j \geq 0$$

فرم ماتریسی

$$Z = (2, 2, 4, 0, -M, -M, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$s.t. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ or } X_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} p_2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} p_1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

۳ قضیه در ارتباط با جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی^۱

سه قضیه وجود دارد که دقیقاً ثابت می‌کند جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان تنها با در نظر گرفتن جواب‌های شدنی پایه‌ای آن بدست آورد.

اگر Q مجموعه تمام جواب‌های شدنی دستگاه $(A, I)X = P_0$ باشد داریم.

قضیه ۱ Q یک مجموعه محدب است.

قضیه ۲ شرط لازم و کافی برای اکستريم بودن نقطه مشخص $X \geq 0$ در مجموعه Q این است که

$$X \text{ با یک جواب پایه‌ای شدنی از } \begin{cases} (A, I)X = P_0 \\ X \geq 0 \end{cases} \text{ متناظر باشد.}$$

براساس این قضیه: هر نقطه اکستريم یک جواب شدنی پایه‌ای برای مجموعه محدودیت‌هاست و هر جواب پایه‌ای شدنی یک نقطه اکستريم مجموعه شدنی است. لذا تعداد نقاط اکستريم محدود بوده و بیش از تعداد جواب‌های پایه نیست.

قضیه ۳ اگر مسأله برنامه‌ریزی خطی

$$\text{Max } Z = CX$$

$$(A, I)X = P_0 \quad X \geq 0$$

دارای جواب بهینه متناهی باشد آن جواب باید در یکی از نقاط اکستريم مجموعه Q واقع شود.

اگر جواب بهینه در بیش از یک نقطه اکستريم بدست می‌آید. مقدار تابع هدف برای تمام ترکیبات خطی این نقاط اکستريم یکی خواهد بود.

^۱ در بخش ۶-۴ ترجمه دکتر بازرگان از کتاب حمیدی طه (صفحه ۱۸۰ پیوست)

این ۳ قضیه دقیقاً ثابت می‌کند که جواب بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان تنها از روی جواب‌های پایه‌ای شدنی آن بدست آورد.

بخش ۵-۶ بدست آوردن ضابطه ریاضی شرایط روش سیمپلکس

گفتیم که در روش سیمپلکس همه جوابهای پایه‌ای ممکن بررسی نشده بلکه طوری جوابهای پایه‌ای ممکن تولید می‌شود که هر جواب جدید توانائی بهتر کردن مقدار تابع هدف را دارا باشد. محدودیتها را قبلاً بصورت ماتریسی $X = P_0(A, I)$ نوشتیم. حال اگر بردارهای مربوط به پایه هر تکرار (متغیرهای پایه ای تشکیل دهنده هر تکرار) را در ماتریس محدودیت های فرم استاندارد یعنی در (A, I) به B و بقیه بردارهای ماتریس محدودیت ها را با N نشان دهیم داریم

$$Z = C_B X_B + C_N X_N$$

$$B X_B + N X_N = P_0$$

$$X_B \geq 0, X_N \geq 0$$

که در آن

N, B دو ماتریس مربوط به ضرایب متغیرهای پایه و غیر پایه هر تکرار که از محدودیت ها بدست می آید

بردار X_B بردار متغیرهای پایه‌ای

و X_N بردار متغیرهای غیر پایه‌ای

C_B و C_N ضرایب متغیرهای غیر پایه و پایه در تابع هدف

P_0 سمت راست معادلات

با فرض وجود داشتن B^{-1} داریم. $X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}N X_N$

برای بدست آوردن مقادیر متغیرهای پایه بجای بردار غیر پایه های X_N صفر قرار می‌دهیم. پس $X_B = B^{-1}P_0$

در ادامه روش، پایه‌ای ساختن یکی از متغیرهای X_N (مثبت شدن مقدار آن عنصر) و الزاماً غیر پایه‌ای شدن یکی از عناصر X_B (صفر شدن مقدار آن) مد نظر است. متغیری که از X_N انتخاب می‌شود متغیر ورودی بوده و متغیری که از X_B بیرون می‌رود، متغیر خروجی نامیده می‌شود. متغیر ورودی براساس شرایط موسوم به بهینگی طوری انتخاب میشود که توانائی بهتر کردن مقدار تابع هدف را نسبت به جواب پایه‌ای قبل داشته باشد. متغیر خروجی از پایه قبلی طوری مشخص می‌شود که جواب پایه‌ای جدید در همه محدودیت‌های مسأله صدق کند (یعنی شرط شدنی بودن یا feasibility)

تشریح ریاضی ۲ شرط فوق.

ضابطه ریاضی شرط بهینگی برای انتخاب متغیر ورودی

C ، ضرائب تابع هدف، را به ۲ قسمت C_N و C_B تقسیم می‌کنیم یکی وابسته به X_B است دیگری به X_N . پس داریم.

$$Z = CX = C_B \times X_B + C_N \times X_N$$

چون $X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}N \times X_N$ پس

$$Z = C_B(B^{-1}P_0 - B^{-1}N X_N) + C_N X_N \Rightarrow$$

$$Z = C_B B^{-1}P_0 - C_B B^{-1}N X_N + C_N X_N$$

فرض کنید برای سهولت متغیرهای بردار غیر پایه‌ای (X_N بردار) به صورت x_1 تا x_n اندیس‌گذاری

شده باشند پس داریم $C_N X_N = \sum_{j=1}^n C_j X_j$ که یک عدد است.

$$X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

یک بردار ستونی است پس با توجه به عبارت حاصل برای Z

$C_B B^{-1}N$ یک بردار سطری است و آنرا به $(z_1 \dots z_n)$ نشان می‌دهیم.

$$C_B B^{-1}N X_N = \sum_{j=1}^n z_j x_j$$

لذا با جایگذاری در فرمول مربوط به Z داریم:

$$Z = C_B B^{-1}P_0 - \sum_{j=1}^n z_j x_j + \sum_{j=1}^n c_j x_j =$$

$$Z = C_B B^{-1}P_0 - \sum_{j=1}^n (z_j - c_j) x_j$$

در آن $j=1, \dots, n$ متغیرهای غیر پایه‌ای جواب‌اند.

کلیه $z_j - c_j$ های متغیرهای غیر پایه از بردار حاصل $C_B B^{-1}N - C_N$ بدست می‌آید. به طور کلی

اگر x_j متغیر ورودی باشد با توجه به اینکه بقیه متغیرهای X_N مقدارشان صفر باقی می‌ماند داریم

$$New\ Z = C_B B^{-1}P_0 - (z_j - c_j) x_j = current\ z - (z_j - c_j) x_j \Rightarrow$$

$$\Delta Z = New\ Z - current\ Z = -(z_j - c_j) x_j = -\theta(z_j - c_j)$$

یک متغیر (اعم از پایه و غیر پایه) در یک جدول (یک تکرار) برابر است با

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} P_j - c_j = C_B y_j - c_j$$

که در آن

P_j بردار زیر متغیر x_j در جدول آغازین است (باستثنای عنصر مربوط به سطر Z)

y_j بردار زیر متغیر x_j در جدول مورد نظر است (باستثنای عنصر مربوط به سطر Z)

با قرار دادن $X_N = (x_1 \dots x_n) = 0$ مقدار فعلی متغیرهای پایه $X_B = B^{-1} P_0$ و مقدار تابع هدف برابر $Z = C_B X_B = C_B B^{-1} P_0$ می شود.

متغیر ورودی باید از $X_N = X_1 \dots X_n$ انتخاب شود. آخرین معادله برای Z نشان می دهد که آن متغیر باید دارای $z_j - c_j$ منفی باشد. در مسئله بیشینه سازی هر چه منفی تر باشد بهتر است یعنی. متغیری بعنوان متغیر ورودی انتخاب می شود که کوچکترین مقدار منفی $z_j - c_j$ را داشته باشد (اعمال شرط بهینگی).

چند نکته

- نشان داده شده است (در صفحه ۱۸۹ حمدی طه ترجمه دکتر بازرگان) که سطر Z در جدول

سیمپلکس مستقیماً مقادیر $z_j - c_j$ را برای کلیه متغیرها بدست می دهد.

- ثابت می شود که $z_j - c_j$ هر متغیر پایه ای (متعلق به X_B) صفر است:

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} A - C_B$$

که در آن A ماتریس ضرایب متغیرهای پایه ای جدول فعلی است در محدودیت ها. که همان B می باشد. چون متغیرهای مورد نظر پایه ای اند، پس $B^{-1} B$ ماتریس ضرایب در تکرار فعلی است و مربوط به متغیرهای پایه ای ماتریسی یک می شود:

$$= C_B I - C_B = C_B - C_B = 0 \text{ بردار صفر}$$

بطور کلی مقدار هر $z_j - c_j$ اعم از پایه ای یا غیر پایه در هر جدول چنین محاسبه می شود.

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} P_j - c_j = C_B y_j - c_j$$

C_B ضرایب متغیرهای پایه ای در جدول فعلی

P_j ضرایب متغیر مورد نظر در معادلات مساله استاندارد

B^{-1} معکوس ماتریس ضرایب متغیرهای پایه ای جدول فعلی

y_j ستون زیر متغیر x_j مربوط به محدودیت ها در تکرار مد نظر

مثال :

مساله ریر را در نظر بگیرید (حمدی طه انگلیسی، ص ۱۵۹):

۵۳

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\
 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\
 x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \\
 x_j &\geq 0
 \end{aligned}$$

در یک تکرار $X_B = (x_4, x_3, x_6)$ در پایه و $X_N = (x_1, x_2, x_5)$ کدام متغیر باید برای ورود به پایه تکرار بعد انتخاب شود؟

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{nonbasic } Z_j - C_j = C_B B^{-1} N - C_N = (0 \ 5 \ 0) B^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (3 \ 2 \ 0) = (4.5 \ -2 \ 2.5)$$

تنها $Z_j - C_j$ منفی (۲-) است که متعلق به x_2 است: x_2 با منفی ترین $Z_j - C_j$ متغیر ورودی است.

ضابطه ریاضی شرط شدنی بودن feasibility^۱

متغیر خروجی از پایه باید طوری تعیین شود ۲ زیر شرط I, II تامین شود:
 زیر شرط I - هیچ یک از متغیرها (اعم از پایه‌ای یا غیر پایه‌ای) منفی نشود.
 زیر شرط II - مقدار متغیر خروجی برابر صفر شود.

$$\text{Constraints : } BX_B + NX_N = P_0 \Rightarrow X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}NX_N$$

اگر متغیر ورودی را X_j بنامیم فقط مقدار X_j از بردار X_N غیر صفر می‌گردد و بقیه عناصر X_N غیر پایه‌ای و صفر باقی می‌مانند.

^۱ بخش ۲-۵-۶ در صفحه ۱۸۹ حمیدی طه ترجمه دکتر باقر بازرگان

$$X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}N \begin{pmatrix} x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

محدودیت‌ها

تنها ستون متغیر نام (ورودی به پایه) ماتریس N که آنرا با P_j نشان می‌دهیم عملاً در فرمول دخالت می‌کند (تحقیق کنید)

$$X_B = B^{-1}P_i - B^{-1}P_j x_j$$

تعداد محدودیت‌ها و تعداد عنا صریح‌دار پایه (X_B) برابر m می‌باشد

اگر عنصر نام X_B را به $(X_B)_i$ نمایش دهیم برای $i=1,2,\dots,m$ ، بر طبق زیر شرط I تک تک مفادیر m گانه متغیرهای X_B فعلی در تکرار آینده که x_j وارد پایه آن می‌شود برابر خواهد بود با

$$(X_B)_i = (B^{-1}P_0)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

سوال x_j را چه مقدار انتخاب کنیم تا تمام $(X_B)_i$ ‌های فعلی در تکرار آینده منفی نشوند و یکی از آنها برای خروج از پایه صفر شود؟

جواب اگر $(B^{-1}P_j)_i \leq 0$ باشد، مقدار $x_j > 0$ را هر قدر که انتخاب کنیم $(X_B)_i$ طبق فرمول فوق

همواره مثبت است و صفر نمی‌شود اما برای آن $(B^{-1}P_j)_i$ ‌هایی که مثبت اند باید برای x_j مقداری انتخاب شود تا غیر منفی بودن کلیه $(X_B)_i$ ‌ها حفظ و یکی صفر شود (این مقدار برابر مقداری است که با θ نشان داده خواهد شد)

برای تامین زیر شرط ۲:

x_j را جایگزین آن $(X_B)_i$ می‌کنیم که مقدارش بازای x_j صفر شود تا $(X_B)_i$ از پایه خارج گردد.

- اگر $(B^{-1}P_j)_i = 0$ عنصر i ام بردار $(B^{-1}P_j)$ ، مقدار $x_j > 0$ را هر قدر که انتخاب کنیم $(X_B)_i$

حاصل فرمول $(X_B)_i = (B^{-1}P_0)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j$ هیچگاه صفر نمی‌شود پس از

$(B^{-1}P_j)_i$ ‌های صفر یا منفی صرف نظر می‌کنیم. $i = 1, \dots, m$

- اگر هیچ یک از $(B^{-1}P_j)_i$ مثبت نباشند تابع هدف بطور نامتناهی بهبود پیدا میکند و

مسئله جواب محدود ندارد.

یافتن متغیر خروجی

جهت یافتن متغیر خروجی، طرفین نامعادله $(B^{-1}P_0)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j \geq 0$ اگر $(B^{-1}P_j)_i$ مثبت

باشد، به آن تقسیم می‌کنیم.

پس شرط شدنی بودن براساس رابطه فوق معادل است با:

$$\begin{cases} (B^{-1}P_j)_i > 0 \\ x_j \leq \frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} = \frac{(RHS)_i}{(y_j)_i} \quad i=1,2,\dots,m \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

از X_B فعلی کدام متغیر باید خارج شود تا x_j جایگزین آن شود؟

از روی $x_j \leq \frac{(B^{-1}P_0)_m}{(B^{-1}P_j)_m}, \dots, x_j \leq \frac{(B^{-1}P_0)_2}{(B^{-1}P_j)_2}, x_j \leq \frac{(B^{-1}P_0)_1}{(B^{-1}P_j)_1}$ می‌توان می‌توان نتیجه گرفت که

مقدار x_j باید کمتر یا مساوی حداقل این نسبت‌ها باشد اما برای اینکه یکی از متغیرهای پایه فعلی صفر گردد تا

پایه خارج شود x_j باید دقیقاً مساوی آن حداقل نسبت باشد:

$$x_j = \theta = \min \left\{ \frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \mid (B^{-1}P_j)_i > 0 \right\}$$

ژاندریس متغیر ورودی است که قبلاً آنرا دانسته ایم،

P_j ستون مربوط به متغیر x_j از ماتریس N در مساله استاندارد است.

تعیین کنید که این حداقل متعلق به کدام θ کدام متغیر از متغیرهای X_B است. آن متغیر خروجی می

شود) چون مقدارش بر اساس $(X_B)_i = (B^{-1}P_0)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j$ برای این مقدار

زیر صفر می‌شود) و باید x_j بجای آن در X_B قرار گیرد.

$$y_j = B^{-1}P_j = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X_B = B^{-1}P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 40 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{مثال: فرض کنید که در یک تکرار مسئله ای}$$

و x_j متغیر ورودی به پایه تکرار آینده باشد پس:

$$(۱) \quad x_{B1} = 5 - 2/5x_j \quad \text{مقدار عنصر اول } x_B \text{ فعلی در تکرار آینده با ورود } x_j \text{ به پایه}$$

$$(۲) \quad x_{B2} = 40 - 4x_j \quad \text{مقدار عنصر دوم } x_B \text{ فعلی در تکرار آینده با ورود } x_j \text{ به پایه}$$

$$(۳) \quad x_{B3} = 4 + 2x_j \quad \text{مقدار عنصر سوم } x_B \text{ فعلی در تکرار آینده با ورود } x_j \text{ به پایه}$$

$$(۴) \quad x_{B4} = 1/5 + x_j \quad \text{تعداد عنصر چهارم } x_B \text{ فعلی در تکرار آینده با ورود } x_j \text{ به پایه}$$

می دانیم در تکرار آینده مقادیر این همه متغیرها از جمله متغیرهای پایه فعلی باید منفی نباشد.

$x_j \geq 0$ هر چه باشد رابطه ۳ و ۴ همواره برقرار است. بهمین دلیل مقایر منفی $y_j = B^{-1}P$

در نظر گرفته نمیشود و می ماند روابطه ۱ و ۲

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow x_j \leq \frac{5}{2.5} = 2 \\ (2) \Rightarrow x_j \leq \frac{40}{4} = 10 \end{cases}$$

$\{x_j \leq \min(2, 10) = 2\}$ که مربوط به x_{B1} است. میخواهیم یکی از $(x_b)_i$ ها صفر شود اگر x_j دقیقا

مساوی ۲ باشد $(x_b)_i$ برای $i=1$ صفر می گردد و خروجی میشود

معیار شدنی بودن فوق الذکر هم برای مساله Max هم برای مساله Min صادق است.

توجه شود در جریان عملیات سطری و ستونی سیمپلکس در هیچ تکرار XB (در RHS) منفی نخواهد شد اگر در سیمپلکس معمولی در تکراری مقدار منفی برای یک متغیر تصمیم بدست آید اشتباهی صورت گرفته است.

در شرط شدنی بودن (feasibility) اگر هیچ عنصر بردار $B^{-1}P$ مثبت نباشد. (منفی یا صفر باشند) بر طبق رابطه $X_B = B^{-1}P_o - (B^{-1}P_j)x_j$ ، که مقادیر متغیرهای x_B فعلی را در جدول آینده با ورود x_j به پایه می دهد، مقدار متغیر ورودی x_j را می توان هر مقدار که بخواهیم از ۰ تا ∞ اختیار کنیم و همواره $X_B \geq 0$ با توجه به x_j بعنوان متغیر ورودی، مقدار تابع هدف هم به طور نامتناهی بهتر می شود. در نتیجه جواب بی کران می شود. چون $Z = C_B X_B$ مسئله جواب محدود ندارد.

مقدار بهبود تابع هدف

قبلا ثابت شد که چه در مساله بیشینه سازی و چه مساله کمینه سازی تابع هدف در تکرار

(iteration) بعدی باندازه $\Delta Z = -\theta(z_j - c_j)$ نسبت به مقدار فعلی بهبود می یابد که در آن $z_j - c_j$ ضریب زیر متغیر ورودی x_j در سطر j می باشد و برابر $C_B B^{-1} P_j - c_j$ یا $C_B y_j - c_j$ می باشد.

مثال^۱ (مثال ۲-۵-۶ ص ۱۵۹ کتاب انگلیسی HT ص.... ترجمه دکتر بازرگان HT)

در مثال ۲ صفحه قبل (۶-۵-۱ کتاب) دیدیم که X_2 متغیر ورودی است با استفاده از داده های آن مساله

$$X_B \text{ فعلی} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \end{pmatrix}$$

X_2 متغیر ورودی است پس $j=2$ و داریم:

$$x_j = x_r \Rightarrow j=2 \Rightarrow P_j = P_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_r = B^{-1} P_r = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_r = \theta = \min \left(\frac{x_4}{2}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_6}{4} \right) = \frac{200}{2}$$

چون $\frac{200}{2}$ متناظر با x_4 است پس x_4 متغیر خروجی است و جای خود را به x_2 می دهد.

نسبت مربوط به X_3 در نظر گرفته نمی شود. زیرا عنصر مربوط بآن مثبت نیست (صفر است). X_4 متغیر خروجی بوده و X_2 با مقدار $\theta = 100$ وارد پایه می شود.

^۱ مثال ۲-۵-۶ ص ۱۸۷ بر اساس ۶-۵-۱ ص ۱۸۶ کتاب حمیدی طه

اگر در جدول تمام عناصر زیر یک متغیر غیرپایه مثل X_j مربوط به محدودیت‌ها (بردار V) منفی یا صفر باشند مقدار X_j بطور نامحدود قابل افزایش است بدون اینکه هیچ یک از سایر متغیرها مقدارش منفی گردد لذا اگر X_j متغیر ورودی باشد (بر طبق شرایط بهینگی) مقدار تابع هدف بطور بیکران قابل افزایش است یعنی $(|z_j - c_j| x_j) \rightarrow \infty$. در این صورت مساله جواب بیکران دارد.

مقدار بهبود تابع هدف برابر است با

$$\Delta Z = -\theta(z_j - c_j) = -\frac{200}{1}(-2) = 200 \quad \theta(c_j - z_j) = 100[-(-2)] = 200$$

شکل ماتریسی جدول سیمپلکس

بخش ۶-۶ HT ترجمه دکتر بازرگان نشان می‌دهد که کارهایی که ما در رابطه با سطرهای جدول سیمپلکس بکار بردیم پایه ریاضی دارد و منجر به جوابهای اصولی می‌گردد. اصول ریاضی جدولیکه ما برای روش سیمپلکس تاکنون بکار برده‌ایم در صفحه ۱۸۸ تا ۱۸۹ کتاب HT را نشان می‌دهد. البته فرم جدول در کتابهای مختلف با هم یکسان نیست ولی بنحوی اطلاعات هر تکرار در جدول درج میشود.

	Z	X_I^t	X_{II}^t	RHS
Z	1	$C_B B^{-1} A - C_I$	$C_B B^{-1} - C_{II}$	$Z = C_B \times X_B = C_B B^{-1} P_o$
X_B	0	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} P_o$

X_{II} بردار متغیرهای پایه در جدول آغازین

X_I سایر متغیرها

C_I ضرایب سایر متغیرها در تابع هدف صورت مساله

C_{II} ضرایب متغیرهای X_{II} در تابع هدف مساله

این جدول کلی نشان می‌دهد سطر Z در تکرارهای مختلف $Z_j - C_j$ را بدست می‌دهد و در همان سطر زیر آخرین ستون مقدار تابع هدف (Z) مربوط به آن تکرار است و مقدار هر متغیر پایه در آخرین ستون ردیف مربوط به هر متغیر پایه بدست می‌آید در هر تکرار.

$$Z = C_B \times X_B \quad \text{مقدار تابع هدف} \quad X_B = B^{-1}P_o = \text{متغیرهای پایه}$$

$$Z^* = C_B \times X_B^* \quad \text{مقدار بهینه تابع هدف}$$

پس مشاهده می کنید که براساس مطالب اثبات شده در صفحات ۱۸۸-۱۸۹ ترجمه دکتر باقر بازرگان

در هر جدول *simplex*

B^{-1} (معکوس ماتریس ضرایب متغیرهای پایه آن جدول در محدودیت‌های مساله) نقش اساسی بعهده دارد.

نمایش زیر از جدول *Simplex* نشان می دهد که هر جدول (هر تکرار) چگونه از مساله اصلی بدست می آید.

$$z_j - c_j = C_B B^{-1}P_j - c_j = C_B y_j - c_j \quad y_j = B^{-1}P_j \quad j = 1, 2, \dots, n+m=n'$$

$$Y = B^{-1}(AI) = B^{-1}AB^{-1}$$

	Z	$X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_j \dots$	متغیرهای پایه جدول آغازین	RHS
Z	I	$C_B B^{-1}A - C_I \quad z_j - c_j \quad C_B B^{-1} - C_{II}$		$Z = C_B X_B$ $= C_B B^{-1}P_o$
X_B	۰	$y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_j = B^{-1}P_j \quad B^{-1}$		$X_B = B^{-1}P_o$

توجه

در این جدول اندیس j همه متغیرها را شامل می شود ' $j=1, \dots, n$ اعم از متغیرهای تصمیم ،

کمبود، مازاد و کمکی

ملاحظات

- همواره در هر تکرار معکوس ماتریس B مربوط به هر جدول در زیر متغیرهایی که در جدول

آغازین پایه بودند بدست می آید

- $z_j - c_j$ متغیرهای پایه هر جدول صفر است .

- متغیر ورودی در مساله *Max* دارای منفی ترین $z_j - c_j$ است.

متغیر ورودی در مساله *Min* دارای مثبت ترین $z_j - c_j$ است.

- اگر متغیر x_k در ردیف k ام پایه باشد، y_k یک بردار از ماتریس یک خواهد بود که تنها عنصر k ام آن یک و بقیه صفر خواهد بود.

اگر متغیر j ام ورودی باشد، مقدار بهبود در Z مساله در جدول بعدی مساوی است با

۶۰

$$\Delta Z = -\theta \left(z_j - c_j \right) \quad \theta = \min \left\{ \frac{(B^{-1}P_o)_i}{(y_j)_i} \mid (y_j)_i > 0 \right\}$$

مثال ۱ یک جدول ناقص از یک تکرار از مساله استاندارد زیر داده شده

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + s_1 = 100$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 80$$

$$x_1 + s_3 = 40$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	۱						
x_2	۰	۰					
s_2	۰	۰					
x_1	۰	۱					

مطلوبست تکمیل جدول، تعیین متغیر ورودی و خروجی، میزان بهبود تابع هدف در جدول بعدی، مقدار عناصر X_B جدول بعدی آیا جدول بعدی جدول نهایی است؟

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x_2 & s_2 & x_1 \\ 1 & 0 & +2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} s_3 & s_2 & s_1 \end{matrix}$$

ستون زیر متغیرهای پایه جدول آغازین

$$y_2 = B^{-1}p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

البته بدون انجام اینکار نیز می توانستیم $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ را بنویسیم زیرا x_2 در پایه است پس ضرایب مربوط به

آن، یک بردار از ماتریس یکه است.

$$z_1 - c_1 = 0 \quad z_2 - c_2 = 0 \quad z_{s_2} - c_{s_2} = 0$$

$$\left(z_j - c_j \right)_{s_3} = c_B y_{s_3} - c_{s_3} = (2 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$\left(z_j - c_j \right)_{s_1} = c_B y_{s_1} - c_{s_1} = (2 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 2 - 0 = 2$$

مسئله بیشینه سازی است و منفی ترین $z_j - c_j$ متعلق به s_3 می باشد پس متغیر ورودی s_3 است.

$$X_B = B^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

$$Z = C_B X_B = (2 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 160$$

s_2 خروجی است زیرا نسبت $\theta = \min \left\{ -\frac{20}{1}, \frac{40}{1} \right\} = 20$ متعلق به s_2 است.

$$\text{بهبود در تابع هدف} = -\theta(z_j - c_j) = -\left(\frac{20}{1} \right)(-1) = +20$$

مقدار X_B در جدول بعدی = معکوس ماتریس ضرائب X_B جدول بعدی در محدودیت های استاندارد ضربدر P_0 .

$$x_2 \ s_3 \ x_1$$

$$X_B = (B^{-1} \text{جدول بعدی}) P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

می دانیم $z_j - c_j$ مربوط به x_1, s_3, x_2 در جدول بعد به علت اینکه در پایه اند صفر است. $z_j - c_j$ برای متغیرهای غیر پایه یعنی s_2, s_1 :

$$(Z_j - C_j)_{s_1, s_2} = C_B B^{-1} (p_r, p_t) - (C_{s_1}, C_{s_2})$$

$$\text{برای جدول بعدی} \quad X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad C_B = (2, 0, 3) \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & +1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_j - c_j = (2, 0, 3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (0, 0) = (1, 1)$$

بعد (S_2, S_1)

چون هیچ $z_j - c_j$ منفی نیست پس جدول بعدی جدول نهایی است.

مثال ۲

مطلوبست تکمیل جدول داده شده *Simplex* که مربوط به یک تکرار مساله زیر - همچنین تعیین متغیر ورودی و خروجی.

$$\text{Max } Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{s.t. } 1) 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$2) 4x_1 + 2x_2 + 1/5x_3 \leq 20$$

$$3) 2x_1 + 1/5x_2 + 0/5x_3 \leq 8$$

$$4) \quad \quad \quad x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
Z	1	0	20	0	0	0	40	-20	
s_1	0								$s_1 =$
x_3	0								$x_3 =$
x_1	0								$x_1 =$
s_4	0								$s_4 =$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & x_3 & x_1 & s_4 \\ 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4 & 0 \\ 0 & 0/5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کلید تمام مقادیر دیگر است.

توجیه ضابطه انتخاب متغیر ورودی و خروجی از روی مساله استاندارد

$$\text{Max } Z - 3x_1 - 2x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 - 0S_5 = 0$$

$$1) 2x_1 + x_2 + S_1 = 100$$

$$2) 2x_1 + x_2 + S_2 = 80$$

$$3) x_1 + S_3 = 60$$

$$4) x_2 + S_4 = 10$$

$$5) -x_1 + S_5 = 20$$

All X and $S \geq 0$

برای دستیابی به جواب های پایه شدنی $2 = 5 - 7$ متغیر را صفر در نظر می گیریم. در اولین بار اگر

$$NBV = \{x_1 = x_2 = 0\}$$

$$B.V. = \{S_1 = 100, S_2 = 80, S_3 = 60, S_4 = 10, S_5 = 20\}$$

در هر سطر یک متغیر پایه وجود دارد. S_1 متغیر پایه سطر ۱، S_2 متغیر پایه سطر ۲، S_3 متغیر پایه سطر ۳ است.... برای ورود به پایه در دور بعد x_1 برگزیده می شود چرا که احتمال داده می شود بیشترین بهبود را روی Z می گذارد. زیرا یک واحد x_1 و Z را به اندازه ۳ افزایش می دهد که از بقیه متغیرها بیشتر است.

ما مایلیم مقدار x_1 هر چه بیشتر شود. توجه کنید هر چه x_1 از صفر بیشتر شود روی S_1, S_2, S_3 تأثیر می گذارد و مقدار آنها از ۱۰۰ و ۸۰ و ۶۰ کمتر می شود. مقدار x_1 تا چه حد می تواند افزایش یابد؟

تا حدیکه S_1, S_2, S_3 منفی نشوند. با صفر نگه داشتن x_2 داریم:

$$\text{در سطر ۱} \begin{cases} 2x_1 + 0 + S_1 = 100 \Rightarrow S_1 = 100 - 2x_1 \\ \Rightarrow 100 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{100}{2} = 50 \\ S_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{در سطر ۲} \begin{cases} x_1 + 0 + S_2 = 80 \Rightarrow S_2 = 80 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{80}{1} = 80 \\ S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{در سطر ۳} \begin{cases} x_1 + S_3 = 60 \Rightarrow S_3 = 60 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 60 \\ S_3 \geq 0 \end{cases}$$

¹ non-basic variables

اینجا X_1 حداکثر تا ۴۰ میتواند افزایش یابد و اگر بیش از آن شود S_2 منفی می شود. در $X_2=40$, S_2 صفر می شود. مقدار X_2 را ۴۰ انتخاب می کنیم. مقدار S_1 صفر می شود لذا S_2 پایه را ترک و غیر پایه می گردد.

توجه کنید که

در سطر ۴ داریم $S_1 = 10 - x_1 + x_2 + S_3$: چون x_1 دارای ضریب صفر است تا هر مقدار می تواند اضافه شود و در سطر ۵ هم داریم $S_3 = 20 + x_1 - x_2 \Rightarrow S_3 = 20 - x_2 \geq 0$ با افزایش x_2 به هر مقدار روی S_3 تاثیری از جهت صفر یا منفی شدن باقی نمی گذارد. به همین دلیل ضرایب صفر و منفی برای منظور گفته شده در نظر گرفته نمی شود.

مقدار $X = X_B = B^{-1}P_0(RHS)$ پایه ای در هر جدول (در هر تکرار یا دور)

تکنیکهای متغیر فرضی یا مصنوعی (Artificial)

وقتی متغیرهای کمکی به سهولت یک جواب پایه ای شدن اولیه نمی دهند چه باید کرد؟

در حالت کلی این وضعیت وقتی پیش می آید که حداقل یکی از محدودیتها از نوع $=$ یا $\geq$ باشد.

در این حالت ۲ تکنیک پیشنهاد می شود: روش M بزرگ و روش ۲ فاز یا ۲ مرحله ای

(A) روش M یا روش جریمه Big M Method

مراحل عمل

۱- شکل استاندارد مساله را بنویسید.

۲- به سمت چپ هر یک از محدودیت هائی که قبل از اجرای مرحله ۱ از نوع $(\geq)$, $(=)$ بودند متغیرهای غیر منفی بیافزائید. این متغیرها را متغیرهای مصنوعی می نامند. توجه شود قبل از اضافه کردن متغیر مصنوعی سمت راست حتما باید مقادیر مثبت داشته باشد.

افزودن این متغیرها موجب نقص محدودیت های فوق می شود. اما این اشکال را با اختصاص دادن یک مقدار (جریمه) خیلی بزرگ مثل M ($M > 0$) به هر واحد از این متغیرها در تابع هدف برطرف

^۱ ارائه شده توسط چارلز کوپر

می‌کنند. این جریمه در تابع هدف برای مسائل بیشینه سازی $-M$ و برای مسائل کمینه سازی $+M$ است.

۳- برای جواب پایه اولیه از متغیرهای مصنوعی که با A یا R نشان داده می‌شود کمک می‌گیریم و جدول آغازین واقعی *Simplex* را تهیه می‌کنیم در جدول آغازین واقعی ضرایب متغیرهای پایه در ستون زیر آن در کلیه سطرها صفر است (باستثنای سطر خود متغیر که ضریبش یک است) ۴- با مراحل منظم روش *Simplex* پیش می‌رویم:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_2 + x_3 \geq 2$$

مثال:

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0$$

این مساله را تنها با s_1, s_2 نمی‌شود جدول بندی و حل کرد :

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱				۰	۰	۰
s_1	۰				۱	۰	۳
s_2	۰				۰	-۱	۲

زیرا طبق روال گفته شده برای جواب پایه اولیه باید x_1, x_2, x_3 را صفر قرار دهیم و در رابطه سوم صدق نمی‌کند. حتی اگر تساوی در محدودیت سوم نمی‌داشتیم باز با مشکل روبرو بودیم. زیرا قید ≥ 0 داریم. و $s_2 = -5$ در می‌آید

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z - 2x_1 - x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 3 \\
 & x_2 + x_3 - S_2 + R_1 = 2 \\
 & x_1 + x_3 + R_2 = 1 \\
 & \text{all } X, S, R \geq 0
 \end{aligned}$$

فرم جدولی چنین است :

	پایه <i>Basis</i>	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	<i>RHS</i>
	Z	۱	-۲	-۱	۱	۰	۰	-M	-M	0
B.V.	S_1	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	3
	R_1	۰	۰	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	2
	R_2	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	1
		۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	

در جدولی که آنرا جدول آغازین *Simplex* می‌شناسیم از جمله شرط‌هایش تعلق ماتریس یک به متغیرهای پایه است و دیگر اینکه، *Zj-Cj* متغیرهای واقع در پایه صفر باشد در این جدول ماتریس یک به متعلق به R_2, R_1, S_1 است. قاعدتاً باید آن‌ها جواب پایه باشند اما مشکلی که وجود دارد اینست که ضریب *Zj-Cj* دوتا از این متغیرها (یعنی R_2, R_1) در سطر *Z* صفر نیست و لذا این جدول، جدول آغازین واقعی نیست. برای اینکه ضریب این ۲ سطر را در تابع هدف صفر کنیم عمل زیر را انجام می‌دهیم.

$$(\text{مجموع سطر اول و دوم}) + M = \text{سطر } Z \text{ قدیم} = (\text{سطر } R_1) + M + (\text{سطر } R_2) \times M = \text{سطر } Z \text{ جدید}$$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	$x_3 R_2$	<i>RHS</i>
Z	۱	$-2+M$	$-1+M$	$1+2M$	-M	۰	۰	۰	3M
S_1	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	3
R_1	۰	۰	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	2
R_2	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	1

چون ضرایب مربوط به متغیرهای پایه در سطر Z صفر است مطابق روال معمول *Simplex* عمل می‌کنیم تا به جواب برسیم. در اینجا خروجی از این تکرار R_p ورودی به تکرار بعد x_p است توجه: در اینگونه مسائل جواب بهینه و نهائی زمانی برای مساله میسر است که کلیه متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شده باشند. موردیکه جدول نهائی شامل متغیر مصنوعی باشد بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت.

(B) روش ۲ فاز یا ۲ مرحله‌ای (Two-Phase Method)

روش ۲ فاز یا ۲ مرحله‌ای نیز برای هنگامیکه با محدودیت‌های بزرگتر از صفر (≥ 0) و یا تساوی = سرکار داریم مناسب است.

و مساله را در ۲ مرحله مورد بررسی و حل قرار می‌دهد.

در مرحله *I* هدف را مینیمم کردن مجموع متغیرهای مصنوعی (یا *Max* کردن مجموع منفی آنها) قرار می‌دهند.

در مرحله *II* هدف بهینه کردن (*Max or Min* کردن) تابع هدف مساله اصلی است. گامهای الگوریتم ۲ فاز:

گام ۱: به محدودیت‌های صورت مساله اصلی متغیرهای کمبود، اضافی و مصنوعی لازم رابیفزائید. (توجه کنید قبل از اضافه کردن سمت راست مثبت باشد)

شروع فاز *I*: (هدف: بیرون راندن متغیرهای مصنوعی از پایه)

گام ۲: برای فاز *I* تابع هدف را متغیرهای مصنوعی $\sum W = \text{Min}$ قرار دهید. گام ۳:

مساله *L.P* شامل تابع هدف مذکور در گام ۲ و محدودیت‌های گام ۱ را با روش *simplex* حل کنید. توجه داشته باشید ابتدا چون متغیر مصنوعی در پایه است $Z_j - C_j$ آنها را باید با عملیات سطری صفر کنید.

در اینجا ۳ حالت ممکن است پیش آید:

حالت ۱. مقدار بهینه W مقداری مثبت خواهد بود $\Leftarrow$ مساله اصلی جواب شدنی ندارد زیرا در پایه لاقبل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت وجود دارد.

حالت ۲. مقدار بهینه W صفر شده ولی در X_B پایه لااقل یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر وجود دارد. در این صورت به گام چهار (۴) بروید.

حالت ۳. مقدار W به صفر رسیده و هیچ متغیر مصنوعی در پایه موجود نیست. توجه: لزوماً این جدول، برای مسأله اصلی جدول نهایی نیست در این صورت فاز I را متوقف و به گام ۴ بروید.

شروع فاز II

گام ۴: آخرین جدول فاز I را اولین جدول فاز II قرار دهید با این تفاوت که به جای سطر صفر (سطر تابع هدف) تابع هدف مسأله اصلی را به صورت استاندارد قرار دهید. اگر در X_B متغیر مصنوعی وجود داشته باشد C_j آن را صفر در نظر بگیرید. آن متغیرهای مصنوعی را که در پایه نیستند می‌توانید در فاز II کلاً از جدول حذف کنید.

گام ۵: ضرائب $C_j - Z_j$ متغیرهای پایه با عملیات سطری ($Gauss-Jordan$) به صفر تبدیل کنید.
گام ۶: اگر هیچ متغیر مصنوعی در آخرین جدول فاز I وجود نداشت با $Simplex$ معمولی فاز II را ادامه دهید تا به جواب برسید. اما اگر آخرین جدول فاز I شامل متغیر مصنوعی بود به گام ۷ بروید.
گام ۷: باید مواظب بود که متغیرهای مصنوعی پایه هیچ‌گاه مقدار مثبتی به خود نگیرد. برای این منظور متغیرهای خروجی و ورودی را چنین تعیین کنید:

(a) متغیر ورودی را با ضابطه $Simplex$ معمولی مشخص کنید.

(b) تمام y_{ij} های متغیر ورودی انتخاب شده را واریسی کنید. آنهایی را که متناظر با متغیرهای مصنوعی است مشخص کنید. هر کدام از آنها که منفی بود آن را متغیر خروجی بگیرید. اگر تمام این y_{ij} ها غیر منفی بود روال معمولی را برای متغیر خروجی به کار بندید.

یک تفاوت سیمپلکس معمولی با سیمپلکس دو فاز این است که هرگاه یک متغیر مصنوعی از پایه خارج شد در ادامه از محاسبات حذف شود (وینستون، ۱۹۹۹ ص ۱۰۰).

مثال

مطلوب است حل مسأله:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام ۱

$$\begin{aligned}
 S.t. \quad & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + S_1 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 - S_2 + R_1 = 20 \\
 & x_1 + x_2 + R_2 = 10 \\
 & x_1 + x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

شروع فاز I گام ۲

$$\begin{aligned}
 Min \quad & W \qquad \qquad \qquad -R_1 - R_2 = 0 \\
 S.t. \quad & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \qquad \qquad + S_1 \qquad \qquad = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 \qquad \qquad - S_2 + R_1 \qquad \qquad = 20 \\
 & x_1 + x_2 \qquad \qquad \qquad \qquad + R_2 = 10 \\
 & x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

گام ۳ تشکیل اولین جدول

پایه	W	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
W	1	0	0	0	0	-1	-1	0
S_1	0			1	0	0	0	4
R_1	0	1	3	0	-1	1	0	20
R_2	0	1	1	0	0	0	1	10

جدول آغازین واقعی Simplex فاز I - تکرار اول فاز I

پایه	W	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS	
W	1	2	4	0	-1	0	0	30	نسبت
S_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	16
R_1	0	1	3	0	-1	1	0	20	$\frac{20}{3}$
R_2	0	1	1	0	0	0	1	10	10

□

یکی از تکرارهای بعدی فاز I

	W	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
W	1	0	0	0	0	-1	-1	0
S_1	0	$\cdot$	$\cdot$	1				
x_2	0	0	1	0				5
x_1	0	1	0	0		$-\frac{1}{2}$		5

جدول فوق برای فاز ۱ نهایی است متغیرهای مصنوعی در پایه نیست.

شروع فاز II

گام ۴

آخرین جدول فاز I را اولین جدول فاز II قرار دادهبا تابع فوق هدف $Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$

متغیرهای مصنوعی را حذف می کنیم چون در پایه نیست

جدول اول

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	$+1$	-2	-3	0	0	0
S_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	1		
x_2	$\cdot$	0	1	0		5
x_1	$\cdot$	1	0	0		5

ضرائب مربوط به x_2 و x_3 در سطر Z صفر نیست. با عملیات گاوس جردن آنها را صفر می کنیم. $C_j - z_j$ مربوط به x_2 و x_1 که در پایه اند با تبدیل به صفر تبدیل می کنیم.۳ برابر سطر ماقبل آخر + ۲ برابر سطر آخر + سطر Z قدیم = سطر Z جدید

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	0		25
S_1	$\cdot$			1		
X_2	$\cdot$	0	1	0		5

X_I	,	1	0	0		5
-------	---	---	---	---	--	---

این جدول با توجه به اینکه مسأله کمیت‌سازی است. جدول نهایی است و جواب مسأله:

$$x_1^* = 5 \quad x_2^* = 5 \quad Z^* = 25$$

تمرین: مسئله فوق را با روش M بزرگ حل کنید.

مثال دیگر برای فاز ۲

اولین جدول فاز ۲ یک مسأله بیشینه‌سازی

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	RHS
Z	۱	۰	-۳	۳	۰	۲	۰	۰	۶
X_1	۰	۱	-۱	۳	۰	۱	۰	۰	۳
R_1	۰	۰	-۲	+۱	۰	۳	۱	۰	۰
X_4	۰	۰	۳	-۱	۱	-۱	۰	۰	۹
R_2	۰	۰	-۱	۰	۰	۲	۰	۱	۰

دومین جدول

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	RHS
Z	۱	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۰	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	۰	۶
X_1	۰	۱	۰	$\frac{5}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۳
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۰

←

$$\begin{array}{l|l} X_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \cdot & 9 \\ R_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \cdot \end{array}$$

سومین جدول

Z		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	RHS
Z	1	0	0	-1	0	0	6
X ₁	0	1	0	2	0	0	3
X ₂	0	0	1	-2	0	0	0
X ₄	0	0	0	4	1	0	9
X ₅	0	0	0	-1	0	1	0

ادامه داده و بگویید آیا مساله جواب دارد؟

حالات خاص در روش سیمپلکس^۱

در این قسمت به معرفی وضعیت‌هایی که در حین بکار بردن سیمپلکس رخ می‌دهد

می‌پردازیم:

۱- تباهی‌گی یا انحطاط *Degeneracy*^۱ بخش ۳-۶ کتاب حمیدی طه ترجمه دکتر بازرگان

۲- جواب های بیکران (*Unbounded*)۳- جواب های بهینه مختلف چندگانه (*Alternative optimal solution*)۴- فقدان جواب شدنی یا ممکن (*infeasibility*)

حالت ۱- حالت تباهیدگی

تعریف: یک جواب پایه برای $AX = b$ را (تبهگن، منحط، تباهیده) می نامیم اگر یک یا چند متغیر پایه دارای مقدار صفر باشد به عبارت دیگر یک جواب پایه شدنی که کمتر از m متغیر آن مقدار غیر صفر داشته باشد تباهیده نامیده می شود.

تعریف مساله LP تباهیده

یک مساله LP را تباهیده می نامیم اگر حداقل یک جواب پایه اولیه داشته باشد که در آن یک متغیر پایه اش صفر باشد.

ثابت می شود که:

۱- شرط لازم و کافی وجود جواب و عدم تباهیدگی تمام جواب های پایه دستگاه معادلات $AX = b$ استقلال خطی هر مجموعه از m ستون ماتریس A است. که در آن m تعداد معادلات دستگاه (تعداد محدودیت های مساله استاندارد) است.

تذکر

ستون های ماتریس $(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_m)$ وابسته خطی اند اگر به ازای برخی $\alpha_j \neq 0$ ها رابطه

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_j P_j + \dots + \alpha_m P_m = 0$$

برقرار باشد (ضمیمه ۳ در کتاب هلیه و لیبرمن، ۱۹۶۸)

مثال

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$ رابطه $P_3 = 2P_1 + 3P_2$ برقرار است پس ستونهای A استقلال خطی ندارند.

ثابت می شود که در یک مسأله ۲ متغیره هرگاه یک نقطه گوشه از تقاطع بیش از ۲ معادله حدهای به وجود آمده باشد مسأله تبهگن منحنی، تباهیده (Degenerate) است. این تعریف قابل تعمیم به n متغیر است. به این معنی که اگر در یک مسأله LP با n متغیر تصمیم بیش از n معادله (حداقل $n+1$) حدهای (شامل قیود نامنفی $x_j \geq 0$) در یک نقطه تلاقی کنند، مسأله تباهیده است.

اگر b و یکی از ستونهای A مستقل نباشند: مسأله تباهیده است

مثال

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

st.

$$6x_1 + 5x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 1.5$$

$$n - m = 4 - 2 = 2 \quad \text{nonbasic } x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 = 1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه جواب پایه $X_B = B^{-1}b$ غیر تباهیده باشد، استقلال خطی b و هر مجموعه از $m-1$ ستون از B است.

برای وابسته بودن لازم نیست حتماً یکی از ستونها ضریبی از ستون دیگر باشد، بلکه اگر

یکی از ستونها ترکیبی از ستونهای دیگر باشد باز هم وابسته است.

$$C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 = 0 \Rightarrow P_1 + \frac{a}{C_1}P_2 + \frac{b}{C_1}P_3 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 + aP_2 + bP_3 = 0$$

دستگاه $Ax=b$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$
 لااقل یک جواب تباهیده دارد زیرا لااقل

یک سری ۳ تایی از ستون‌های ماتریس Ab در یک رابطه خطی صدق می‌کنند.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 18x_3 + x_5 = 13 \end{cases}$$

در دستگاه $n-m=2$ (x_5, x_4) را صفر قرار می‌دهیم تا یک جواب پایه ای بدست

آوریم

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 2 & x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 & \Rightarrow x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 18x_3 = 13 & x_3 = 0 \end{cases}$$

بدون حل هم یکنفر ممکن است متوجه تباهدگی شود زیرا

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{جواب پایه تباهیده است} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

مثال ۱ (نمونه حالت تباهیدگی از شروع مساله)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

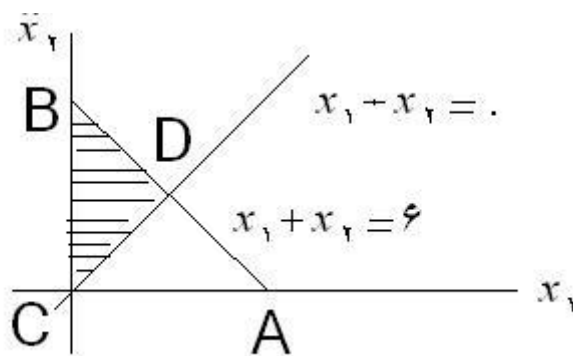
علت حالت تباهیدگی از شروع مساله :

$$Z = 5x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 6$$

$$x_1 - x_2 + s_2 = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ پس } P_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } b \text{ مستقل نیستند.}$$



نقطه C محل تلاقی ۳ خط از مساله است لذا با تباهیدگی روبرو هستیم.

همان طور که در جدول زیر دیده میشود، بیش از یک جواب پایه ای شدنی نمایانگر نقطه تباهیده C است:

نقطه اکستريم	C	B	C	D	C	A
متغیرهای غیر پایه	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$s_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_2 = 0$
	$x_2 = 0$	$s_1 = 0$	$s_2 = 0$	$s_2 = 0$	$s_2 = 0$	$S_1 = 0$
متغیرهای پایه	$S_1 = 6$	$x_2 = 6$	$S_1 = 6$	$x_1 = 3$	$s_1 = 6$	$S_2 = -6$
	$s_2 = 0$	$s_2 = 6$	$x_2 = 0$	$x_2 = 3$	$x_1 = 0$	$x_1 = 6$
ملاحظات	شدنی تباهیده	شدنی غیر تباهیده	شدنی تباهیده	شدنی غیر تباهیده	شدنی تباهیده	غیر شدنی

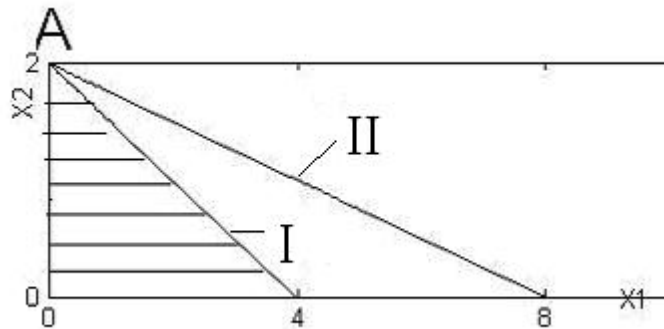
مثال ۲ مطلوبست حل ترسیمی مسئله زیر

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$I \quad x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$II \quad x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



شکل ۱۳ فضای جواب مثال

مسئله تباهیده است چون b و یکی از ستون های A مستقل نیستند

از لحاظ هندسی : در نقطه A سه نقطه گوشه بر هم منطبق اند:

۱- تلاقی معادله خط محدودیت اول با محور عرض ها

۲- تلاقی معادله خط محدودیت دوم با محور عرض ها

۳- تلاقی ۲ معادله خط های محدودیت اول و دوم

در یک تکرار اگر بردار جواب پایه ای شدن تباهیده باشد لزوماً جواب پایه شدن تباهیده نیست.

اگر نقطه ای تباهیده باشد بیش از یک جواب پایه شدن نمایانگر آن نقطه است (شکل ۱۳).

در مسأله تباهیده ممکن است با وضعیتی مواجه شویم که در تکرارهای بعدی بر روی همین نقاط

تباهیده دور بزنیم و در این دور زدن دچار مشکلاتی شویم.

تعریف دور زدگی (cycling)

منظور از دور زدن یا در حلقه افتادن اینست که با شروع از یک bfs تباهیده بعد از چند تکرار به همان

bfs برسیم (Z تغییری نکند).

توجه اگر در *Simplex* متغیر پایه ای خارج شونده یکتا نباشد (سطر لولا یکتا نباشد)، بدخواه یکی انتخاب می شود و این کار باعث اشکال در جواب بعد (تباہیدگی) می شود

مثال مطلوبست حل مساله پیشینه سازی زیر با سیمپلکس

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	-۳	-۹	۰	0	۰
S_1	۰	1	4	۱	0	۸
S_2	۰	۱	۲	۰	1	۴

جدول نهایی تباہیده است

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	1/5	0	0	4.5	18
S_1	0			1		
X_2	0	0/5	1	0	0/5	2

جواب حاصل از این جدول نهایی تباہیده است. $x_2^*=2$ $S_1^*=0$

زیرا مقدار S_1 که یک متغیر پایه است صفر است پس جواب بهینه تباہیده است.

اگر به جای S_1 و S_2 را خارج می کردیم:

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	-۰.۷۵	۰	۱/۲۵	۰	۱۸
X_2	0		۱			۲
S_2	0		۰			۰

جدول نهایی

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	۰	0	۱/۵	۱/۵	18

X_2	0					۲
X_1	0	$0/5$	1			۰

در تکرار آخر هیچ بهبودی نسبت به تکرار قبل مشاهده نمی‌شد. یعنی دچار دورزدگی شده است.

تمرین (صفحه ۱۶۴ کتاب، Winston ۱۹۹۴)

نشان دهید در هنگام حل مساله زیر با روش سیمپلکس اگر در انتخاب بین سطرهای ۱ و ۲ که نسبت یکسان دارند سطر ۱ انتخاب شود دورزدگی رخ می‌دهد.

Show that if ties in the ratio test are broken by favoring row 1 over row 2, cycling occurs when the following L.P is solved by the Simplex .

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$

$$\text{s.t. } -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$\frac{x_1}{3} + x_2 - \frac{x_3}{3} - 2x_4 \leq 0$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

انواع تباهیدگی

تباهیدگی در مسائل بر دو نوع است تباهیدگی موقت } تباهیدگی دائم } با مشاهده تباهیدگی نباید

عملیات را متوقف نمود بلکه باید تکرارها ادامه یابند. چون امکان دارد تباهیدگی موقت بوده و در

ادامه به یک جواب غیر تباهیده برسیم

حل مثال پیشینه سازی گفته شده در حالت تباهیدگی

جدول آغازین

پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	-5	-2	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	6
S_2	0	1	-1	0	1	0

جدول نهایی						
پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	0	0	$3/5$	$1/5$	21
X_2	0	0	1	$1/5$	$-1/5$	3
X_1	0	1	0	$1/5$	$1/5$	3

در جول اول تباہیدگی داریم اما در نهایت عدم تباہیدگی.
البته ممکن هم هست دچار دورزدگی شویم (تباہیدگی دائم). یعنی سیمپلکس در حل مسائل تباہیده ممکن است دچار لشکال شود.

بروز اشکال در الگوریتم سیمپلکس در حل مسائل تباہیده

اگر x_j متغیر ورودی به پایه باشد داریم $Z = C_B (X_B \text{ فعلی}) - (Z_j - C_j) x_j$ بعدی

فرض کنید در یک تکرار متغیر خروجی دارای حداقل نسبت $\theta = 0$ باشد، لذا مقدار $x_j = 0$ ورودی و $Z = Z \text{ فعلی}$ بعدی و هیچ بهبودی نخواهیم داشت. اگر بعد از چند تکرار بهبودی حاصل شود تباہیدگی موقت داشته ایم و اگر بعد از چند تکرار دوباره به یک bfs تباہیده برگردیم دچار دورزدگی و تباہیدگی دائم شده ایم.

روشهایی از جمله توسط دانتزیگ در ۱۹۶۳ و بلند^۱ در ۱۹۷۷ ارائه شده است که با تعدیل سسیمیپلکس از دور زدن جلوگیری می شود یعنی هیچ جواب پایه ای تکرار نمی شود . از جمله روشهای دیگر مقابله با تباهیدگی

روش چارنز (charnes)^۲، روش دانتزیگ، آوردن وولف (۱۹۵۳) و روش excitaphic در کتاب Bazaara است.

حالت ۲ - فضای جواب نامحدود (unbounded feasible space)

در این حالت که فضای جواب بیکران می باشد ممکن است مسئله یادارای جواب بهینه محدود باشد و یا دارای جواب نامحدود.

مثال زیر حالتی را نشان می دهد که در آن فضای جواب (شدنی) نامحدود اما مسئله جواب بهینه محدود دارد

مثال برای فضای جواب نامحدود اما جواب محدود:

$$\text{Max } Z = 6X_1 - 2X_2$$

s.t.

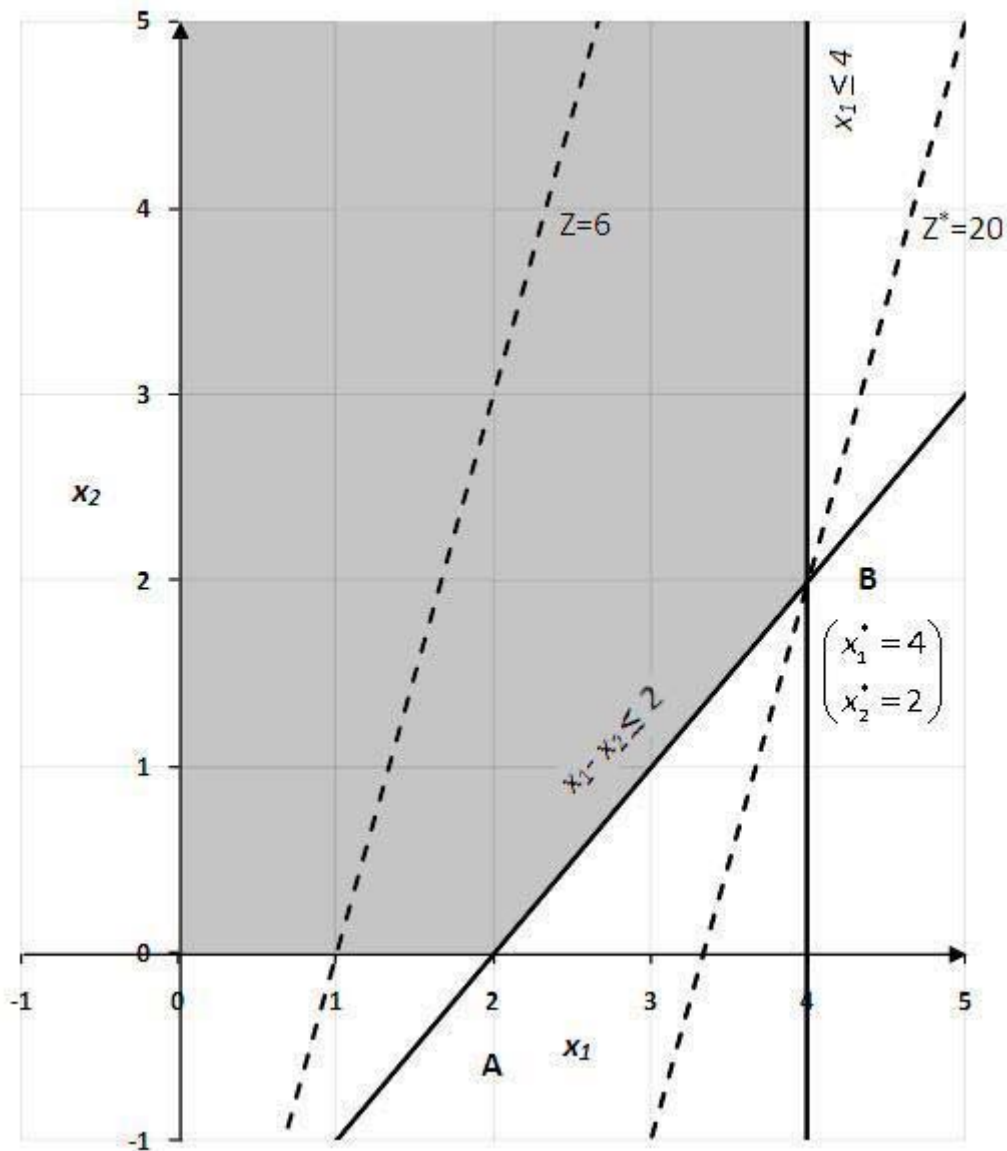
$$X_1 - X_2 \leq 2$$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

^۱ Bland

^۲ در ص ۱۷۵ کتاب Linear Programming دکتر Hadley



شکل ۱۴ فضا نامحدود جواب بهینه محدود^۱

جدول آغازین یک مسأله Max (شکل فوق)						
	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-6	$+2$	0	0	0
$\leftarrow s_1$	0	1	-1	1	0	2
s_2	0	1	0	0	1	4

^۱ باتشکر از آقای مهندس صادق کاظمی بخاطر رسم شکل

تکرار اول						
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	-۴	۶	۰	۱۲
X_1	۰	۱	-۱	۱	۰	۲
$\leftarrow S_2$	۰	۰	۱	-۱	۱	۲

تکرار دوم						
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_1	۱	۰	۰	۱	۵	۲۰
X_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴
X_2	۰	۰	۱	-۱	۱	۲

علامت تشخیص فضای جواب نامحدود در جدول آغازین مسئله بهینه سازی
 ثابت می شود اگر برای یک متغیر غیر پایه x_j تمام ضرایب و $Z_j - C_j > 0$ باشد فضای
 جواب بی کران می باشد اما ممکن است جواب بهینه محدود داشته باشیم.
 مورد زیر حالتی را نشان می دهد که فضای جواب بی کران و مسئله هم جواب بهینه نامحدود دارد .

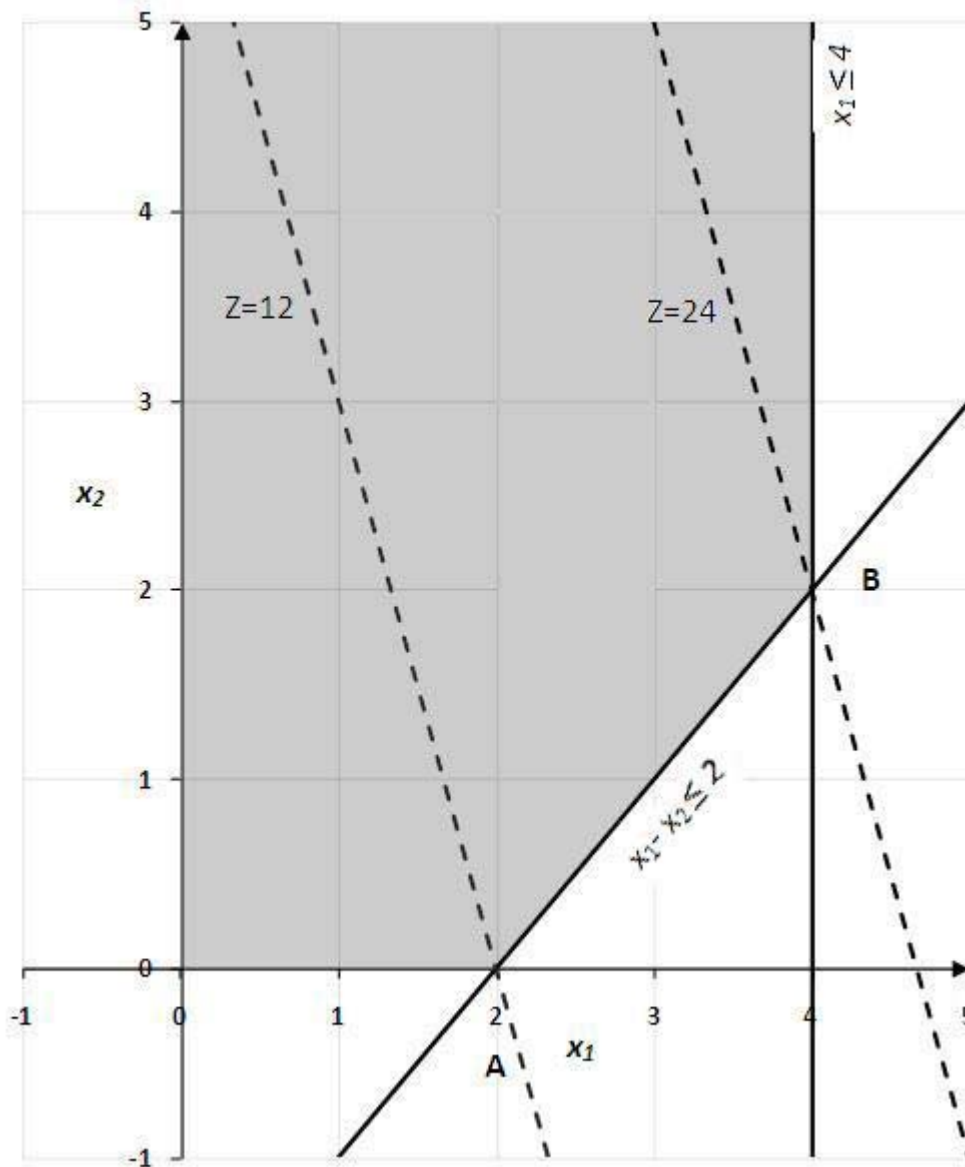
$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2$$

s.t.

$$I) \quad X_1 - X_2 \leq 2$$

$$II) \quad X_1 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



شکل ۱۵ فضا نامحدود جواب بهینه نامحدود^۱

علامت تشخیص جواب و فضای نامحدود از قضیه زیر قابل حصول است:

قضیه

در مسئله کمینه سازی: اگر در یکی از تکرارها حداقل یک $z_j - c_j > 0$ وجود داشته باشد و (تمام ضرایب $y_{ij} \leq 0$ مربوط به آن متغیر)، فضای جواب بیکران و مسئله جواب بهینه محدود ندارد: $\infty = Z^*$

^۱ باتشکر از آقای مهندس صادق کاظمی بخاطر رسم مجدد شکل (با نرم افزار Grapher)

در مسئله بیشینه سازی اگر در یکی از تکرارها حداقل یک $z_j - c_j < 0$ وجود داشته باشد و تمام $y_{ij} \leq 0$ مربوط به آن متغیر کوچکتر یا مساوی صفر باشد فضای جواب بیکران و مسئله جواب بهینه نامحدود دارد $\infty = Z^*$

مثال ۱ برای فضای نامحدود - جواب نامحدود (شکل فوق)

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4 \quad x_j \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2
Z	1	-6	-2	0	0
S_1	0	2	-1	1	0
S_2	0	1	0	-	1

توضیح: اگر یک x_j جدید بتواند وارد پایه شود توجه کنید چون $X_B = B^{-1}P_0 - (B^{-1}P_j)x_j$ در مسئله اگر $y_j = B^{-1}P_j \leq 0$ باشد X_B با افزایش $x_j \geq 0$ روبه افزایش گذاشته و هیچ یک از عناصر X_B صفر نمی شود تا از پایه خارج شود بلکه X_B نامحدود می شود و $Z = C_B X_B = \infty$

مثال ۲:

$$\text{Min } Z = -x_1 + 3x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad x_j \geq 0$$

چون در جدول آغازین یک $z_j - c_j > 0$ است و تمام y_{ij} زیر آن متغیر منفی است فضای جواب نامحدود است.

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
--	---	-------	-------	-------	-------	-----

Z	1	1	-3	0	0	0
S_1	0	-1	$+1$	1	0	2
S_2	0	-1	2	0	1	6

مثال برای حالت جواب نامحدود

$$\text{Max } Z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$$

$$6x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 10$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS	$ratio$
Z	1	-36	-30	3	4	0	0	0	
S_1	0			-1	0	1	0	5	
S_2	0	6	5	0	-1	0	1	10	

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
Z								
S_1								
X_1								

مسئله Max است و گفتیم در هر تکرار (اعم از جدول آغازین یا دیگر جدول‌ها) یک $Z_j - C_j$ منفی و $0 \leq y_j$ مربوطه باشد) جواب محدود نداریم.

در جدول زیر که مربوط به یکی از تکرارهای مسئله Max فوق است متغیری وجود دارد که $Z_j - C_j$ آن منفی است و کلیه عناصر بردار y_j آن نیز غیر مثبت است. پس جواب بهینه نامحدود است.

$$Z^* = \infty$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	2	-9	0	12	4	100
X_4	0			-6	1	6	-1	$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = B^{-1}P_0$
X_1	0	1	1	-1	0	1	0	

تشریح ریاضی

توجه کنید که X_3 در تکرار فوق می‌تواند وارد پایه شود ولی متغیر خروجی را نمی‌توان تعیین کرد، مقدار بردار جواب $X_B = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_1 \end{pmatrix}$ بر طبق فرمول زیر با انتخاب مقدار دلخواه برای X_3 که y_j آن غیر مثبت است قابل افزایش است و Z بهبود می‌یابد:

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_1 \end{pmatrix} = X_B = B^{-1}P_0 - \begin{pmatrix} y_3 \\ B^{-1}P_3 \end{pmatrix} x_3 \quad \text{مقدار جدید}$$

اگر $0 \leq y_j$ (تمام عناصر)، x_j را هر قدر بخواهیم می‌توانیم انتخاب کنیم X_B نامحدود می‌شود. Z هم نامحدود می‌گردد.

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 20 + 6x_3 \\ 5 + x_3 \end{pmatrix} \quad \text{در این مسئله } j=3 \text{ و داریم:}$$

اگر X_3 را برابر ۱۰۰ بگیریم و سایر متغیرهای غیر پایه را در صفر ثابت نگه داریم $\leftarrow$ ، $X_1=105$

$$X_4=620 \quad \text{پس از آنجا که} \quad X_1=105, \quad X_2=0, \quad X_3=100, \quad X_4=620$$

$$Z = 36(105) + (30)(0) - 3(100) - (4)(620) = 1000$$

این جواب در محدودیت‌های مسئله صدق می‌کند و مقدار Z بهتر از مقدار قبلی است.

آیا جواب‌های دیگری با مقدار Z بهتر وجود دارد؟ بله X_3 را باز هم بیشتر از ۱۰۰ بگیریم جواب‌هایی جدید به دست می‌آید که در محدودیت‌های مسئله صدق می‌کند و Z بیشتر می‌شود.

حالت ۳ - حالت جواب‌های بهینه چندگانه

این حالتی است که در آن گرچه مقدار بهینه تابع هدف منحصر به فرد است لکن مجموعه متغیرهایی که به این جواب می‌انجامد منحصر بفرد نیست. لازم به توضیح است یک تکنیک مورد استفاده جهت انتخاب از بین جوابهای چندگانه، برنامه ریزی آرمانی^۱ می باشد.

این حالت وقتی رخ می‌دهد که تابع هدف موازی محدودیتی باشد که به ازای جواب بهینه به صورت تساوی در می‌آید.

راه تشخیص این وضعیت در جدول نهایی:

هرگاه ضریب یک متغیر غیر پایه در سطر Z جدول بهینه $(z_j - c_j)$ صفر باشد نشانه چندگانه بودن جواب بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است، زیرا هرگاه آن را به عنوان متغیر ورودی انتخاب کنیم تابع هدف، به اندازه $\theta(z_j - c_j) = 0$ بهبود خواهد یافت یعنی نه کاهش می‌یابد و نه افزایش.

مثال

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2$$

$$\text{Subject to } I \quad 2x_1 + 7x_2 \leq 21$$

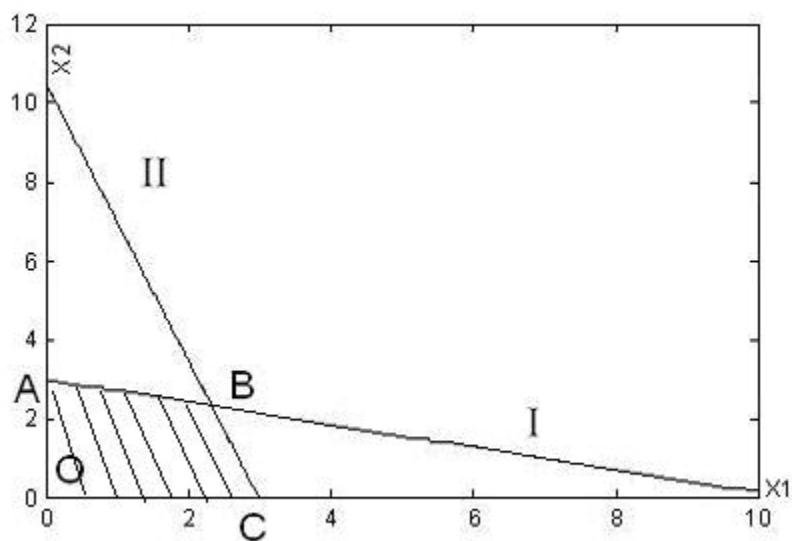
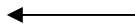
$$II \quad 7x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب	
Z	1	-4	-14	0	0	0	نسبت

¹ Goal programming

S_1	0	۲	7	1	0	21	
S_2	0	7	2	0	1	21	



شکل ۱۶- ناحیه جواب برای مثال فوق با تابع هدف موازی محدودیت اول

Basis	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	جواب
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0		1		0	3
S_2	0		0		1	15

جدول نهایی است جواب بهینه $x_1^* = 0$ $x_2^* = 3$

$$\Rightarrow A \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 3 \\ \hline s_2^* = 15 \end{cases}$$

اما چون $Z_j - C_j$ ضریب متغیر غیر پایه‌ای X_1 در جدول نهایی صفر است. این وضعیت حاکی از آن است که این جواب بهینه منحصر به فرد نیست. X_1 را جایگزین S_2 می‌کنیم.

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0	0	۱			
X_1	0	1	۰			

$$\Rightarrow B \begin{cases} x_1^* = \frac{7}{3} \\ x_2^* = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$Z^* = 42 \text{ تغییر ننموده است} /$$

دسته جواب چند گانه با داشتن چند جواب بهینه

ثابت می‌شود هرگاه k بردار $X_1 \dots X_k$ به تنهایی جواب بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی باشند. هر

ترکیب محدب از $X_1 \dots X_k$ نیز جواب بهینه خواهد بود. در این مسأله $k = 2$

برای مسأله فوق دسته جواب حاصل از هر ترکیب محدب از نقاط $A \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{vmatrix}$ نیز جواب خواهد

بود: $0 \leq \lambda \leq 1$ ، $\lambda X_A + (1 - \lambda) X_B$ (ص ۱۷۷ کتاب حمیدی طه)

$$\text{دسته جواب} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(1 - \lambda) \\ \frac{7 + 7\lambda}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{که در آن } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ جواب این مسئله است که همواره مقدار } Z^* = 42 \text{ را}$$

$$\begin{cases} X_1^* = \frac{\gamma}{3}(1-\lambda) \\ X_2^* = \frac{\gamma}{3}-\lambda \end{cases}$$

به دست می‌دهد. اما لازم نیست که ۲ یا چند جواب پایه ممکن بهینه داشته باشیم تا منجر به تعداد ∞ جواب بهینه شود.

دسته جواب چند گانه با داشتن یک جواب بهینه

ثابت می‌شود (Hadley, 1962 ص ۱۰۰) اگر در جدول بهینه $Z_j - C_j$ مربوط به یک متغیر غیر پایه

صفر بوده و $\begin{cases} y_{ij} \leq 0 \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$ و $X_B^* = (X_{B_1}^* \dots X_{B_m}^*)^t$ متغیرهای پایه در جدول بهینه باشد آنگاه به ازای هر $\gamma > 0$ جواب‌های شدنی شامل $m+1$ متغیر غیر صفر حاصل از رابطه زیر نیز یک جواب بهینه است.

$$\sum_{i=1}^m (X_{B_i} - \gamma y_{ij}) b_i + \gamma P_j = b \text{ or } P_0 \quad \gamma > 0$$

که در آن

b_i ستون i ام ماتریس B است $B = [b_1 \dots b_m]$.

مقادیر $m+1$ متغیر غیر صفر این دسته جواب‌ها عبارتند از

$$\begin{cases} X_{B_1}^* - \gamma \times y_{1j} \\ \vdots \\ X_{B_m}^* - \gamma \times y_{mj} \\ X_j^* = \gamma \\ \text{all other variables} = 0 \end{cases}$$

توضیح:

در صورتی می‌توان پذیرفت که این سری جواب جزو جواب چندگانه است که شرایط زیر را داشته باشد

(۱) در تمام محدودیت ها صدق کند (شدنی باشد).

(۲) مقدار تابع هدف برای آن همان مقدار قبلی $(C_B X_B^*)$ باشد.

۱- بررسی شدنی بودن. چون $\begin{cases} y_{ij} \leq 0 \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$ و $\gamma > 0$ پس تمام مقادیر آن جواب مثبت است.

آیا در محدودیت ها صدق می کند؟

$$BX_B + NX_N = ?$$

$$BX_B + NX_N = [b_1 \dots b_m] \begin{bmatrix} X_{B_1}^* - \gamma \times y_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{B_m}^* - \gamma \times y_{mj} \end{bmatrix} + [P_1, \dots, P_j, \dots] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(x_{B_1} - \gamma y_{1j})b_1 + \dots + (x_{B_m} - \gamma y_{mj})b_m + \gamma p_j$$

$$(x_{B_1}^* b_1 + x_{B_2}^* b_2 + \dots + x_{B_m}^* b_m) - (\gamma y_{1j} b_1 - \dots - \gamma y_{mj} b_m) + \gamma p_j =$$

$$B X_B - \gamma B y_j + \gamma P_j = \quad y_j = B^{-1} p_j \Rightarrow B y_j = P_j$$

$$B X_B - \gamma B (B^{-1} P_j) + \gamma P_j = B (B^{-1} b) - 0 = b$$

$$\Rightarrow BX_B + NX_N = b$$

این بستگی به γ پیدا نکرد و برابر $b = P_0$ شد. پس در محدودیت ها صدق می کند (شدنی می باشد)

۲ - آیا مقدار تابع هدف به ازای جواب جدید برابر مقدار قبلی یعنی $C_B X_B^*$ است؟

$$Z = C_B \begin{bmatrix} X_{B_1}^* - \gamma \times y_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{B_m}^* - \gamma \times y_{mj} \end{bmatrix} + c_j \gamma = C_B X_B^* - \gamma C_B y_j + c_j \gamma = C_B X_B^* - \gamma (z_j - c_j) = C_B X_B^*$$

مثال

$$\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2$$

S.t.

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

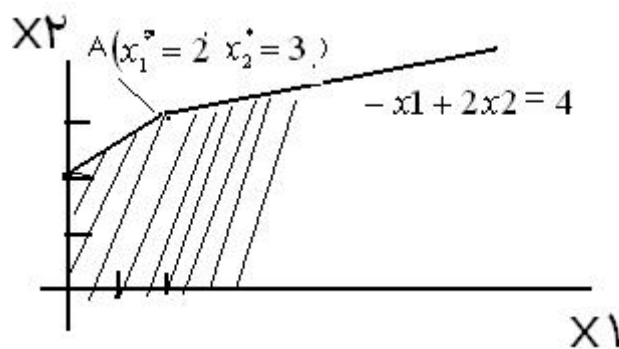
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جدول آغازین:

	<i>Z</i>	x_1	x_2	S_1	S_2	<i>RHS</i>
<i>Z</i>	۱	۱	-۲	۰	۰	۰
S_1	۰	-۱	۱	۰	۱	۴
S_2	۰	-۱	۲	۱	۰	۴

چون در جدول آغازین این مساله بیشینه سازی یک $z_j - c_j > 0$ است و تمام y_{ij} کوچکتر یا مساوی صفر هستند فضای جواب نامحدود است. $A(x_1^* = 2, x_2^* = 3)$



جدول نهایی چنین است.

	<i>Z</i>	x_1	x_2	S_1	S_2	<i>RHS</i>
<i>Z</i>	۱	۰	۰	۰	۱	۴
x_2	۰	۰	۱	-۱	۱	۳
x_1	۰	۱	۰	-۲	۱	۲

ضریب یک متغیر غیر پایه (S_1) در این جدول صفر است و ستون زیر آن غیر مثبت است

$$x_2^* = 3 - \gamma(-1)$$

پس کلیه جوابهای شامل متغیرهای $x_1^* = 2 - \gamma(-2)$ برای $\gamma \geq 0$ نیز بهینه است با $Z^* = 4$.
 $S_1^* = \gamma$

$$S_2^* = 0$$

اگر حالت جواب چندگانه رخ دهد تصمیم گیرنده باید بین جوابهای مختلف و براساس یک ضابطه دیگر انتخاب صورت دهد. شرکت امکان دارد نقطه A را برگزیند، تا نقطه B یعنی بجای تولید هر دو نوع محصول فقط یک نوع محصول تولید کند همانطور که گفته شد از تکنیک برنامه ریزی آرمانی برای انتخاب از میان جوابهای مختلف بهینه می توان بهره گرفت.

برطبق مسئله ۲۵ صفحه ۸۹۱ کتاب انگلیسی (Winston ۱۹۹۴): اگر در جدول نهائی جواب تباهیده باشد و $z_j - c_j$ یک متغیر غیر پایه صفر باشد جواب ممکن است منحصر بفرد باشد یا چندگانه باشد.

حالت ۴ - عدم وجود جوابهای ممکن یا شدنی Nonexisting feasible solution

مسائل برنامه ریزی خطی میتوانند دارای فضای جواب (شدنی یا موجه) نباشند. یعنی هیچ نقطه ای یافت نشود که در تمام محدودیتهای مسئله صدق کند در این حالت فضای جواب تهی است. این وضعیت را در روش سیمپکس می توان با حضور یک یا چند متغیر مصنوعی با مقداری غیر صفر در جدول بهینه تشخیص داد.

وجود متغیرهای پایه مصنوعی با مقدار مثبت در جدول نهائی دال بر اینست که با اضافه کردن این متغیرها که موجب گسترش فضای موجه مسأله می گردد، جریمه های تعیین شده برای آنها نتوانسته است منطقه موجه اضافه شده را مجدداً به اندازه منطقه موجه مساله اصلی برساند لذا مسأله جواب شدنی ندارد زیرا معنی وجود متغیر مصنوعی در پایه با مقدار مثبت در جدول نهائی این است که محدودیت مربوط به آن متغیر مصنوعی برقرار نیست پس مسئله جواب شدنی ندارد. بدیهی است وجود متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه، محدودیت متناظر با آن متغیر را نقض نمی نماید.

مثال ۱) برای حالت ۴ (عدم وجود جواب)

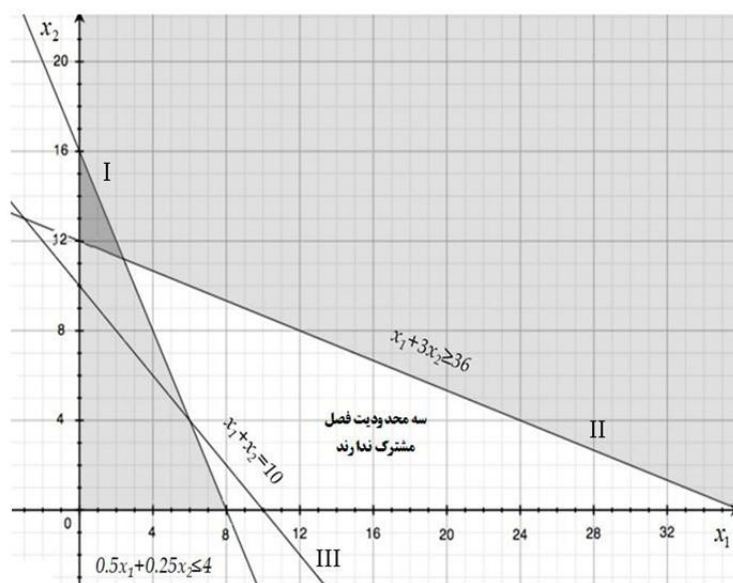
$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \text{ s.t. } I) \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$C \left| \begin{array}{c} 36 \\ 0 \end{array} \right| D \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| II) x_1 + 3x_2 \geq 36$$

$$E \left| \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right| F \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| III) x_1 + x_2 = 10 \quad x_j \geq 0$$

فضای جواب (شکل ۱۷) تهی است:



شکل ۱۷ ناحیه جواب مثال ۱

هیچ نقطه یا نقاطی نیست که در همگی محدودیت‌های فوق صدق کند پس این مسأله ناحیه شدنی یا ممکن (*feasible*) ندارد و لذا جواب ندارد. اگر بخواهیم از سیمپلکس استفاده کنیم نیاز به متغیر کمکی داریم.

جدول آغازین واقعی مطابق زیر بدست خواهد آمد

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS	
Z	۱	$2M - 2$	$4M - 3$	۰	$-M$	۰	۰	$36M$	نسبت
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱	۰	۰	۰	۴	۱۶
R_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۰	۱	۰	۰	۳۶	۱۲
R_2	۰	۱	۳	۰	-1	۱	۰	۱۰	۱۰
	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰	۱۰

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
Z	۱	$1-2M$	۰	۰	$-M$	۰	$3-\epsilon M$	
S_1	۰	$\frac{1}{\epsilon}$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{1}{\epsilon}$	۱/۵
R_1	۰	$\frac{1}{\epsilon}$	۰	۰	۰	۰	$\frac{1}{\epsilon}$	۶
X_2	۰	-2	۰	۰	-1	۱	-3	
	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰

مسئله کمینه سازی است و هیچ $z_j - c_j$ مثبت برای انتخاب متغیر ورودی موجود نیست پس جدول نهائی است و متغیر مصنوعی R_1 با مقدار مثبت در X_B است گفتیم که هر گاه در جدول نهائی روش M بزرگ حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت یافت شود مسئله اصلی جواب ممکن یا شدنی ندارد چرا که امکان ندارد متغیر مصنوعی مقدار غیرصفر در مسئله اصلی داشته باشد.

مثال ۲) برای حالت عدم وجود جواب (مهرگان، ۱۳۸، ص ۱۰۸)

$$\text{Max } Z = \epsilon x_1 + 3x_2 - MR$$

$$\text{s.t. : } x_1 + x_2 + S_1 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + S_2 = 3$$

$$x_1 - S_3 + R = \epsilon \quad \text{all variables nonnegative}$$

حل

۱۰۸ درج شده است

تأثیر متغیر مصنوعی بر منطقه موجه	اعداد سمت راست	R	S_p	S_r	S_1	x_2	x_1	Z	شماره سطر	متغیرهای اساسی
	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	Z
	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	S_1
	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	S_2
	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	R
	-۲M	۰	M	۰	۰	۰	۰	۰	۰	Z
	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	S_1
	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	S_2
	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	R
	$\frac{-5}{2}M + 6$	۰	M	$\frac{M}{2} + 2$	۰	$\frac{M}{2} - 5$	۰	۰	۰	Z
	$\frac{3}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	S_1
	$\frac{3}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	x_1
	$\frac{5}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	R
	$-2M - 11$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	Z
	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	x_2
	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	x_1
	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	R

جدول ۱۵ - ۳. تکرارهای سیمپلکس برای مسأله‌ای بدون جواب موجه

تکرارهای فوق را با شکل ترسیمی مسأله مقایسه کنید.

تمرین مسأله فوق را به روش ترسیمی حل کنید

در جدول آخر هیچ متغیری برای ورود به پایه این مسئله بیشینه سازی نداریم و یک متغیر مصنوعی در پایه است پس مسئله جواب شدنی ندارد.

توجه اگر متغیر آزاد مثل x_j در مسأله LP باشد آنرا تبدیل به تفاضل ۲ متغیر غیرمنفی می‌کنیم مثلاً

$$x_j = x'_j - x''_j \quad x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

- $Z_j - C_j$ آن دو در هر تکرار قرینه است

- p'_j, p''_j آن دو در مسئله استاندارد قرینه است

- y'_j, y''_j آن ها در هر تکرار قرینه است

- x'_j, x''_j هیچگاه با هم در پایه قرار نمی‌گیرند: $x'_j \times x''_j = 0$

اگر x'_j در پایه باشد مثلاً داشته باشیم

پایه	.	x_j'	x_j''	.	<i>RHS</i>
.		۰	۰		
.		۰	۰		
x_j'		۱	-۱		
.		۰	۰		
.		۰	۰		

x_j'' نمی تواند در پایه باشد زیرا یکی از اعداد زیر آن در جدول -۱ می باشد و با وجود -۱، x_j'' نمی تواند در پایه باشد.

در ضمن شایان ذکر است در روش سیمپلکس اگر متغیرهای غیر مثبت داشته باشیم مثل $x_4, x_5 \leq 0$ متغیرهای جدید غیر منفی زیر را تعریف می کنیم.

$$X_5' = -X_5 \quad X_4' = -X_4$$

روش سیمپلکس اصلاح شده *Revised simplex*

در این الگوریتم نسبت به روش سیمپلکس معمولی مقداری صرفه جویی در محاسبات غیر لازم صورت گرفته است.

در این روش برخی از محاسبات روش سیمپلکس را حذف نموده اند مثلاً تمام $Z_j - C_j$ ها محاسبه نمی شود فقط $Z_j - C_j$ متغیرهای غیر پایه محاسبه می شود. مقدار جدید تمام بردارهای ستونی در تکرار بعدی محاسبه نمی گردد.

در این روش هر تکرار شامل ۳ مرحله زیر است. (ص ۴۲۵ دکتر مهرگان)

مرحله یک برای تعیین متغیر ورودی صورت می گیرد در مرحله ۲ متغیر خروجی تعیین می شود و در مرحله ۳ B^{-1} جدید و جواب جدید (متغیرهای پایه جدید) تعیین و به مرحله ۱ برگشت می شود.

در این الگوریتم برای محاسبه B^{-1} می‌توان از یکی از روش‌های جاروب کردن موسوم به عملیات ردیفی یعنی تبدیل ماتریس I طبق عملیات روی سطرها به B^{-1} بهره گرفت.

مراحل سیمپلکس اصلاح شده برای مسئله بیشینه سازی

مرحله ۱: تعیین متغیر ورودی

بردار $Z_j - C_j$ های متغیرهای غیر پایه را در هر تکرار با استفاده از فرمول $C_B B^{-1} N - C_N$ بیابید اگر تمام

$Z_j - C_j \geq 0$ بجواب بهینه رسیده‌اید $X_B^* = B^{-1} P_0$, $Z^* = C_B X_B^* = C_B B^{-1} P_0$ در غیر اینصورت متغیری بعنوان

ورودی انتخاب می‌شود که دارای منفی ترین $Z_j - C_j$ باشد.

مرحله ۲: تعیین متغیر خروجی

فرض کنید متغیر ورودی x_j و ضرایب آن در محدودیت های مسئله استاندارد باشد بردار ضرائب

x_j در تکرار فعلی برابر است با $y_j = B^{-1} P_j$. مقدار متغیرهای پایه در تکرار فعلی عبارت است از

$$X_B = B^{-1} P_0$$

آنگاه با ضابطه $\left\{ \min_i \left\{ \frac{(X_B)_i}{y_{ij}} \mid y_{ij} > 0 \right\} \right\}$ مشخص کنید که متغیر خروجی کدام است.

مرحله ۳:

B_{new}^{-1} (جدید) را محاسبه کنید و مقدار متغیرهای پایه‌ای جدید را براساس فرمول

$$X_B = B_{new}^{-1} P_0$$

بدست آورده و به مرحله اول برگردید.

مثال:

مسئله استاندارد زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40 \end{cases} \quad x_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad Z = 0$$

تکرار اول مرحله اول

$$X_i \geq 0 \quad s_i \geq 0 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_B = (0, 0), X_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{بردار } Z_j - C_j = C_B B^{-1} N - C_N = (0, 0) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - (4 \ 3 \ 6) = (-4 \ -3 \ -6)$$

چون منفی ترین ضریب ۶- و متعلق به متغیر x_3 است پس x_3 ورودی است
مرحله ۲: تعیین متغیر خروجی براساس

$$X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = B^{-1}P_0 \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad y_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{X_{Bi}}{y_{ij}} \mid y_{ij} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{X_{Bi}}{y_{i3}} \right\} = \left(\frac{30}{3}, \frac{40}{3} \right) = \frac{30}{3}$$

$\frac{30}{3}$ متناظر با S_1 است پس S_1 خروجی است.

مرحله ۳- محاسبه B^{-1} , X_B جدید (برای تکرار دوم)

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ S_2 \end{pmatrix} = (x_3 \ S_2)^t = B_{new}^{-1}P_0 \quad B_{new}^{-1} = ?$$

$$B^{-1} \text{ جدید را به کمک جاروب کردن } B_{new} \mid I = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ بدست می آوریم}$$

$$I \mid B^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{مقدار بهبود در تابع هدف در تکرار دوم} = -\frac{30}{3} \times (-6) = 60$$

$$X_N = (x_1 \ x_2 \ S_1)^t = 0 \text{ متغیرهای غیر پایه}$$

تکرار دوم- مرحله یک تعیین متغیر ورودی (entering)

بردار $Z_j - C_j$ های مربوط به متغیرهای غیر پایه (X_N) عبارتست از

$$x_1 \ x_2 \ S_1$$

$$C_B B^{-1}N - C_N = (6 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - (4 \ 3 \ 0) =$$

$$(x_1, x_2, S_1) \text{ برابر } Z_j - C_j \text{ متغیرهای غیر پایه} = (2 \ -1 \ 2)$$

$\Leftarrow x_r$ متغیر ورودی است.

$$\text{مرحله ۲ تعیین متغیر خروجی براساس } \min \left\{ \frac{y_{Bi}}{y_{i_2}} \mid y_{i_2} > 0 \right\}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_r \\ s_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } \left\{ \frac{10}{1}, \frac{10}{\frac{2}{3}} \right\} = \frac{10}{1} \quad \text{متناظر } S_2 \text{ است} \quad \text{پس } S_2 \text{ خروجی است.}$$

مرحله ۳ : X_B جدید و B_{new}^{-1} جدید برای تکرار سوم

$$X_B = (x_r \quad x_s)^t$$

$$B_{new} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{new}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_B = \begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix} = B^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$X_N = (x_1 \quad s_1 \quad s_r)^t$$

$$AZ = -\theta(z_j - c_j) = -(10)(-1) = 10$$

10 = مقدار بهبود در تابع هدف در تکرار سوم

تکرار سوم

$$\text{بردار } Zj - Cj \text{ غیر پایه ها} = C_B B^{-1}N - C_N = (6 \ 3) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (4 \ 0 \ 0) = (1 \ 1 \ 1)$$

چون تمام $Zj - Cj$ مربوط به غیر پایه ها غیر منفی اند به جواب نهائی رسیده ایم

$$Z^* = C_B X_B = (6 \ 3) \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{pmatrix} = 70$$

مثال از صفحات 425-428 دکتر مهرگان اخذ شده بود

یک تذکر: در مورد دروس قبل ناحیه جواب لزوماً سطح نیست ممکن است خط یا نقطه باشد.

۱۰۲

مثال ۱: یک مسئله lp در زیر داده شده فضای جواب آن که در شکل ۱۸ دیده میشود شامل پاره خط E_1E_2 است مسئله استاندارد آن شامل ۳ متغیر و ۲ محدودیت است در هر نقطه گوشه $۱=۳-۲$ متغیر باید صفر شود.

مشخصات نقاط گوشه

$$Z = ۲x_1 + x_2$$

s.t.

$$x_1 + ۲x_2 \leq ۵$$

$$x_1 = ۳ \quad \text{all } x, S \geq ۰$$

$$\begin{cases} ۱) x_1 + ۲x_2 + S_1 = ۵ \\ ۲) x_1 = ۳ \end{cases} \quad E_2 : \begin{cases} x_1 = ۳ \\ x_2 = ۰ \end{cases} \quad E_1 : \begin{cases} x_1 = ۳ \\ x_2 = ۱ \end{cases}$$

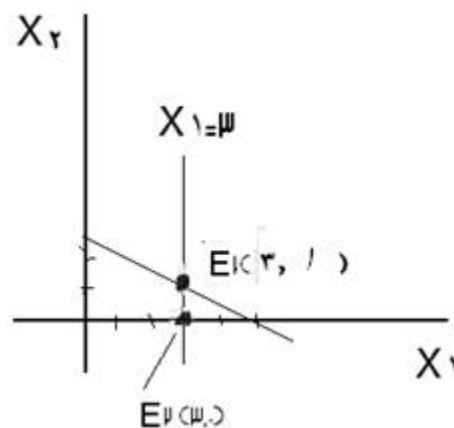
	E_2	E_1
x_1	۳	۳
x_2	۰	۱
S_1	۲	۰

در مساله استاندارد

تعداد متغیر $n=۳$

تعداد محدودیت $m=۲$

$n-m=1$ = تعداد متغیر غیر پایه



شکل ۱۸ ناحیه جواب مثال ۱: پاره خط E1 E2

تحقیق کنید جواب بهینه این مساله

اگر بیشینه سازی باشد در $x_1^* = 3, x_2^* = 1$ با $Z^* = 7$ واقع می شود و

اگر کمینه سازی باشد در $x_1^* = 3, x_2^* = 0$ با $Z^* = 6$ واقع می شود

مثال ۲

در مسئله LP مقابل:

$$Z = 2x_1 + x_2$$

s.t.

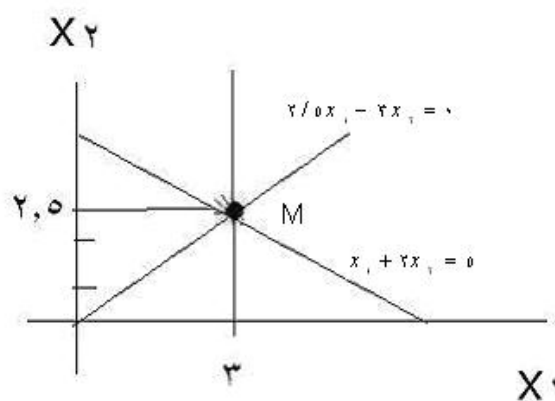
$$1) x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$2) x_1 = 3$$

$$3) 2.5x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\text{all } x \geq 0$$

ناحیه جواب نقطه $M : \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2.5 \end{cases}$ در شکل زیر است:



شکل ۱۹ ناحیه جواب: یک نقطه

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2.5 \\ S_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ جواب مساله } \quad \text{که تباهیده می باشد}$$

چند الگوریتم روش سیمپلکس^۱

درمبحث *Simplex* علاوه بر

1) Revised Simplex

کارهایی از قبیل زیر نیز انجام گرفته است

2) *Bartels – Golub Method* بهبود نسبت به: *Revised Simplex*

3) *sparse Bartels Golub Method*

بهبود نسبت به متد *Bartels – Golub* ((۲) صورت گرفته

4) *The Forrest – Tomlin Method*

متد متفاوت

5) *Reid's Method*

بهبود نسبت به *sparse Bartels* (3)

درضمن بحث بهینه سازی بکمک نقاط داخلی (Interior point strategies for LP)

در فصل ۶ Radin(1997) و یا YinYuYe() است

^۱ <http://www.cise.ufl.edu/~davis/Morgan/>

مساله دوال (دوگان، همزاد، مزدوج، ثانویه، *Dual*)

مفهوم **Dual** در زمینه‌هایی مثل برنامه‌ریزی خطی، اقتصاد، فیزیک، مهندسی برق^۱، ریاضیات مورد بحث است.

مساله دوال (دوگان، همزاد، مزدوج، ثانویه) در برنامه‌ریزی خطی

برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی مساله ای بنام دوال (دوگان، همزاد، مزدوج، ثانویه تعریف می‌شود که خود یک مساله برنامه‌ریزی خطی است و رابطه‌ای تنگاتنگی با یکدیگر دارند. با داشتن جدول بهینه یکی، جواب بهینه دیگری را میتوان بدست آورد. گاه حل مساله دوال که تعداد محدودیت

کمتری نسبت به مساله اولیه (**Primal**) داشته باشد راحت‌تر می‌باشد تا حل مساله اولیه دوال همچنین در مبحث تحلیل حساسیت که بعداً مطرح می‌شود نقش مهمی ایفاء می‌نماید زیرا به تعریف مساله **Dual** ($\text{Primal} \neq$) پرداخته می‌شود.

تعریف: اگر فرم *canonical* را در نظر بگیریم

^۱ یک کاربرد (مدار الکتریکی دوال) ص ۲۲۶ Hadley

۱۰۶

$$\text{Max } Z_X = CX$$

st

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$\text{Min } Z_Y = b^t Y$$

st.

$$A^t Y \geq C^t$$

$$Y \geq 0$$

Dual

$$\Leftrightarrow$$

مزدوج

$$\text{Max } Z_X = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

st.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{Min } Z_Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

st.

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq c_j$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Dual

$$\Leftrightarrow$$

مزدوج

برای نوشتن دوگان لازم نیست b_i ها مثبت باشند.

در دوال نویسی

یک مسأله Min با محدودیت‌های $(\geq \dots)$ و متغیرهای غیر منفی $\Leftrightarrow$ یک مسأله بیشینه‌سازی با محدودیت‌های $(\leq \dots)$ و متغیرهای غیر منفی

توجه ثابت می‌شود اگر مسأله اولیه بیشینه‌سازی باشد $Z_X \leq Z_X^* = Z_Y^* \leq Z_Y$ و در هر صورت $Z_X^* = Z_Y^*$

ثابت می‌شود که دوالِ دوال = اولیه

. مثال مطلوبست مزدوج مسأله کمینه‌سازی زیر

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

st

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

st

$$-3x_1 - x_2 \geq -4$$

$$\rightarrow 4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

متغیر دوال

$$y_1$$

$$y_2$$

$$y_3$$

مزدوج مسأله

۱۰۷

$$\text{Max } Z_y = -4y_1 + 6y_2 - 3y_3$$

s. t. Dual variable

$$-3y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4 \quad x_1$$

$$-y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1 \quad x_2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

تعداد محدودیت اولیه = تعداد متغیر Dual

تعداد متغیر اولیه = تعداد محدودیت Dual

علامت محدودیت Dual با توجه به علامت متغیر اولیه تعیین می شود.

علامت y_i از روی علامت محدودیت i ام اولیه تعیین می شود.باینطریق که اگر علامت محدودیت در مساله بیشینه سازی اولیه به صورت $b_i \leq$ باشد علامت $y_i \geq 0$ خواهد بود.

حال در محدودیت ها اگر بجای نامساوی با تساوی مواجه شدیم چه کنیم؟

$$\text{Max } Z_x = 4x_1 + 2x_2$$

st. متغیر دوال

$$2x_1 + x_2 \leq 2 \quad y_1$$

$$6x_1 + 7x_2 = 5 \rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \leq 5 & y_1' \\ -6x_1 - 7x_2 \leq -5 & y_1'' \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z_y = 2y_1 + 5y_1' - 5y_1''$$

$$\text{st } 2y_1 + 6y_1' - 6y_1'' \geq 4$$

$$y_1 + 7y_1' - 7y_1'' \geq 2$$

$$y_1, y_1', y_1'' \geq 0$$

آیا می توانستیم مستقیماً از روی مساله اصلی Dual را بنویسیم؟ بله

با تغییر متغیر $y_1 = y_1' - y_1''$ در مساله فوق داریم:

$$\text{Min } Z_y = 2y_1 + 5y_1$$

$$2y_1 + 6y_1 \geq 4$$

$$y_1 + 7y_1 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_1 \text{ آزاد}$$

پس اگر مساله اولیه محدودیتی به صورت تساوی داشت در مساله دوال، متغیر مربوطه آزاد در علامت

خواهد بود. بالعکس اگر در مساله اولیه متغیری علامت آزاد داشت علامت محدودیت مربوطه در دوال

تساوی خواهد بود.

مطلوبست دوال مساله زیر

۱۰۸

$$\text{Min } Z_y = 5y_1 + 2y_2$$

$s.t$ متغیر دوال

$$y_1 + 2y_2 \geq 5 \quad x_1$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12 \quad x_2$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4 \quad x_3$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \text{ آزاد}$$

$$\text{Max } Z_x = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول زیر که از ص ۱۵۹ دکتر مهرگان گرفته شده است برای نوشتن همزاد یک مساله LP مفید است

کمینه سازی		بیشینه سازی
اولیه ثانویه		ثانویه اولیه
تعداد متغیرها	۱	تعداد محدودیت‌ها
متغیر غیرمنفی	۲	محدودیت $\leq$ ($\leq$)
متغیر غیرمثبت	۳	محدودیت $\geq$ ($\geq$)
متغیر آزاد در علامت	۴	محدودیت $=$ ($=$)
تعداد محدودیت‌ها	۵	تعداد متغیرها
محدودیت $\geq$ ($\geq$)	۶	متغیر غیرمنفی
محدودیت $\leq$ ($\leq$)	۷	متغیر غیرمثبت
محدودیت $=$ ($=$)	۸	متغیر آزاد در علامت
عدم‌سمت راست برای محدودیت‌ها	۹	ضریب تابع هدف برای متغیر i ام
ضریب تابع هدف متغیر i ام	۱۰	عدم‌سمت راست برای محدودیت‌ها
ضریب A^T متغیر i در محدودیت j	۱۱	ضریب A متغیر i در محدودیت j
برای متغیر i (n)		برای متغیر i (n)

حل مساله اتوبوسی (کتاب حمدی طه ص ۱۰۰۰)

X_i : تعداد اتوبوس‌هایی که در ساعت i کار خود را شروع نموده‌اند.

^۱ با تشکر از خانم مهندس دربندی

$$x_{24} + x_{23} + x_{22} + x_{21} + x_{20} + x_1 \geq b_1$$

$$x_1 + x_{24} + x_{23} + x_{22} + x_{21} + x_2 \geq b_2$$

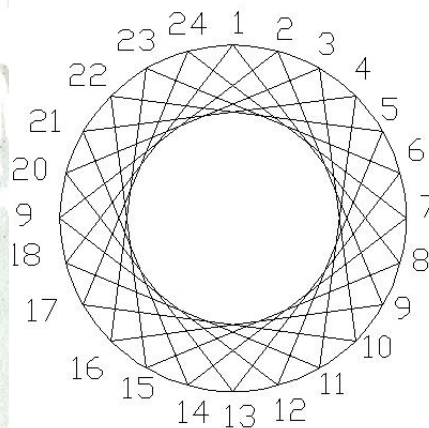
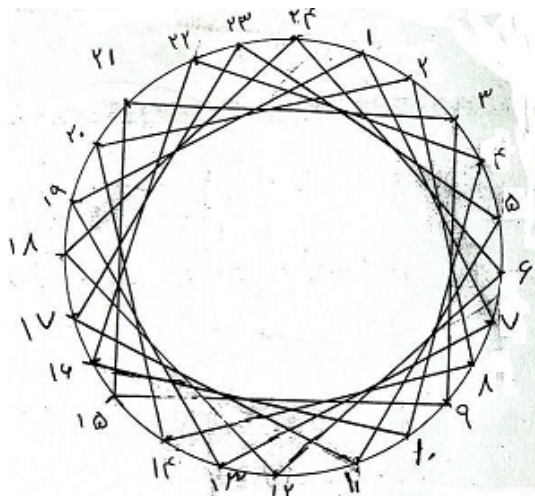
$$x_2 + x_1 + x_{24} + x_{23} + x_{22} + x_3 > b_3$$

.

.

.

$$\text{Min } C_1[b_1 - (x_{24} + x_{23} + x_{22} + x_{21} + x_{20} + x_1)]$$



دو مطلب قابل ذکر :

کمینه سازی عبارت غیر خطی $\max(x - 1, 3x + 2) = y$ معادل است با

$$\text{Min } z = y$$

$$y \geq x - 1$$

$$y \geq 3x + 2$$

$$y \text{ آزاد}$$

نوشتن **Dual** بکمک ماتریس ترانسپوز (ترانهاده)

در ذیل کوشش شده است که با استفاده از ترانهاده یک ماتریس به نوشتن مسئله ثانویه

کمکی شده باشد. فرض کنید بنخواهیم ثانویه مسئله زیر را بنویسیم:

۱۱۰

$$-3y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4$$

$$-y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

$$\text{Min } Z_y = -4y_1 + 6y_2 - 3y_3$$

$$Y \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ Z_x \end{array}$$

$$-3x_1 - x_2 \leq -4$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -3$$

$$\text{Max } Z_x = 4x_1 + x_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

علامت متغیر یک مسأله از روی علامت محدودیت مسأله دیگر تعیین می‌شود.

تست

$$\text{نقطه : } A \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{array} \right.$$

دارد؟

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 3 \end{array} \right. \quad (4) \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 1 \end{array} \right. \quad (3) \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \quad (2) \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

راهنمایی: یک راه اینست که دوال را نوشت. هر نقطه در آن صدق کرد جوابست.

تعیین جواب بهینه مسأله اولیه و یا دوال از جدول بهینه Simplex مسأله همزاد آن

(بخش ۳-۴ ص ۱۰۲ H.T و ص ۱۵۱ دکتر مهرگان)

جواب بهینه هر مسئله را که داشته باشیم جواب دیگری قابل تعیین است.

جدول بهینه مسأله اولیه شامل تمامی اطلاعات موجود در جدول بهینه مسأله ثانویه است و بالعکس برای یافتن این اطلاعات:

۱- یکی از ۲ مسأله (اولیه، ثانویه) را برای حل انتخاب و جدول بهینه آنرا محاسبه کنید.

۲- جواب بهینه مسأله دیگر (ثانویه) در سطر Z جدول بهینه این مسأله (جدول بهینه بند ۱) قرار دارد.

۳- مقدار متغیرهای تصمیم مسأله دیگر (ثانویه) در سطر Z زیر متغیرهای پایه شروع مسأله در جدول آغازین واقعی این مسأله (اولیه) قرار دارند.

۴- در صورتی که مسأله اولیه بصورت فرم متعارفی

$$Max Z = CX$$

$$S.t.$$

$$AX \leq b$$

$$X_j \geq 0$$

باشد مقدار متغیرهای تصمیم مسأله ثانویه، همان مقداری است که در بند ۳ آنها را بدست آورده‌اید.

۵- در صورتی که مسأله اولیه بصورت غیر متعارفی بود و به روش M بزرگ حل شده باشد M ها را از مقادیر بدست آمده در بند ۳ حذف کنید و به بند ۶ مراجعه کنید.

۶- اگر عیناً خود تابع هدف اصلی مسأله را بهینه سازی نموده‌اید مقادیر بدست آمده در بند ۵ مقدار بهینه متغیرهای تصمیم ثانویه اند.

چنانچه قرینه آنرا بهینه سازی نموده‌اید مقادیر بدست آمده در بند ۵ را در (۱-) ضرب نمائید تا مقدار بهینه متغیرهای تصمیم ثانویه حاصل شود.

مثال: حل مساله اولیه و ثانویه آن

$$Max Z_x = 7x_1 + 10x_2$$

$$s.t.$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 36 \quad \Rightarrow Dual : 3y_1 + 2y_2 \geq 7$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 40 \quad 2y_1 + 4y_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad y_1, y_2 \geq 0$$

جدول آغازین اولیه

	Z_x	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_x	۱	-۷	-۱۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۳	۲	۱	۰	۳۶
S_2	۰	۲	۴	۰	۱	۴۰

جدول بهینه مساله اولیه

	Zx	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۱	۲	$۱۱۶ = Z_x^*$
x_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۸
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	۶

جواب ثانویه از روی جدول نهایی اولیه	جواب اولیه مستقیماً
$y_1^* = 1$	$x_1^* = 8$
$y_2^* = 2$	$x_2^* = 6$
$Z_y^* = Z_x^* = ۱۱۶$	$Z_x^* = ۱۱۶$

حل Dual بصورت اصلی خودش (Min)

جدول آغازین

	Z_y	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS	نسبت
Z_y	۱	$-36+5M$	$6M-40$	$-M$	$-M$	۰	۰	$17M$	
R_1	۰	۳	۲	-1	۰	۱	۰	۷	3.5
R_2	۰	۲	۴	۰	-1	۰	۱	۱۰	۲.۵

تکرار بعد

	Z_y	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS	نسبت
Z_y	۱	$-16+2M$	0	$-M$	$-10+\frac{M}{2}$	۰	$10-\frac{3M}{2}$	$2M+100$	
R_1	۰	۲	۰	-1	$0/5$	۱	$-0/5$	۲	۱
y_2	۰	$0/5$	۱	۰	$-0/25$	۰	$0/25$	$2/5$	۵

جدول بهینه Dual

	Z_y	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS
Z_y	۱	۰	۰	-8	-6	$8-M$	$6-M$	۱۱۶
y_1	۰	۱	۰	$-0/5$	0.25	$0/5$	-0.25	۱
y_2	۰	۰	۱	0.25	$-\frac{3}{8}$	-0.25	$\frac{3}{8}$	۲

جواب ثانویه مستقیماً	جواب اولیه از روی جدول نهایی ثانویه و اینکه فرم اصلی مساله بهینه شده
$y_1^* = 1$	باتوجه به $8-M$ $x_1^* = 8$
$y_2^* = 2$	باتوجه به $6-M$ $x_2^* = 6$
$Z_y^* = 116$	$Z_x^* = Z_y^* = 116$

حل اولیه با قرینه تابع هدف - یعنی حل $Primal$ بصورت Min

$$Min \quad -Z_x = -7x_1 - 10x_2$$

	Zx	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
--	------	-------	-------	-------	-------	-------

Z_x	-۱	۷	۱۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۳	۲	۱	۰	۳۶
s_2	۰	۲	۴	۰	۱	۴۰
Z_x	-۱	۲	۰	۰	-۲/۵	-۱۰۰
s_1	۰	۲	۰	۱	-۰/۵	۱۶
x_2	۰	۰/۵	۱	۰	۰/۲۵	۱۰
Z_x	-۱	۰	۰	-۱	-۲	-۱۱۶
x_1	۰	۱	۰	۰/۵	-۰/۲۵	۸
x_2	۰	۰	۱	-۰/۲۵	۰/۳۷۵	۶

جواب ثانویه از روی

جدول نهایی اولیه با

قرینه تابع هدف

باتوجه به بند ۶-۲

$$y_1^* = -(-1) = 1$$

باتوجه به بند ۶-۲

$$y_2^* = -(-2) = 2$$

$$Z_y^* = Z_x^* = ۱۱۶$$

جواب

اولیه از حل اولیه با قرینه

تابع هدف

$x_1^* = 8$
$X_2^* = 6$
$-Z_x^* = (-116)$ $Z_x^* = 116$

حل بیشینه سازی ثانویه با قرینه تابع هدف

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z_y &= 36y_1 + \varepsilon y_r + MR_1 + MR_r \equiv \\
 \text{Max } -Z_y &= -36y_1 - \varepsilon y_r - MR_1 - MR_r \\
 3y_1 + 2y_r - L_1 + R_1 &= 7 \\
 2y_1 + \varepsilon y_r - L_r + R_r &= 10 \\
 y_1, y_r &\geq 0 \quad L > 0 \quad R > 0
 \end{aligned}$$

جدول مقدماتی

	Z_y	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS
Z_y	-۱	۳۶	۴۰	۰	۰	M	M	۰
R_1	۰	۳	۲	-۱	۰	۱	۰	۷
R_2	۰	۲	۴	۰	-۱	۰	۱	۱۰

جدول آغازین

	Zy	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS	نسبت
Zy	۱	$۳۶-۵M$	$۴۰-۶M$	M	M	۰	۰	$-۱۷M$	
R_1	۰	۳	۲	-۱	۰	۱	۰	۷	
R_2	۰	۲	۴	۰	-۱	۰	۱	۱۰	

جدول بهینه مساله بیشینه سازی Dual با قرینه تابع هدف

	Zy	y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	RHS
Zy	-1	۰	۰	۸	۶	$M-8$	$M-6$	-۱۱۶
y_1	۰	۱	۰	-۰/۵	0.25	۰/۵	-0.25	۱
y_2	۰	۰	۱	0.25	$-\frac{3}{8}$	-0.25	$\frac{3}{8}$	۲

جواب ثانویه از حل ثانویه با قرینه تابع هدف	جواب اولیه از روی جدول نهایی ثانویه باقرینه تابع هدف
$y_1^* = 1$	باتوجه به بند ۵ و بند ۶-۲ $x_1^* = -(\cancel{M} - 8) = 8$
$y_2^* = 2$	باتوجه به بند ۵ و بند ۶-۲ $x_2^* = -(\cancel{M} - 6) = 6$
$-Z_y^* = (-۱۱۶)$ $Z_y^* = ۱۱۶$	$Z_x^* = Z_y^* = ۱۱۶$

تعبیر اقتصادی مسأله Dual

مثال زیر را در نظر گرفته و *Primal* و *Dual* آنرا می نویسیم.

میزان مورد نیاز از هر منبع برای هر واحد محصول				
Product Resource	Desk	Table	Chair	تعداد موجود از منبع
Lumber	8 board ft	6 b.ft	1b.ft	48 b.ft
Finishing	4 hours	2hours	1.5hours	20hours
Capenatry	2hours	1.5hour	0.5hour	8hours
Price	\$60	\$30	\$20	

x_i = مقدار تولیدی از محصول i

X_i = amount of product i to be produced

Primal : $Max Z_x = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$s.t$	متغیرهای ثانویه
$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$	y_1
$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$	y_2
$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$	y_3
$x_j \geq 0$ ها	

فرض کنید پیمانکاری تمام منابع را می خواهد بخرد و مایل به تعیین قیمت اقتصادی هر واحد از منابع

است (یعنی y_1, y_2, y_3). با در نظر گرفتن این مطلب تعاریف زیر صورت می گیرد.

y_1 = قیمت (هزینه پرداختی) برای یک واحد lumber

y_1 = Price paid for 1 b. ft of lumber

y_2 = قیمت (هزینه پرداختی) برای یک ساعت کار پرداخت کاری

y_2 = price paid for 1 finishing hour

y_3 = قیمت (هزینه پرداختی) برای یک ساعت کار نجاری

y_3 = price paid for 1 Carpentry hour.

تابع هدف هزینه پرداختی برای تمام مقادیر از منابع موجود می باشد که باید کمینه شود..

یعنی

$$\text{Min } Z = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

چه محدودیت هایی روی y_i وجود دارد؟

از لحاظ کارخانه دارنده این منابع (وسازنده وسایل) قیمت ها (y_i) باید به اندازه کافی زیاد باشند تا کارخانه منابع را بفروشد به عبارت دیگر معادل پولی بابت منابع مورد استفاده در ساخت یک واحد *desk* باید حداقل ۶۰ باشد تا او ترغیب به فروش شود.

معادل پولی منابع مورد استفاده در ساخت یک واحد *desk* $= 8y_1 + 20y_2 + 48y_3$ همینطور معادل پولی منابع مورد استفاده در ساخت یک واحد میز و صندلی بترتیب

($6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3$ و $1y_1 + 1.5y_2 + 0.3y_3$) باید حداقل ۳۰ و ۲۰ باشد. پس با

مسئله دیگری بشرح زیر روبرو می شویم که متغیرهایش مربوط به ارزش منبع در دسترس تصمیم

گیرنده است. از این رو می باشد که متغیرهای این مسئله جدید (مسئله دوگان) را قیمتهای سایه^۱ منابع

می نامند (*winston, 1994* صفحه ۲۷۶)

$$\text{Min } Z = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

s.t

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

$$1y_1 + 1.5y_2 + 0.3y_3 \geq 20$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

^۱ قیمت / اختصاص داده شده ناخواسته (imputed value, internal price, intrinsic value, incremental value, efficiency price, shadow price)

روابط و خصوصیات مهم بین Dual , primal

ثابت می شود که:

رابطه ۱- ثانویه مسأله ثانویه، مسأله اولیه است

رابطه ۲- رابطه بین مقادیر تابع هدف ۲ مسأله

(مقدار Z در هر جدول غیر بهینه کمینه سازی ثانویه $Z_y^* \leq Z_x^* = Z_x \leq Z_y$ مقدار Z در هر جدول غیر بهینه مسأله $Primal$ بیشینه سازی)

این مطلب طی قضیه زیر بیان میشود.

قضیه دوالیتی ضعیف

یک $primal$ متعارفی را در نظر بگیرید: هر محدودیت اولیه

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow y_i (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) \leq b_i y_i$$

m نامساوی از این قبیل داریم آنها را با هم جمع می کنیم: $\Leftarrow$

$$W = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = Z_y \quad I$$

هر محدودیت ثانویه چنین است

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

این رابطه را در x_j ضرب می کنیم. $x_j (a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m) \geq c_j x_j$

n نامساوی از این قبیل داریم طرفین آنها را با هم جمع می کنیم.

$$W = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j = Z_x \quad II$$

طرفین چپ روابط I, II مساوی است پس $Z_x \leq W \leq Z_y$

$Minimum$ Z_y و ماکزیمم Z_x برابر W است پس $Z_x^* = Z_y^*$

رابطه ۳- روابط بین جواب های مسأله که تحت عنوان قضیه Dual مطرح می شود

اولیه		ثانویه
A	X_B^* جواب بهینه شدنی	$\longleftrightarrow$ جواب بهینه شدنی $Y^* = C_B B^{-1}; Z_y^* = Z_x^*$
B	عدم وجود جواب شدنی	$\nrightarrow$ عدم وجود جواب شدنی جواب بیکران
C	جواب بیکران	$\longleftarrow$ عدم وجود جواب شدنی

اثبات قسمت آخر (C) داریم:

$$Z_x^* \leq Z_y = \sum b_i y_i \quad \text{پس} \quad Z_x \leq Z_x^* = Z_y^* \leq Z_y$$

اولیه جواب بیکران دارد پس $Dual \Leftarrow \sum b_i y_i \geq Z_x^* = \infty$ یک جواب شدنی که همه اجزاء آن مقادیر محدود باشند ندارد پس $Dual$ فاقد جواب شدنی است.

گاه بخش C, B بالا بصورت لم جداگانه مطرح و اثبات می شود. ص 242 *Hadley*

رابطه ۴) (قضیه کمک مکمل یا رابطه کمکی مازاد Complementary Slackness)

این قضیه: جواب های بهینه اولیه و ثانویه را بهم دیگر مربوط می کند. بعبارت دیگر در صورتی دو بردار X^*, Y^* هر دو جواب های بهینه اولیه و ثانویه اند که اگر و فقط اگر در قضیه کمک مکمل صدق کنند.

اگر $x_1 \dots x_n$ متغیرهای یک مسأله $primal$ بیشینه سازی با m محدودیت و $s_1 \dots s_m$ متغیرهای کمکی مربوطه باشند.

اگر $y_1 \dots y_m$ متغیرهای مسأله $Dual$ فوق الذکر (کمینه سازی) با n محدودیت و $L_1 \dots L_n$ متغیرهای اضافی باشند.

$$x_1^* \dots x_n^*, y_1^*, \dots, y_m^* \text{ جواب های بهینه اند اگر و فقط اگر}$$

$$x_{n+i}^* y_i^* = 0, \quad S_i^* y_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (الف)$$

$$y_{m+j}^* x_j^* = 0, \quad L_j^* x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (ب)$$

در آخر اثبات قسمت الف را می بینیم :

$$s_1^* y_1^* + s_2^* y_2^* + \dots + s_m^* y_m^* = 0, s_i^* \geq 0, y_i^* \geq 0 \Rightarrow s_i^* y_i^* = 0$$

در جداول بهینه از الف) $\Leftarrow$

اگر در مساله اولیه در حالت بهینه $(i \text{ امین } slack) \Leftarrow i$ متغیر جواب بهینه دوال صفر است.

اگر در جواب بهینه دوال $(i \text{ امین متغیر}) \Leftarrow i$ $slack$ در جواب بهینه اولیه صفر است.

در جداول بهینه از ب) $\Leftarrow$

اگر در جواب بهینه j امین متغیر کمبود $Dual < 0 \Leftarrow j$ امین متغیر $Primal$ صفر است.

اگر در جواب بهینه j امین متغیر $Primal < 0 \Leftarrow j$ امین متغیر کمبود $Dual$ صفر است.

بیان دیگر قضیه کمک مکمل

مساله اولیه در فرم استاندارد m محدودیت و n متغیر تصمیم و m متغیر کمکی دارد. در این مساله m

تعداد متغیر پایه و n : تعداد متغیر غیر پایه کلا: $m+n$ متغیر

در مساله $Dual$ در فرم استاندارد n محدودیت و m تغییر تصمیم و n متغیر کمکی دارد. در این

مساله n : تعداد متغیر پایه m : متغیر غیر پایه کلا: $n+m$ متغیر

تعداد جواب‌های پایه دو مساله برابرند:

در نقاط اکستريم مساله اولیه از تمام متغیر ها $n-m$ متغیر صفر و m متغیر غیر صفر

$$\text{تعداد جواب پایه اولیه در یک مساله استاندارد شده} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

با n متغیر اصلی و m متغیر کمکی

در نقاط اکستريم ثانویه m متغیر صفر و n متغیر غیر صفر

$$\text{تعداد جواب پایه Dual} = \binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!(n+m-n)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

از طرفی تعداد متغیر پایه یک مساله = تعداد متغیرهای غیر پایه مساله دیگر.

برای هر جواب پایه در مساله اولیه یک جواب مکمل در مساله $Dual$ وجود دارد که بین آن متغیرها

یک رابطه کمکی $slackness$ برقرار است.

x ها با L ها (کمکی ثانویه)

y ها با S ها (کمکی اولیه)

ثابت می شود (ص ۲۴۰ *Hadley*) در صورتیکه مسأله اولیه به فرم استاندارد باشد این رابطه بصورت $x_j^* L_j^* = y_i^* S_i^* = 0$ خواهد بود.

بر طبق این قضیه

اگر x_j^* ها بزرگتر از صفر باشد در جدول بهینه دوال، *Slack* محدودیت j ام دوال (L_j) حتماً صفر است و بر عکس: $x_j^* L_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$

اگر y_j^* ها بزرگتر از صفر باشد در جدول بهینه اولیه، *slack* محدودیت i ام اولیه (S_i) حتماً صفر است و بر عکس: $y_i^* S_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$

- اگر X یک جواب شدنی برای اولیه و Y یک جواب شدنی برای ثانویه باشد در صورتی هر دو بهینه اند که در روابط قضیه کمک مکمل صدق کنند.

Complementary slackness

Let the primal be represented in standard form and consider the primal and **dual problems in** canonical form.. If both are finite then the optimal solution to each problem satisfy the following properties:

- The product of i th slack variable of the primal and the i th non-slack **variable of the** dual equals zero ... i.e.
 $x_{n+i}^* y_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$
- The product of j th slack variable of the dual and the j th non-slack **variable of the** primal equals zero i.e.
 $y_{m+j}^* x_j^* = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$

مثال

براساس جواب مسأله های *Primal, Dual* ص ...

$$\begin{array}{llllll} x_1^* = 8 & L_1^* = 0 & x_1^* L_1^* = 0 & , & S_1^* = 0 & y_1^* = 1 & S_1^* y_1^* = 0 \\ x_2^* = 6 & L_2^* = 0 & x_2^* L_2^* = 0 & , & S_2^* = 0 & y_2^* = 2 & S_2^* y_2^* = 0 \end{array}$$

برای اینکه قضیه کمک مکمل را بهتر متوجه شوید از آن در حل یک مسأله *L.P* استفاده می کنیم.

مثال ابتدای مبحث تعبیر اقتصادی مسأله Dual ص... را در نظر بگیرید جواب بهینه مساله اولیه

$$Z_x^* = 280 \quad x_1^* = 2 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 8 \quad S_1^* = 24 \quad S_2^* = 0$$

برای یافتن جواب مساله *Dual* می گوئیم.

چون $S_1^* = 24 > 0$ و $y_1^* = 0$ چون $X_1^* = 2 \geq 0 \Leftrightarrow L_1^* = 0$ و همین طور چون $X_2^* = 8 \geq 0 \Leftrightarrow L_2^* = 0$ پس در حالت بهینه محدودیت اولیه و سوم *Dual* بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} 1) & 8y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 60 \\ 2) & 6y_1^* + 2y_2^* + 1.5y_3^* - L_1^* = 30 \\ 3) & y_1^* + 1.5y_2^* + 0.5y_3^* = 20 \end{cases} \xRightarrow{\text{From 1 \& 2}} \begin{cases} 4y_2^* + 2y_3^* = 60 \\ 1.5y_2^* + 0.5y_3^* = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2^* = 10 \\ y_3^* = 10 \end{cases}$$

چون $s_2^* y_2^* = 0$ و $y_2^* > 0$ پس $s_2^* = 0$. از دستگاه فوق L_1^* برابر ۵ بدست میاید پس باید $x_1^* = 0$ که اینطور هم هست.

$$Z_y^* = Z_x^* = 280 \text{ می دانیم}$$

بطور کلی اگر X یک جواب شدنی برای اولیه و Y یک جواب شدنی برای ثانویه باشد در صورتی هر دو بهینه اند که در قضیه کمک مکمل صدق کنند.

خصوصیات مهم چهارگانه مسائل اولیه و ثانویه:

کاربرد ۲ خصوصیت زیر جهت سنجش حساسیت، که بعدا خواهد آمد، بوده و با این فرض بیان شده است که *Dual* از روی شکل اولیه استاندارد زیر نوشته شده است.

Primal

$$\text{Max } Z_x = CX$$

$$P_1 \quad P_n$$

$$st \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dual

$$\text{Min } Z_y = b^t Y$$

$$st \begin{cases} P_1^t & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{m1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \\ P_n^t \end{cases}$$

$$A \quad X = b$$

$$x_j \geq 0$$

$$A^t \quad Y \geq C$$

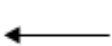
$$y_i \text{ آزاد در علامت}$$

خصوصیت I:

اگر مسئله $Primal$ دارای جواب بهینه محدود باشد در هر تکرار روش $Simplex$ $C_B B^{-1}$ بردار Z_j های متغیرهای جواب آغازین $Primal$ را بدست می دهد به آنها مضارب سیمپلکس ($shadow$ or $implicit$ $Costs$ یا $Simplex$ $multipliers$) می گویند ، اگر ضریب این متغیرها را از تابع هدف مسئله اولیه در فرم استاندارد استخراج کرده و از این Z_j ها کسر کنیم ضریب متغیر جواب آغازین در سطر Z آن تکرار بدست می آید یعنی $Z_j - C_j$ آن متغیر. در آن تکرار بدست می آید. یادآوری : این ضرائب برای تکرار بهینه یا نهائی یک مسئله مستقیماً مقادیر بهینه مسئله دیگر را بدست می دهد یعنی در تکرار نهائی $Y^* = C_B B^{-1}$. ثابت می شود که $Y = C_B B^{-1}$ در سایر تکرارها جواب مسئله دیگر را نمی دهد و در واقع معرف جواب های نشدنی مسئله دیگرند. همانطور که قبلاً گفته شد $Y^* = C_B B^{-1}$ تحت عنوان قضیه دوال مطرح و اثبات می گردد .

قضیه دوال

هر کدام از مسائل ($Primal$ یا $Dual$) دارای جواب بهینه محدود باشد مسئله دیگر دارای بردار جواب محدود و بهینه $C_B B^{-1}$ می باشد که در آن B ماتریس پایه جدول نهایی است و نیز داریم $Z_Y^* = Z_x^*$. اثبات ص ۲۸۲ $Winston$. در اثبات سعی می شود که ثابت کنند بردار $Y = (y_1, \dots, y_m) = C_B B^{-1}$ در محدودیت های دوال صدق می کند و نیز این بردار غیرمنفی بوده و همچنین ثابت می کنند $b^t Y$ حداقل تابع هدف دوال را دارد. پس جواب بهینه است. گاه دیده شده

اولیه		ثانویه
عدم وجود جواب شدنی		عدم وجود جواب شدنی جواب بیکران
جواب بیکران		عدم وجود جواب شدنی

نیز به صورت قضیه افزوده شده است و گاه این دو بصورت لم جداگانه ارائه می شود. در حین اثبات قضیه نتیجه می شود که شرط لازم و کافی برای اینکه X_B بهینه باشد اینست که بردار $Y = C_B B^{-1}$ یک جواب شدنی باشد برای $Dual$ یعنی در $Dual$ صدق کند.

توجه کنید که براحتی نشان داده می شود که $Y^* = C_B B^{-1}$ از ضرایب سطر Z جدول نهائی $Primal$ باسانی بدست می آید، باینصورت که به ضرایب $Z_j - C_j$ متغیرهای پایه اولیه در جدول فوق الذکر C_j متغیرها اضافه شود Z_j ها بدست می آید که همانا جواب $Dual$ است.

قضیه کاروش کان تاکر Karush-Kuhn- Tucher در کتاب بازارا مطالعه شود

خصوصیت II

در هر تکرار، با قراردادن مضارب $Simplex$ یعنی $Y = C_B B^{-1}$ بجای متغیرها در محدودیت های مسأله $Dual$ و بدست آوردن تفاضل بین طرف چپ و راست این محدودیت ها، ضرائب "متغیرهایی که متناظر با محدودیت های $Dual$ می باشند" در سطر Z آن تکرار $Primal$ حاصل می شود بالعکس این خصوصیت را می توان برای بدست آوردن ضرائب سطر Z_j جدول دوال از روی محدودیت های مسأله اولیه نیز بکار برد.

بعبارت دیگر با قراردادن بردار $Y = C_B B^{-1}$ در محدودیت های مسأله ثانویه تفاضل بین طرف چپ و راست این محدودیت ها مقادیر $Z_j - C_j$ ها در هر تکرار $Primal$ برای متغیرهای متناظر با محدودیت مربوطه می شود. لازم بیادآوری است که طرف راست محدودیت های $Dual$ همان C_j های $Primal$ اند

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 5 & y_1 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 6 & y_2 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

سمت چپ محدودیت اول در ثانویه $= 2y_1 + 3y_2$

$$(y_1, y_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} P_1 = Z_1$$

بررسی خصوصیت II با ذکر مثال:

مثال ۱

Primal

$$\text{Max } Z_x = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.t

$$y_1 \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$y_2 \quad 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$y_3 \quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

$$y_4 \quad x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } Z_y = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 + 2y_4$$

s.t

$$x_1 \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 6$$

$$x_2 \quad 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 + y_4 \geq 3$$

$$x_3 \quad y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

جدول آغازین مسأله اولیه (Primal)

	Z		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	۱		-6	-3	-2	0	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	0		48
S_2	0	4	2	1/5	0	1	0	0		20
S_3	0	2	1/5	0/5	0	0	1	0		8
S_4	0	0	1	0	0	0	0	1		2
										5

تکرار اول اولیه

	Z		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	۱		0	15	-5	0	0	30	0	24
S_1	0	0	0	-1	1	0	0	-4	0	16
S_2	0	0	-1	0/5	0	1	0	-2	0	4
X_1	0	1	0/75	0/25	0	0	0	0/5	0	4
S_4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2
										5

بردار CB^{-1} برای تکرار اول چنین می‌شود.

$$Y = (0, 0, 6, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 3, 0) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

با قرار دادن مقادیر $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3, 0)$ در محدودیت مسأله Dual:

متغیر متناظر در اولیه	طرف چپ محدودیت $Dual$ بازای $C_B B^{-1}$	RHS	ملاحظات
x_1	$0+0+(30)(2)=60$	۶۰ $0 \Rightarrow Z_1 - C_1 = 0$ تفاضل چپ و راست	x_1 در پایه است و باید این ضریب صفر می‌شد.
x_2	$0+0+(1/5)(30)+0=6$	۳۰ $15 \Rightarrow Z_2 - C_2 = 15$ تفاضل چپ و راست	
x_3	$0+0+(0/5)(30)+0=0$	۲۰ $-5 \Rightarrow Z_3 - C_3 = -5$ تفاضل چپ و راست	این محدودیت برقرار نیست زیرا اگر برقرار بود باید تفاضل غیر منفی میشد.

در ضمن این جواب در تمام محدودیت‌های دوال صدق نمی‌کند پس برای $Dual$ جواب شدنی نیست
در ضمن توجه کنید $Z_3 - C_3$ منفی است لذا اگر در مسأله Max اولیه یک $z_j - c_j$ در جدول منفی
باشد $C_B B^{-1}$ حاصل از آن جدول یک جواب نشدنی برای $DUAL$ است.
می‌بینید وقتی جواب اولیه بهینه نیست جواب مسأله ثانویه $feasible$ نیست.
تکرار دوم تکرار نهایی:

$$Y = C_B B^{-1} = (0, 10, 10, 0)$$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	۱	۰	۵	۰	۰	۱۰	۱۰	۰	۲۸۰
S_1	۰	۰	-۲	۰	۱	۲	-۸	۰	۲۴
X_3	۰	۰	-۲	۱	۰	۲	-۴	۰	۸
X_1	۰	۱	?	۰	۰	?	۱	۰	۲
S_4	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۵

$(0 \quad 10 \quad 10 \quad 0)$ را $Y = C_B B^{-1}$ می‌گذاریم:

متغیر متناظر در اولیه	طرف چپ محدودیت $Dual$ بازای $C_B B^{-1}$	RHS	تفاضل سمت چپ و راست محدودیت ثانویه	ملاحظات
--------------------------------	--	-------	--	---------

x_1	$40 + 20 = 60$	۶۰	۰ = تفاضل چپ و راست $\Rightarrow Z_1 - C_1 = 0$	x_1 در پایه است و باید این ضریب صفر می‌شد
x_2	$20 + 15 = 35$	۳۰	۵ = تفاضل چپ و راست $\Rightarrow Z_2 - C_2 = 5$	
x_3	$15 + 5 = 20$	۲۰	۰ = تفاضل چپ و راست $\Rightarrow Z_3 - C_3 = 0$	x_3 در پایه است و باید این ضریب صفر می‌شد.

$C_B B^{-1}$ در محدودیت اول و سوم دوال بصورت تساوی ارضاء می‌شود و از اینرو $Z_j - C_j$ برای ۱ و ۳ صفر است. توجه کنید x_3, x_1 در پایه اند

مثال دیگر: به مثال پاراگراف سوم ص ... ترجمه کتاب حمدی طه (ترجمه دکتر بازرگان) رجوع شود

یک نتیجه مهم

از خصوصیت II یک نتیجه مهم حاصل می‌شود:

بدواً توجه کنید که وجود یک ضریب منفی در سطر Z جدول مسأله $Primal$ پیشینه سازی مبین این مطلب است که جواب فعلی $Optimum$ نیست و چون این ضریب معرف تفاضل طرفین چپ و راست محدودیت $Dual$ متناظرش است از روی جهت نامساوی دیده می‌شود که این ضریب منفی در ضمن بمعنی برآورده نشدن محدودیت $Dual$ است یعنی این جواب $feasible$ نیست. لذا وقتی جواب مسأله اولیه بهینه نیست $C_B B^{-1}$ یک جواب شدنی برای مسأله ثانویه نیست و برعکس.

نکته دیگر:

چون ضریب هر متغیر پایه‌ای هر جدول در سطر در سطر صفر (Z) آن جدول همواره صفر است تفاضل بین طرفین چپ و راست محدودیت ثانویه وابسته به آن متغیر باید صفر باشد یعنی محدودیت ثانویه

فرم زیر به فهم خصوصیت II کمک می نماید.

$$st \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$$

$$st \left\{ \begin{array}{l} P_1^t \\ \vdots \\ P_n^t \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{m1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{mn} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{array} \right)$$

$$A \quad X = b$$

$$x_j \geq 0$$

$$A^t Y \geq C$$

آزاد در علامت

با قراردادن $Y = C_B B^{-1}$ در سمت چپ محدودیت های دوال،

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ها بدست می آیند:

$$\text{عنصر } j \text{ ام طرف چپ} = (P_j)^t (C_B B^{-1}) = z_j$$

$$z_j = C_B B^{-1} \text{ های متغیر های پایه جدول آغازین}$$

$$z_j = C_B B^{-1} P_j \text{ یک متغیر در هر تکرار}$$

B ماتریس پایه آن تکرار خاص است .

خصوصیت III :

در هر تکرار $Primal$ یا $Dual$ مقادیر متغیرهای پایه ای از ضرب B^{-1} در بردار ستونی حاوی عناصر سمت راست محدودیت های اصلی (P_0) بدست می آید: $X_B = B^{-1} P_0$ برای اولیه.

در مثال فوق در تکرار اول برای $Primal$

$$X_B = \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ X1 \\ S4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

که همان مقادیری است که جدول تکرار اول نشان می دهد.

خصوصیت IV :

در هر تکرار $Primal$ یا $Dual$ ضرائب محدودیت های واقع در زیر هر متغیر از ضرب B^{-1} آن تکرار در بردار ستونی ((متشکل از ضرائب آن متغیر در محدودیت های مسأله استاندارد)) بدست می آید:

$$\text{بردار ضرائب متغیر } x_j \text{ در هر جدول در بخش محدودیت ها} = B^{-1} P_j$$

مثال: جدول زیر را تکمیل کنید آیا جدول نهائی است؟

۱۳۱

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_y &= ۳۶y_۱ + ۴۰y_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۳y_۱ + ۲y_۲ \geq ۷ \\ & ۲y_۱ + ۴y_۲ \geq ۱۰ \\ & y_۱, y_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

	Z	$y_۱$	$y_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$A_۱$	$A_۲$	RHS
Z	۱	.	.	.	-۸	?	?	?
y_1	.	?	?	?	?	۰/۵	$-\frac{۱}{۴}$	?
y_2	.	?	۱	$\frac{۱۰}{۴}$	?	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	?

$$y_1 \text{ ستون زیر } = \begin{pmatrix} ۰/۵ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۸} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱/۵ - ۰/۵ \\ -\frac{۳}{۴} + \frac{۶}{۸} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$y_2 \text{ ستون زیر } = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 \text{ ستون زیر } = B^{-1}P_{s_1} = (B^{-1}) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0/5 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$S_2 \text{ ستون زیر } : B^{-1}P_2 = (B^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$Y_B^* = B^{-1}P_o = \begin{pmatrix} ۰/۵ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۸} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$Z_Y^* = C_B y_B^* = (۳۶ \quad ۴۰) \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۳۶ + ۸۰ = ۱۱۶$$

$$C_B B^{-1} = (۳۶ \quad ۴۰) \begin{pmatrix} ۰/۵ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۸} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۸ - ۱۰ \\ -۹ + ۴۰ \times \frac{۳}{۸} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ \\ ۶ \end{pmatrix} = Y_B^*$$

برای ضرائب متغیرهای پایه جدول آغازین در سطر **Z** جدول فوق:

$$P_1 \text{ برای } : \quad \widehat{Z_j}^{C_B B^{-1} P_j} - C_j = \widehat{\lambda} - M$$

$$P_2 \text{ برای } Z_j - C_j = 6 - (+M) = 6 - M$$

قیمت سایه^۱ منابع

مقدار متغیر ثانویه متناظر با منبع i ام (y_i) را قیمت سایه یا شبه قیمت منبع i ام می‌نامند.

وجه نامگذاری با ذکر یک مثال توضیح داده میشود.

n نوع کالا باید تولید شود که از هر یک از منابع m گانه b_i (ها) مقداری مصرف می‌نمایند. هدف تعیین میزان تولید این کالا است تا حداکثر سود عائد گردد.

$$\text{Max } Z_x = CX, \quad (st) \Rightarrow AX \leq B, \quad X \geq 0$$

x_j میزان تولید از کالای شماره j در یک مدت مشخص می‌باشد. b_i میزان موجودی منبع i ام برای یک مدت مشخص است. مثلاً میزان ساعت کار موجود از ماشین i در هفته.

a_{ij} : میزان لازم از منبع i برای تولید هر واحد از کالای j است.

c_j : قیمت واحد کالای j

$${}^2 \text{ DUAL : } \text{Min } Z_y = B^t Y, \quad (ST) \Rightarrow A^t Y \geq C^t$$

چون دیمانسیون c_j مثلاً مبلغ (تومان) به ازای واحد کالای j است پس $a_{ij} y_i$ باید همین دیمانسیون را داشته باشد. اما چون a_{ij} دارای دیمانسیون گفته شده است پس دیمانسیون y_i باید مبلغ به تومان به ازای هر واحد منبع i باشد:

$$[y_i] = [C_j] / [a_{ij}] = \text{واحد کالای } j / \text{میزان لازم از منبع } i \text{ (واحد کالای } j / \text{مبلغ به تومان)} =$$

$$\Rightarrow \text{میزان لازم از منبع } i / \text{مبلغ به تومان} =$$

$$\text{دیمانسیون } y_i = \text{یک واحد منبع } i / \text{تومان}$$

برای هر منبع i یک متغیر ثانویه y_i تعریف می‌شود که بنا به آنچه گفتیم یک قیمت یا یک هزینه یا یک ارزش در رابطه با هر واحد از منبع i است لذا $(Z_y = B^t Y)$ کل این ارزشها در رابطه با تمام منابع موجود است.

J امین محدودیت مسأله ثانویه $\sum a_{ij} y_i \geq C_j$ است اما $\sum a_{ij} y_i$ معادل آن ارزش یا هزینه ایست که از صرف واحدهای منابع ۱ تا m در تولید قطعه j حاصل می‌گردد، می‌باشد.

¹ (قیمت اختصاص داده شده ناخواسته، shadow price, efficiency price, incremental value, intrinsic value, internal price, (imputed value)

² منظور از B^t ترانهاده B است

مقادیر بهینه y_i را قیمت سایه یا شبه قیمت منبع i می نامند و البته هیچ گونه ارتباطی با قیمت واقعی منبع ندارد.

توجه

در تکرار نهایی، قیمت سایه هر منبع نشانگر (y_i^*) میزان بهبود مقدار بهینه تابع هدف آن مسئله به ازای افزایش عدد سمت راست آن محدودیت (b_i) به ازای یک واحد است با فرض باقیماندن X_B فعلی بصورت بهینه و بشرط ثابت ماندن سایر پارامترها.

$$Z^* = b_1 y_1^* + \dots + b_i y_i^* + \dots + b_m y_m^*$$

$$\Delta Z = [b_1 y_1^* + \dots + (b_i + a) y_i^* + \dots + b_m y_m^*] - [b_1 y_1^* + \dots + b_i y_i^* + \dots + b_m y_m^*] = a y_i^*$$

اگر افزایش عدد سمت راست آن محدودیت i ام (b_i) به اندازه $a=1$ باشد $\Delta Z = 1 \times y_i^* = y_i^*$

و به طور کلی در جدول نهایی، قیمت سایه هر منبع نشانگر (y_i^*) میزان افزایش یا کاهش مقدار Z^* آن مسئله به ازای افزایش یا کاهش عدد سمت راست محدودیت مربوطه (b_i) به اندازه یک واحد است، بشرط ثابت ماندن سایر پارامترها از جمله عدم تغییر متغیرهای X_B فعلی و شدنی بودن آنها. این مطلب در فصل تحلیل حساسیت مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

کوششی جهت یک تعبیر اقتصادی برای مسئله **Dual , primal** (با ذکر یک مثال)

فرض کنید یک مؤسسه در یک بازار خاص عرضه منابع اولیه به تولید n نوع محصول اشتغال دارد و می خواهد مقدار هر محصول خود را با توجه به موارد زیر بهینه نماید.

C_j = Revenue per unit (minus means cost) generated form engaging in the j th activity

$$X_j \geq 0 \text{ مقدار محصول } j \text{ ام}$$

$$a_{ij} = \text{مقدار صرف شده از منبع } i \text{ در تولید یک واحد محصول } j$$

$$b_i = \text{میزان اولیه موجودی منبع شماره } i \text{ در مؤسسه}$$

مؤسسه این امکان را دارد که واحدهای اضافی منبع i را به بازار بفروشد و یا واحدهای کمبود از منبع i را از بازار بخرد

$$y_i \geq 0 = \text{قیمت خرید یا فروش واحد کمبود یا اضافی از منبع } i \text{ در بازار}$$

$$\text{سود مؤسسه} = \sum_j C_j X_j + \sum_i y_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j) \quad (I)$$

¹ Bradley, Hax magnanti, 1977, Applied math Programming, Addison-Wesley. download able (<http://web.mit.edu/15.053/www/>)

(***) سود ناشی از فروش منابع اضافی در هنگامیکه مقداری که از منبع i در تولید محصولات n گانه باید صرف شود بیش از b_i نباشد

$$(b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)$$

یا هزینه ناشی از خرید منابع کمبود و قتیکه $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < 0$ or $b_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.
مؤسسه تن به حالت $b_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ نداده و حالت $b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ مدنظر اوست.

بازار، بازاری بدخواه بوده و واحدهای اضافی را خوب بر نمی دارد و لذا مؤسسه از سود صفر یا ناچیز فروش منابع اضافی هم در چنین بازاری صرفنظر کرده و لذا مسأله تصمیم گیری آن مؤسسه فرضی چنین می شود.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_x &= \sum c_j x_j \\ (s.t) \\ \sum a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

که مسأله اولیه است.

حال با نوشتن مجدد عبارت سود در I به صورت زیر به بررسی آن از دیدگاه بازار می پردازیم تا ببینیم بازار برای تنظیم y_i ها چه هدفی را دنبال می کند.

$$\text{سود مؤسسه} = \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j + \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (II)$$

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ قیمت معادل (هزینه) منابع مصرفی در تولید یک واحد قطعه j است (اگر منابع به بازار عرضه می شد).

اگر بازار y_i ها را طوری تنظیم کند که درآمد ناشی از یک قطعه مثبت باشد ($c_j - \sum a_{ij} y_i > 0$)، مؤسسه قادر خواهد بود که هر چه بخواهد منابع خود را از بازار تهیه و سود خود را به طور دلخواه افزایش دهد. این بازار زیربار چنین تنظیمی نمی رود.

بازار قیمت را طوری تنظیم می کند که $\sum a_{ij} y_i > c_j$, $j = 1, 2, \dots, n$

و با این تصمیم که بازار قیمت مناسب را طوری تنظیم نماید که درآمد حاصل از تولید محصولات از قیمت فروش آن منابع به بازار کمتر باشد یعنی: $c_j - \sum a_{ij} y_i < 0$ مؤسسه ابتدا به تولید دست نخواهد زد، لذا جمله اول (II) صفر خواهد شد.

مسئله این بازار تنظیم و یا تصمیم گیری در مورد y_i ها خواهد بود با هدف کمینه کردن سود مؤسسه فروشنده منابع به بازار، زیرا بازار خریدار است و خریدار میخواهد هرچه کمتر پول بپردازد.

$$\text{Min } Z_y = \sum b_i y_i$$

, s.t.

$$\sum a_{ij} y_i \geq c_j \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad , y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

که این مساله (ثانویه - همزاد - دوگان - مزدوج) مسئله قبلی است.

البته همانطور که قبلاً ثابت شده است در حالت بهینه داریم:

$$\sum c_j x_j^* = \sum b_i y_i^* \quad \text{or} \quad Z_x^* = Z_y^*$$

یعنی

$$(\sum c_j x_j^*) = \text{Maximum profit of the firm}$$

$$\sum b_i y_i^* = \text{the market evaluation of its initial endowment of expences}$$

تفسیر رابطه کمک مکمل

بازار و مؤسسه طوری عمل میکند که:

$$y_i^* (b_i - \sum a_{ij} x_j^*) = 0 \quad \text{در (I)}$$

$$x_j^* (c_j - \sum a_{ij} y_i^*) = 0 \quad \text{و در (II)}$$

رابطه اول بطور ضمنی میرساند که یا میزان منبع i که مصرف نشده ($Slack_i$ در اولیه) صفر است یا شبه قیمت منبع i .

به عبارت دیگر چنین بازاری چون تمایل به کاهش سود مؤسسه دارد مایل به پرداخت پولی برای اضافی منابع نیست. البته اگر منبع بطور کامل مصرف شده باشد شبه قیمت آن در بازار صفر نیست.

رابطه دوم بطور ضمنی این را میرساند که یا سود اضافی ناشی از فروش محصول j

($Slack_j$ در ثانویه) صفر است و یا سطح تولید محصول j

لم فارکاس^۱

قضیه‌ای در جبرخطی وجود که به لم فارکاس شهرت دارد و به فرمهای مختلف بیان می شود. گاه از این لم در اثبات قضیه دوال استفاده می شود.

فرمهای قضیه:

- دقیقاً و تنها یکی از ۲ دستگاه زیر جواب دارد (و هر دو با هم جواب ندارند)
اگر دستگاه ۱ جواب داشته باشد دستگاه ۲ جواب ندارد و برعکس.

$$۱) \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} A^T Y \geq 0 \\ Z = b^T Y < 0 \end{cases} \quad Y \text{ آزاد}$$

$$\begin{array}{ll} (I) & (II) \\ AX = b & YA \leq 0 \\ X \geq 0 & Yb > 0 \end{array}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m تایی باشد آنگاه

الف) اگر (I) جواب شدنی داشته باشد (II) جواب ندارد.

ب) اگر (I) جواب نداشته باشد (II) حتماً جواب دارد.

- فقط و فقط یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

$$۱) \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad ۲) \begin{cases} A^T Y \geq 0 \\ Z = b^T Y < 0 \end{cases} \quad Y \text{ آزاد}$$

پس شرط لازم و کافی برای آنکه اولیه در فرم متعارفی جواب شدنی نداشته باشد اینست که ۲ برقرار باشد.

- چک شود؟؟ سیستم معادلات $AX \leq b$ جواب ندارد اگر و فقط اگر که بردار Y وجود داشته باشد

$$\begin{cases} A^T Y = 0 \\ b^T Y < 0 \end{cases} \quad Y \geq 0$$

- شرط لازم و کافی برای آنکه $\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ فاقد جواب باشد اینست که بردار یک بردار مثل Y وجود

$$\text{داشته باشد که} \quad \begin{cases} A^T Y \geq 0 \\ b^T Y < 0 \end{cases} \quad Y \text{ آزاد}$$

و کتاب تست راهیان ارشد تالیف افشار و نگینی Bazaara, 19... page¹

- اگر A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m تایی باشد آنگاه دقیقاً یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

$$1) \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \text{ و } 2) \begin{cases} A^T Y \leq 0 \\ Z = b^T Y > 0 \end{cases} \text{ آزاد } Y$$

توجه: اگر $b^T Y < 0$ و $A^T Y \geq 0$ جواب داشته باشد یا نداشته باشد $b^T Y > 0 \Leftrightarrow A^T Y \leq 0$ و نیز به ترتیب جواب دارد یا ندارد. چک شود با ص ۵۱-D

Farkas Lemma

One of the following must hold (not both together): Farkas 1902

a) There exists some vector $X \geq 0$ that $AX = b$.

b) There exists some vector Y such that $Y^T b < 0$

(I) (II)

$$AX = b \quad YA \geq 0$$

$$X \geq 0 \quad Yb < 0$$

تست از این لم

(ارشد صنایع ۸۰ به نقل از راهیان ارشد)

قضیه زیر به قضیه شرط جواب مسئله برنامه ریزی خطی معروف است که توسط آقای *Farkas* بسیار قبل از پیدایش برنامه ریزی خطی در سال ۱۹۰۱ میلادی کشف شده است با استفاده از تئوری همزادی^۱ شکل صحیح قضیه کدام است؟

۱) دستگاه معادلات $AX = b, X \geq 0$ جواب موجه ندارد اگر و فقط اگر یک بردار Y وجود داشته باشد به طوری که در $YA \geq 0, Yb \leq 0$ صدق کند.

۲) دستگاه نامعادلات $AX \leq b, X \geq 0$ جواب موجه ندارد اگر و فقط اگر یک بردار Y وجود داشته باشد به طوری که در $Y \geq 0, YA \geq 0, Yb < 0$ صدق کند.

۳) دستگاه نامعادلات $AX \leq b$ جواب موجه ندارد اگر و فقط اگر یک بردار Y وجود داشته باشد به طوری که در $Y \geq 0, YA = 0, Yb < 0$ صدق کند.

۴- هر سه جواب داده شده صحیح است.

گزینه صحیح ۴ میباشد. توجه کنید گزینه ۱ دقیقاً فارکاس است. گزینه ۲ و ۳ تغییر شکل یافته فارکاس است با تغییر متغیر $Y = -Y$.

¹ Duality theory

روش سیمپلکس ثانویه Dual Simplex Algorithm

برای حل مسئله *Primal*

الگوریتم سیمپلکس ثانویه اولین بار توسط *Lemke* در سال ۱۹۵۴ تدوین شد.

این روش در مواردی بعوض استفاده از متغیرهای مصنوعی مورد استفاده قرار می گیرد.

این طریقه از جوابی نشدنی و عین حال دارای شرائط بهینگی شروع می نماید و نشدنی باقی

می ماند تا بهینه واقعی در نقطه ای که جواب شدنی می شود بدست آید.

Dual Simplex خود مسئله *Primal* را حل می نماید و در آن ابتدا متغیر خروجی و سپس متغیر

ورودی تعیین می شود. اگر پس از افزودن متغیرهای کمکی وبه شکل جدول درآوردن مسئله شرط

بهینگی برقرار بوده و سمت راست (RHS) حداقل شامل یک عنصر منفی باشد آنگاه مسأله با روش $Dual Simplex$ قابل حل است.^۱

مراحل الگوریتم

گام ۱:

اگر در جدول مسأله استاندارد لااقل یک عنصر از مقادیر متغیرهای پایه (X_B) در RHS منفی باشد و نیز در مسأله بیشینه سازی اگر $z_j - c_j \geq 0$ باشد و یا در کمینه سازی $z_j - c_j \leq 0$ باشد به گام ۲ بروید.

گام ۲: متغیر خروجی را با تعیین منفی ترین مقدار X_B تعیین کنید. سطر مربوطه را با i' نمایش دهید.
گام ۳: متغیر ورودی را با تقسیم ضرائب متغیرهای غیر پایه در سطر Z بر اعداد منفی سطر i' و انتخاب متغیری با داشتن کوچکترین عدد از لحاظ قدر مطلق انتخاب کنید.

$$\varphi_j = \min_j \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{i'j}} \right| : y_{i'j} < 0 \right\}$$

in Maximization for non-basic $z_j - c_j > 0$

in Minimization for non-basic $z_j - c_j < 0$

اگر کوچکترین عدد منحصر بفرد نباشد یکی را به دلخواه برگزینید.

اگر تمام $y_{i'j}$ مثبت یا صفر باشد و هیچ یک منفی نباشند مسأله جواب شدنی ندارد.

گام ۴: عنصر لولا را مشخص کرده و همانند سیمپلکس معمولی جدول جدید را با انجام عملیات سطری و ستونی تشکیل دهید. توجه کنید در این روش عنصر لولا منفی است.

گام ۵: اگر تمام مقادیر متغیرهای پایه X_B در جدول جدید (RHS) مثبت شدند. متوقف شوید زیرا جواب بهینه شدنی حاصل شده است در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

از کاربرد ها: در تحلیل حساسیت: ۱- افزودن یک محدودیت جدید ۲- تغییر RHS بعد از حل مسأله

و ۳- حل یک مسأله معمولی در صورت وجود شرایط.

مثال مسأله زیر را با روش سیمپلکس ثانویه حل کنید.

^۱ توجه: گاه اتفاق می افتاده است که امکان تشکیل اولین X_B شدنی با اضافه نمودن S_i ها به مسأله وجود ندارد اما احتمال دارد وقتی $Dual$ آنرا بنویسیم با $Simplex$ معمولی قابل حل باشد.

۱۴۰

$$\text{Max } Z = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

در جدول آغازین باید **b** منفی باشد (علاوه بر شرط $z_j - c_j$ ها) تا با الگوریتم **Dual** قابل حل

باشد. **b** را منفی کرده و متغیرهای کمبود را به مساله اضافه می کنیم

$$\text{Max } Z + 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$0Z - x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = -5$$

$$0Z - 2x_1 - x_2 - x_3 + s_2 = -4$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۵	۲	۳	۰	۰	۰
s_1	۰	-۱	(-۲)	۱	۱	۰	-۵
s_2	۰	-۲	-۱	-۱	۰	۱	-۴
ϕ_j		$\left \frac{5}{-1} \right $	$\left \frac{2}{-2} \right $				

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۴	۰	۴	۱	۰	۰
x_2	۰	۰/۵	۱	-۰/۵	-۰/۵	۰	۲/۵
s_2	۰	-۱/۵	۰	-۱/۵	(-۰/۵)	۱	-۱/۵
ϕ_j		$\left \frac{4}{-1/5} \right = \frac{20}{1}$		$\left \frac{4}{-1/5} \right = \frac{20}{1}$	$\left \frac{1}{-0/5} \right = \infty$		

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۱	۰	۱	۰	۲	-8

x_2	۰	۲	۱	۱	۰	۴
S_I	۰	۳	۰	۳	۱	۳

جدول نهایی است چون $X_B > 0$ و $z_j - c_j \geq 0$.

جواب	
اولیه	ثانویه
$x_1^* = 0$	$y_1^* = 0$
$x_2^* = 4$	$y_2^* = 2$
$x_3^* = 0$	
$S_1^* = 3$	
$S_2^* = 0$	

تمرین ۱ دوال مساله را بنویسید

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z_Y &= -5y_1 - 4y_2 \\
 &+ y_1 + 2y_2 \leq 5 \\
 &2y_1 + y_2 \leq 2 \\
 &-y_1 + y_2 \leq 3 \\
 &y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

برای نوشتن دوال می توان *primal* را بصورت متعارفی نوشت.

تمرین ۲: مطلوبیست یافتن جواب:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4 \\
 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 4 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

سیمپلکس ضربدری (criss cross simplex)^۱

این روش برای حل مسائلی که نه کلیه ضرایب ثابت بردار b آن غیرمنفی است تا با سیمپلکس معمولی حل شود و نه دارای شرایط راه حل با سیمپلکس مزدوج برای شروع حل باشند توسط Zionts(1969) ارائه گردید.

زیرا در حالت کلی برای حل چنین مسئله‌ای باید از متغیرهای مصنوعی استفاده کرد که احتیاج به صرف وقت بیشتر و محاسبات طولانی‌تر خواهد داشت. به طور کلی این روش برای حل مسائلی به کار می‌رود که جدول اولیه نه بهینه و نه شدنی باشند.

الگوریتم سیمپلکس ضربدری

۱- ابتدا باید تمام محدودیت‌ها را به صورت کوچکتر - مساوی تبدیل کرد. این کار را می‌توان با ضرب کردن طرفین در منفی یک (۱-) انجام داد.

۲- به دو روش می‌توان حل مسئله را شروع کرد. ابتدا می‌توان به سمت بهینگی رفت و متغیر وارد شونده را انتخاب کرد و یا می‌توان به سمت شدنی بودن رفت و متغیر خارج شونده را انتخاب کرد. اگر به سمت بهینگی حرکت کنیم و متغیر وارد شونده را انتخاب کنیم باید برای انتخاب خارج شونده اعداد ستون جواب (RHS) را بر ستون لولا تقسیم کنیم بطوریکه اعداد منفی را بر منفی و مثبت را بر مثبت تقسیم نماییم. هر کدام از نسبت‌ها کوچکتر شد به عنوان متغیر خارج شونده انتخاب می‌شود.

اگر ابتدا به سمت شدنی بودن حرکت کنیم ابتدا متغیر خارج شونده را انتخاب می‌کنیم هر کدام که منفی‌تر بود به عنوان متغیر خارج شونده انتخاب می‌شود.

برای انتخاب متغیر وارد شونده با توجه به Max بودن یا Min بودن تابع هدف اید متغیر وارد شونده را بر طبق ضابطه مرسوم سیمپلکس انتخاب کنیم. اگر تابع هدف Max سازی بود باید اعداد سطر تابع

$$\text{هدف را تقسیم بر اعداد سطر لولا کنیم } \left(\frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \right) \text{ با شرایط } y_{ij} \leq 0, z_j - c_j \geq 0$$

اگر تابع هدف Min سازی بود باید باز هم همان عمل قبل را انجام دهیم با شرط $z_j - c_j \leq 0, y_{ij} \leq 0$ در

هر دو حالت کوچکترین نسبت به دست آمده را به عنوان وارد شونده انتخاب می‌کنیم.

حال با یک مثال مطالب گفته شده را مرور می‌کنیم.

^۱ این قسمت را آقای فواد جاسمی دانشجوی بر اساس اصغر پور (۱۳۷۷) ص ۲۴۷ تهیه نمودند.

۱۴۳

$$\text{Max } Z = x_1 - 3x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$3x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ابتدا محدودیت‌های بزرگتر - مساوی را با ضرب در (-۱) به کوچکتر - مساوی تبدیل و سپس متغیرهای کمکی (s) را به محدودیت‌ها و تابع هدف اضافه می‌کنیم.

Max

$$Z = x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$x_1 - x_2 + s_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

$$-x_1 - 3x_2 + s_3 = -3$$

$$-3x_1 - x_2 + s_4 = -5$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

جدول اولیه را تشکیل می‌دهیم. به دلخواه ابتدا به سمت بهینگی می‌رویم چون مسئله بیشینه سازی است. منفی‌ترین به عنوان وارد شونده انتخاب می‌شود. متغیر x_1 به عنوان وارد شونده انتخاب می‌شود.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	
Z	۱	-۱	۳	۰	۰	۰	۰		
$\leftarrow s_1$	۰	(۱)	-۱	۱	۰	۰	۰	1	$\frac{1}{1} = 1$
$\leftarrow s_2$	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	4	$\frac{4}{1} = 4$
s_3	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	۰	-3	$\frac{-3}{-1} = 3$
s_4	۰	-۳	-۱	۰	۰	۰	۱	-5	$\frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

برای متغیر خارج شونده ستون جواب را بر ستون لولا تقسیم می‌کنیم. مثبت‌ها بر مثبت‌ها و منفی‌ها بر منفی‌ها، s_1 به عنوان خارج شونده انتخاب می‌شود چون کوچکترین نسبت را دارا می‌باشد. بعد از انتخاب متغیرهای خارج‌شونده و وارد شونده جدول را به صورت سیمپلکس معمولی ادامه می‌دهیم. جدول زیر بدست می‌آید



	Z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	RHS
x ₀	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱
x ₁	۰	۱	-۱	۱	۰	۰	۰	۱
s ₂	۰	0	۲	-۱	۱	۰	۰	۳
← s ₃	۰	0	-۴	۱	۰	۱	۰	-۲
s ₄	۰	0	-۴	۳	۰	۰	۱	-۲

جدول فوق دارای شرایط بهینگی می باشد ولی شدنی نمی باشد پس باید به سمت شدنی بودن برویم. ابتدا متغیر خارج شونده را انتخاب کنیم. متغیر s₃ را به دلخواه بین s₄ و s₃ به عنوان خارج شونده در نظر می گیریم. حال $z_j - c_j \geq 0$ را تقسیم بر $y_{ij} \leq 0$ می کنیم. x₂ به عنوان وارد شونده انتخاب می شود. عنصر لولا = -۴.

	Z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	RHS
Z	۱	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰
x ₁	۰	۱	0	$\frac{3}{4}$	۰	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{3}{2}$
s ₂	۰	0	0	$-\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۲
x ₂	۰	0	1	$-\frac{1}{4}$	۰	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{2}$
s ₄	۰	0	0	۲	۰	-۱	۱	۰

جدول فوق بهینه و شدنی می باشد.

لازم به ذکر است که در بعضی مواقع یکی از محدودیت های مسئله به صورت تساوی می باشد که می توان آنرا با روش M بزرگ و یا دو فاز حل کرد. و یا از سیمپلکس ضربدری کمک گرفت. در روش سیمپلکس ضربدری اگر یکی از محدودیت ها به صورت تساوی باشد، باید یکی از متغیرهای آن محدودیت جزء متغیرهای پایه در اولین جدول مسئله منظور گردد: اگر محدودیت I ام در مسئله به صورت تساوی باشد برای انتقال یکی از متغیرهای آن به پایه باید نکات زیر را مراعات نمود.

- b_I باید غیرمنفی باشد در غیراینصورت، طرفین معادله را در -۱ ضرب می نماییم.
- ضریب متغیر انتخابی برای ورود به پایه در محدودیت I ام باید مثبت باشد.
- اگر $b_I > 0$ بود و کلیه ضرائب متغیرهای معادله منفی باشد راه حلی برای مسئله وجود ندارد (ص ۲۴۹ اصغر پور، ۱۳۷۷). البته ممکن است تا کنون راه حلی یافت شده باشد.

- بعد از انتخاب متغیر انتقالی موردنظر به پایه از محدودیت مقدار آن را (از طریق حل معادله) باید در تابع هدف و سایر محدودیت‌ها جایگزین نمود و سپس با ایجاد معادلات جدید در تابع هدف و محدودیت‌ها و اضافه کردن متغیرهای کمکی مسئله را به صورت ضربدری حل کرد.

حال با حل یک مثال مراحل بالا را مرور می‌کنیم.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

در محدودیتی که در مسئله به صورت مساوی وجود دارد باید یکی از متغیرهایش به پایه منتقل گردد. به طور مثال x_2 را در نظر می‌گیریم و ارزش آن به صورت $x_2 = 8 - x_1 - x_3$ در محدودیت‌ها و تابع هدف جایگزین می‌کنیم. معادلات جدیدی حاصل می‌شود.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 8$$

$$-x_3 \leq -2$$

$$x_1 + x_3 \geq 6 \rightarrow$$

$$x_3 \geq 1$$

$$x_2 + x_1 + x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 8 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$-x_3 + s_1 = -2$$

$$-x_1 - x_3 + s_2 = -6$$

$$-x_3 + s_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

حال جدول اولیه را تشکیل می‌دهیم.

	Z	x ₁	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	x ₂	RHS	
Z	۱	-۲	۰	۰	۰	۰	۰	8	
s ₁	۰	۰	0	۱	۰	۰	۰	-2	غ.ق.ق. $\frac{-2}{0}$
s ₂	۰	-۱	0	۰	۱	۰	۰	-6	$\frac{-6}{-1} = 6$ ✓
s ₃	۰	۰	0	۰	۰	۱	۰	-1	غ.ق.ق. $\frac{-1}{0}$
X ₃	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	8	$\frac{8}{1} = 8$

ابتدا X₁ را به عنوان وارد شونده به پایه انتخاب می‌کنیم سپس خارج شونده را انتخاب می‌کنیم با توجه به نسبت‌های حاصل شده S₂ را به عنوان خارج شونده انتخاب و جدول را به صورت سیمپلکس معمولی حل می‌کنیم.

	Z	x ₁	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	x ₂	RHS	
Z	۱	۰	۲	۰	-۲	۰	۰	20	
s ₁	۰	۰	-۱	۱	۰	۰	۰	-۲	غ.ق.ق. $\frac{-2}{0}$
X ₁	۰	۱	۱	۰	-۱	۰	۰	۶	غ.ق.ق.
s ₃	۰	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	-۱	غ.ق.ق. $\frac{-1}{0}$
X ₂	۰	۰	۰	۰	۱	۰	1	۲	$\frac{2}{1} = 2$

در جدول بالا S₂ را به عنوان وارد شونده انتخاب می‌کنیم. بر اساس نسبت‌های بدست آمده X₂ از پایه خارج می‌گردد. حال جدول را با عملیات سطری عادی به صورت زیر در می‌آوریم

	Z	x ₁	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	x ₂	RHS
Z	۱	۰	۲	۰	۰	۰	2	24
← s ₁	۰	۰	-۱	۱	۰	۰	۰	-۲
x ₁	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۸
s ₃	۰	۰	-۱	۰	۰	۱	۰	-۱
s ₂	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۲
$\frac{z_j - c_j \geq 0}{y_{ij} \leq 0}$			۲					

حال s₁ به عنوان خارج شونده انتخاب می‌کنیم و برای ورودی بایدنسبتهای $\left| \frac{z_j - c_j \geq 0}{y_{ij} \leq 0} \right|$ را محاسبه کنیم. تنها x₃ را می‌توان به عنوان وارد شونده در نظر گرفت. عنصر لولا (-۱) شده جدول بعد چنین است:

	Z	x ₁	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	x ₂	RHS
Z	۱	۰	۰	۲	۰	۰	۲	۲۰
x ₃	۰	۰	۱	-۱	۰	۰	۰	۲
x ₁	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۶
s ₃	۰	۰	۰	-۱	۰	۱	۰	۱
s ₂	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۲

جدول فوق هم شرط بهینگی و هم شرط شدنی بودن را دارا می‌باشد

$$\cdot \begin{cases} x^*_r = 2 & x^*_1 = 6 \\ s^*_r = 1 & s^*_1 = 2 \\ Z^* = 20 \end{cases}$$

بدین ترتیب با حل مسائل به روش سیمپلکس ضربدری محاسبات کوتاه‌تر می‌شود.

الگوریتم P-D (Primal- Dual)

الگوریتم‌های Primal- Dual متعددند و روش و کارایی تا حدی متفاوت دارند ولی در نام همگی مشترکند. الگوریتم P-D توضیح داده شده در اینجا از صفحات ۲۰۷ به بعد کتاب Ignizio(1982)^۱ ذکر می‌شود و شامل تعدادی زیرالگوریتم *Primal* و زیرالگوریتم *Dual* است که بسته به شرایط تکرار انتخاب می‌شود در این الگوریتم از یک جواب نشدنی غیربهبینه برای مسئله $max (z_j - c_j < 0)$ برای $Max (x_{B_i} < 0)$ -- شروع و به جواب شدنی بهینه ختم می‌شود و نیازی به متغیر مصنوعی نداشته و عموماً با تعداد تکرار کمتری نسبت به حالت متغیر مصنوعی مسئله را حل می‌نماید.

گام‌های الگوریتم P-D برای مساله بهینه‌سازی

گام ۱- فرم مساله: تمام محدودیت‌ها به شکل " $\leq$ " درآیند و تابع هدف به صورت *Max* نوشته شود در صورت داشتن علامت " $\geq$ " محدودیت را در منفی یک ضرب کنید تا به " $\leq$ " تبدیل شود و لوی اینک RHS منفی شود.

گام ۲- به محدودیت‌ها متغیر کمبود اضافه و جدول آغازین را تشکیل دهید. توجه کنید جواب پایه آغازین همواره شامل متغیرهای کمبود می‌باشد.

گام ۳- مقدار موسوم به Impact Value (IV) سیمپکس اولیه و سیمپکس ثانویه مطابق زیر محاسبه شود

الف- اگر یک عنصر لولای سیمپلکس اولیه وجود داشته باشد یعنی

$(z_j - c_j < 0, x_{B_i} \leq 0, y_{ij} < 0)$ سطر و ستون مربوطه را با $\bar{i}$ و $\bar{j}$ مشخص نموده و *impact value* را مطابق زیر محاسبه کنید.

$$IV = \left| \frac{(z_{\bar{j}} - c_{\bar{j}})(x_{B_{\bar{i}}})}{y_{\bar{i}\bar{j}}} \right|$$

^۱ یک روش Primal dual simplex در ص ۲۳۳ دکتر اصغر پور نیز تشریح شده

ب- اگر یک عنصر لولای سیمپلکس ثانویه وجود داشته باشد یعنی یک

$$(y_{i'j} > 0, x_{Bi'} \leq 0, z_j - c_j \geq 0)$$

IV را برای این عنصر هم مطابق فرمول فوق محاسبه کنید.

گام ۴- از عناصر ذکر شده در الف و ب عنصری را برگزینید که بزرگترین IV را بخود اختصاص می-دهد.

اگر هیچ عنصری لولایی [چه در سیمپلکس $Primal$ و چه در سیمپلکس $Dual$] یافت نشود، الگوریتم را متوقف کنید در غیراینصورت به گام ۳ بروید.

توجه کنید که

در گام ۳ اگر یک عنصر لولای خاص برای منفی ترین $z_j - c_j$ (جهت محاسبه $I.V.$ سیمپلکس اولیه) یا برای منفی ترین $x_{B,i}$ (جهت محاسبه $I.V.$ سیمپلکس ثانویه) وجود نداشته باشد. منفی ترین $z_j - c_j$ بعدی را (برای سیمپلکس اولیه) یا منفی ترین $x_{B,i}$ را (برای سیمپلکس ثانویه) مورد بررسی قرار می دهیم. این کار را ادامه می دهیم تا اینکه مشخص شود که یک عنصر لولا (اعم از اولیه یا ثانویه) یافت می شود یا نه.

مثال

$$Max \quad Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام ۱ و ۲

$$Max \quad Z = 3x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$s.t \quad -x_1 - 2x_2 + S_1 = -6$$

$$-3x_1 - x_2 + S_2 = -9$$

$$7x_1 + 5x_2 + S_3 = 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad S_i \geq 0$$

جدول آغازین

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	-۳	-۶	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	-۱	-۲	۱	۰	۰	-۶

S_2	۰	-۳	-۱	۰	۱	۰	-۹
S_3	۰	۷	۵	۰	۰	۱	۳۵

در ابتدا سیمپلکس اولیه را نمی توان به کار برد چون در RHS منفی دارد. سیمپلکس ثانویه را بکار

می بریم

طبق گام ۳ منفی ترین $x_{Bi} = -9$. در سطر محدودیت مقابل آن $0 < -1$ و -3 را داریم اما $z_i - c_j$ آنها مثبت نیست. پس برای این متغیر عنصر لولا ($pivot$) نداریم.

طبق گام ۳ منفی ترین $z_j - c_j = -6$. در ستون زیر این $z_j - c_j$ ، $5 > 0$ را داریم که x_{Bi} آن مثبت است.

$$IV = \left| \frac{35 \times (-6)}{5} \right| = 42$$

یک عنصر لولا را داریم همان را برمی گزینیم

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	$\frac{27}{5}$	۰	۰	۰	$\frac{6}{5}$	۴۲
S_1	۰	$\frac{9}{5}$	۰	۱	۰	$\frac{2}{5}$	۸
S_2	۰	$-\frac{8}{5}$	۰	۰	۱	$\frac{1}{5}$	-۲
x_2	۰	$\frac{7}{5}$	۱	۰	۰	$\frac{1}{5}$	۷

$$IV = -2 \times \frac{27}{5} : \frac{8}{5} = \frac{27}{4}$$

مقدار تأثیر انتخاب این عنصر بر تابع هدف

برای $Primal$ عنصر لولا نداریم اما برای $Dual$ عنصر لولا $-\frac{8}{5}$ است زیرا شرایط را داراست

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{27}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{141}{4}$
S_1	۰	۰	۰	۱	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{23}{4}$
x_1	۰	۱	۰	۰	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{21}{4}$

تابع هدف نسبت به قبل $\Delta Z = \frac{141}{4} - 42 = \frac{27}{4}$ بهتر شده است.

در اینجا هیچ عنصر لولا نداریم و جدول بهینه است.

مثال ۲

$$\text{Min } Z' = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

s.t

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = -Z' = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$

s.t

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - S_1 = 10$$

$$x_2 + x_2 + S_2 = -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad S_1, S_2 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z		-۳	۱	-۲	۰	۰	۰
S_1		۱	-۱	۲	۱	۰	۱۰
S_2		۱	-۱	۰	۰	۱	-۳

برای $Pivot$ اولیه

منفی ترین $-3 = z_j - c_j$ متعلق به x_1 است. در ستون زیر x_1 دو عنصر y مثبت است ولی تنها یک

$$\text{Primal.S. I.V.} = \left| \frac{(-3)(10)}{1} \right| = 30 \quad \text{RHS مثبت است پس عنصر (۱) عنصر لولای اولیه است}$$

برای $Pivot$ ثانویه

منفی ترین $x_{Bi} = -3$ در سطر مقابل یک عنصر منفی داریم که $z_j - c_j$ آن نیز مثبت است. حال $i.v$

$$\text{Dual S, I.V.} = \left| \frac{(-3)(1)}{-1} \right| = 3 \quad \text{را حساب می کنیم.}$$

پس عنصر لولای $primal$ انتخاب می شود جدول بعدی چنین است.

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	-۲	۴	-۲	۰	۳۰
x_1	۰	۱	-۱	۲	۱	۰	۱۰
S_2	۰	۰	۰	-۲	-۱	-۱	-۱۳

در این جدول نشانه‌ای وجود دارد که دال بر بیکران بودن مسأله است (زیرا یک $z_j - c_j$ غیر مثبت در مساله بیشینه سازی وجود دارد که عناصر ستون زیر آن منفی یا صفر است).

روش سیمپلکس برای متغیرهای کراندار (محدود شده)^۱

غالباً ما به محدودیت‌هایی با فرم $x_j \geq l_j$ یا $x_j \leq U_j$ برخورد می‌کنیم که در آن U_j , L_j مقادیر ثابت می‌باشند. بعنوان مثال در یک مسأله برنامه‌ریزی تولید، تولید پر یود j همیشه باید از ظرفیت تولید پر یود j کمتر یا مساوی آن باشد: $x_j \leq U_j$

یک راه این است که با این محدودیت‌ها همانند یک محدودیت مجزا کار کرده و با روش *simplex* معمولی حل کنیم راه دیگر

الف- محدودیت شامل متغیر با کران پایین

از کتاب (Ignizio ۱۹۸۲)

$$x_j \geq L_j \Rightarrow x_j - L_j \geq 0$$

حال یک متغیر جدید $x'_j \geq 0$ را چنین تعریف می‌کنیم $x'_j = x_j - L_j$

و هرجا x_j دیدیم $L_j + x'_j$ قرار می‌دهیم با اینکار از تعداد محدودیت‌ها کاسته می‌گردد. حل مساله را با متغیر جدید دنبال می‌کنیم

^۱ مهرگان ص ۳۹۳-۴۰۸ و ص ۲۰۸ ترجمه دکتر بازرگان از حمدی طه بخش ۶-۷-۳ به این امر اختصاص دارد

ب- محدودیت شامل متغیر با کران بالا (upper bound)

شرح الگوریتم از ص ۵۸۷ کتاب Winston

پرداختن به متغیرهای کران بالا براحتی فوق نیست و سیمپلکس موسوم به روش سیمپلکس متغیرهای کران بالا، که گاه در کتاب‌ها (GUB)^۱ خوانده می‌شود، بکار می‌رود و برای حل مسائل دارای چندین محدودیت از این نوع بسیار کاراتر از روش *simplex* معمولی برای حل آنها است. برای حل کارا یک مسأله *LP* با چند محدودیت کران بالا در عین اینکه از این محدودیت صرف‌نظر نمی‌شود سیمپلکس تعدیل شده با محدودیت‌های دیگر کار می‌کند به طوری که در هر دور جدید، جواب پایه جدید باید محدودیت‌های کران بالا را ارضاء نماید.

توجه شود که در سیمپلکس معمولی متغیر خروجی از پایه متغیری است که اول از همه ناشدنی می‌شود (مقدار آن منفی می‌شود) همچنانکه مقدار متغیر ورودی افزایش می‌یابد. اما سیمپلکس تعدیل شده برای کران بالا متغیری را برای خروج از پایه برمی‌گزیند که با افزایش مداوم مقدار متغیر ورودی، اول از همه یا منفی می‌شود یا از کران بالایش تجاوز می‌کند (ناشدنی) می‌شود و از پایه خارج می‌شود.

(توجه کنید که این امکان وجود دارد که متغیر پایه ورودی اول از همه ناشدنی شود یعنی از کران بالایی خود بگذرد).

در این سیمپلکس فرض کنید که x_i متغیر ورودی است (منفی‌ترین $z_i - c_i$ را در مسأله *Max* داراست) مقدار z_i را افزایش می‌دهیم تا یک متغیر از پایه خارج شود. سه چیز باید در مورد مقدار x_i مدنظر قرار گیرد مقدار x_i حداقل مقادیر مطرح شده در موارد زیر است.

$x_i - BN_1 (= \text{Bottle Neck}_1)$ از حد بالایی خود (در صورت وجود) نمی‌تواند بیشتر شود.

$x_i - BN_2$ تا حدی افزایش می‌یابد که بیشتر از آن یکی از متغیرهای پایه فعلی منفی می‌شود.

در اینجا کمترین مقدار x_i که یکی از متغیرهای پایه فعلی را منفی می‌کند ملاک است. برای یافتن این مقدار هر متغیر پایه فعلی را در محدودیت مربوطه برحسب x_i بنویسید. در واقع BN_2 همان نسبت در *simplex* معمولی است.

$x_i - BN_2$ نباید آن مقدار افزایش یابد که باعث شود که یکی از متغیرهای پایه فعلی از حد بالایش (در صورت وجود) بیشتر شود. در اینجا هم هر متغیر پایه فعلی را از محدودیت برحسب x_i می‌توان نوشت.

¹ Generalized upper bounding

۱۵۴

$$x_{i_m} = \min \{BN_1, BN_2, BN_3\}$$

اگر $x_{i_m} = BN_1$ در معادلات بجای x_i $U_{i'} - x_i'$ می گذاریم.

اگر $x_{i_m} = BN_2$ بطور معمول وارد پایه می شود.

اگر $x_{i_m} = BN_3$

If $x_i = BN_3$ then we make an upper bound substitution on the variable x_j (by replacing x_j by $u_j - x_j'$) that reaches its upper bound when $x_i = BN_3$.

سپس x_i وارد پایه در سطر i که یک متغیر پایه بود می گردد.

مثال برای سیمپلکس جهت متغیرهای کران بالا از کتاب **Hillier & Lieberman**

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t

$$x_1 + s_1 = 4$$

$$x_2 + s_2 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

محدودیت های اول و دوم را در محاسبات منظور نکرده و داریم:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t

$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

	Z	x_1	x_2	s_3	RHS
Z	۱	-۳	-۵	۰	۰
s_3	۰	+۳	۲	۱	۱۸

$$2x_2 + s_3 = 18$$

$$s_3 = 18 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 9$$

۱۵۵

x_2 برای رفتن به پایه انتخاب می‌شود برای رفتن به پایه تعداد آن از مقدار فعلی صفر افزایش می‌یابد.
 x_2 از حد بالایش ۶ نمی‌تواند تجاوز کنند.

$$BN_1 = 6 \quad BN_2 = 9$$

یک متغیر در پایه فعلی است و آنهم حد بالا ندارد پس مقداری برای BN_3 وجود ندارد.

$$x_2 = \min \{6, 9\} = 6 = BN_1$$

چون این مقدار Min برابر BN_1 می‌باشد طبق دستورالعمل بجای x_2 در معادلات $S_2 - 6$ می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} \text{یا} \quad \text{Max } Z &= 3x_1 + 5(6 - s_1) \\ 3x_1 + 2(6 - s_1) + s_1 &= 18 \\ Z - 3x_1 + 5s_1 &= 30 \\ \text{s.t.} \quad 3x_1 - 2s_1 + s_2 &= 6 \end{aligned}$$

	Z	x_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	-3	5	0	30
s_3	0	3	-2	1	6

$$x_1 = 0$$

$$s_2 = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 6 \Rightarrow x_2 = 6$$

$$s_3 = 6$$

x_2 متغیر ورودی است.

$$BN_1 = 4$$

$$BN_2 = 2 \quad x_1 = \min \{4, 2\} = 2 = BN_2$$

$$BN_3 = \text{---}$$

چون $x_1 = BN_2$ بطور معمولی دارد پایه می‌شود.

	Z	x_1	s_2	s_3	
Z	1	0	3	1	36
x_1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

$$Z^* = ۳۶$$

جدول نهایی است.

تحلیل حساسیت یا پس بهینگی

Sensitivity Analysis (Postoptimality)

بطور کلی آنالیز حساسیت در یک مدل مشخص می کند که چگونه تغییرات یا خطا در پارامترهای ورودی بر خروجی مدل اثر می گذارد. اگر یک ورودی دامنه وسیعی مقدار بخود می گیرد ولی بر خروجی تاثیر چندانی نگذارد مدل نسبت به این ورودی غیر حساس است، اما اگر تغییر کوچکی در یک ورودی تاثیر قابل ملاحظه ای بر خروجی مدل داشته باشد نسبت به آن مدل حساس است. تحلیل حساسیت در اینجا به بررسی تاثیر تغییر پارامترهای مسأله روی جواب بهینه می پردازد. در این قسمت میخواهیم تغییراتی در صورت مسأله داده و تاثیر این تغییرات را بر روی جواب فعلی دریابیم. یک راه، حل مجدد مسأله است. ولی در این بخش میخواهیم بدون حل مجدد، مسأله را تحلیل کنیم.

دو نوع تغییرات را تمیز می دهیم:

۱ تغییرات گسسته در مقادیر ضرائب

مثلا اگر b_2 از ۱۵ به ۱۶ افزایش یابد آیا جواب جدید بهینه باقی می ماند.

II تغییرات بصورت پارامتری

مثلا اگر C_2 از ۵ به $5-\varphi$ بدل شود تا چه مقداری از φ جواب فعلی بهینه باقی می ماند.

(I) حالت گسسته

تحلیل حساسیت در حالت تغییرات گسسته معمولا برای ۵ مورد زیر صورت می گیرد.

- ۱- تغییرات در b_i ها
- ۲- تغییرات در C_j ها (در C_B و C_N)
- ۳- تغییرات در a_{ij} ها
- ۴- اضافه کردن متغیر(های) جدید به مسأله
- ۵- افزودن محدودیت(های) جدید

تغییرات در مقادیر سمت راست RHS یا bi ها

با توجه به اینکه

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} P_j - c_j, \quad X_B = B^{-1} P_0$$

این تغییرات تأثیر احتمالی بر شدنی بودن دارد و بر بهینگی بی تأثیر است. ثابت میشود افزایش (کاهش) یک واحد در bi باعث افزایش (کاهش) به میزان y_1^* (قیمت سایه منبع نام) واحد در تابع هدف اولیه در حالت بهینه (Z_x^*) میگردد با فرض اینکه متغیرهای پایه بهینه X_B^* فعلی تغییر نکند و سایر پارامترها نیز ثابت بمانند

مثال: صورت مساله و جدول نهایی داده شده در زیر را نظر گرفته و b_2 را از ۴ به ۱۲ تغییر دهید چه تاثیری در جواب حاصل خواهد شد؟

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 4 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۳۸
x_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۶
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴

در جدول بهینه مسأله فوق $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$ است. b_2 تغییر کرده است ما بردار $P. = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ را از $\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ تغییر می‌دهیم.

$$X_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \quad Z = C_B X_B = (3 \ 5) \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} = 54$$

پس جواب جدید نشدنی شده است. اما سطر صفر تغییر نمی‌کرده است ($z_j - c_j \geq 0$) زیرا به $P.$ بستگی ندارد

سوال: با استفاده از چه روش این جواب را به جواب شدنی تبدیل می‌کنید؟

جواب: با استفاده از الگوریتم *simplex* ثانویه تلاش صورت خواهد گرفت.

گام یک الگوریتم *simplex* ثانویه:

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۵۴
X_2	۰	۰	۱	۱	(-۱)	-۲
X_1	۰	۱	۰	۰	۱	۱۲

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۲	۵	۰	۵۰
S_2	۰	۰	-۱	-۱	۱	۲
x_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱۰

این جدول بهینه است.

تغییر در C_j ها (تغییر در C_B و تغییر در C_N)

الف تغییر در C_B

مثال: در مسأله قبل فرض کنید C_2 از ۳ به ۲ تغییر یافته. چون C_2 ضریب یک متغیر پایه است این امر

بر تمام

$Z_j - C_j$ های متغیرهای غیر پایه اثر گذار است. $Z_j - C_j$ متغیرهای پایه صفر خواهد ماند زیرا برابر است

$$C_B B B^{-1} - C_B = C_B I - C_B = 0$$

$$C_B B^{-1} (P_1 \dots P_n) - C = C_B (y_1 \dots y_n) - C$$

$$= \text{بردار } C - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{تمامی بردار } Z_j - C_j \text{ های جدید}$$

$$= (5 \ 2 \ 2 \ 3) - (5 \ 2 \ 0 \ 0) = (0 \ 0 \ 2 \ 3)$$

چون تمامی بردار $Z_j - C_j$ های جدید در این مساله بیشینه سازی غیر منفی است بردار جواب بهینه قبلی تغییر نکرده است.

بردار جواب بهینه قبلی تغییر نکرده $\Rightarrow (0 \ 0 \ 2 \ 3) \geq 0$ = بردار $Z_j - C_j$ های جدید

$$\text{اما مقدار } Z^* \text{ جدید: } Z^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 32$$

ب) تغییر در C_N

مثال مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$Max Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.t

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 5x_3 \leq 8$$

$$x_j \geq 0$$

جدول نهائی								
	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۵	۰	Dual Solution			۲۸۰
S_1	۰	۰	-۲	۰	۱	۲	-۸	۲۴
x_3	۰	۰	-۲	۱	۰	۲	-۴	۸
x_1	۰	۰	۱.۲۵	۰	۰	۰.۵	۱.۵	۲

مثالی برای تغییر در C_N

حال فرض کنید ضریب x_2 در تابع هدف (c_2) از ۳۰ به ۳۲ تغییر کند.

چون c_2 جزو C_B نیست تنها روی $z_2 - c_2$ تأثیر می‌گذارد.

$$(z_2 - c_2)_{new} = C_B B^{-1} P_2 - (c_2)_{new}$$

از ۴ راه می‌توانیم $C_B B^{-1} P_2$ را حساب کنیم

$$1) (C_B)(B^{-1})(P_2)$$

$$2) C_B(B^{-1}P_2)$$

$$3) C_B B^{-1} P_2 = z_2 = (z_2 - c_2)_{old} + (c_2)_{old} = 5 + 30 = 35$$

$$4)$$

$$(C_B B^{-1})P_2 = (Dual\ solution)(P_2) = (0, 10, 10) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix} = 20 + 10 = 30$$

$$\Rightarrow (Z_2 - C_2) = 35 - 32 = 3 > 0 \Rightarrow \text{جدید}$$

جواب جدول نهائی بهینه باقی میماند

c_2 تا مقدار ۳۵ میتواند تغییر کند و جدول نهائی بهینه باقی بماند اما با تغییر c_2 به ۳۵ و بیشتر جواب

فوق‌الذکر بهینه نبوده و x_2 وارد پایه می‌شود.

البته در $c_2 = 35$ جواب چندگانه خواهیم داشت اما مقدار $Z^* = 280$ باقی می‌ماند.

گفتیم اگر جدول بهینه در دست باشد، (بخش ۴-۴-۳ ترجمه HT ص ۱۰۷)

به شرط اینکه پایه بهینه فعلی در جدول نهایی و پارامترهای دیگر مسئله ثابت بماند افزایش یا کاهش

یک واحد در b_i باعث افزایش یا کاهش Z به میزان y_i^* (قیمت سایه محدودیت i ام) میگردد. به

عبارت دیگر:

y_i^* = قیمت سایه منبع i ام در جدول بهینه = میزانی است که به ازای یک واحد افزایش یا کاهش b_i ، Z^*

تغییر می‌کند (افزایش یا کاهش) با فرض ثابت ماندن بقیه پارامترها و بهینه ماندن جدول فعلی از

جمله عدم تغییر متغیرهای X_B^* فعلی و شدنی بودن آن.

مثال:

اولین مثال این فصل را در نظر بگیرید فرض کنید

الف) b_2 از ۴ به ۶ تغییر کرده میگوییم چون مقادیر

۱۶۱

$$\text{جدید} X_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

منفی نیست پس جدول جدید بهینه باقی میماند لذا Z^* از ۳۸ به $38 + (6 - 4)y_2^* = 42$ تغییر میکند. از

جدول نهایی

$2y_2^* = 42$ پس $Z^* = 42$ جدید. Z^* را برای اطمینان مطابق زیر هم محاسبه میکنیم:

$$Z^* = C_B X_B = (3 \ 5) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 42$$

ب) اگر b_2 از ۴ به ۱.۵ تغییر کند میگوییم:

$$\text{جدید} X_B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

پس جدول بهینه باقی میماند.

Z^* از ۳۸ به $38 + (1.5 - 4)(2) = 33$ تغییر میکند Z^* را برای اطمینان مطابق زیر هم محاسبه میکنیم

:

$$Z^* = C_B X_B = (3 \ 5) \begin{pmatrix} 8.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = 33$$

تغییر در a_{ij}

رسیدگی به این تغییرات همیشه راحت نیست مخصوصاً اگر تغییر در ضرایب متغیرهای پایه باشد.

مثال

فرض کنید در اولین مثال این فصل a_{22} از ۰ به ۲ تغییر یافته آیا X_B^* هم تغییر میکند.

حل داریم: در واقع P_2 تغییر کرده است.

B^{-1} تغییر کرده چون B شامل P_2 هم هست و P_2 تغییر کرده است $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ جدید

$x_2 \ x_1$

$$\text{جدید} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

تغییرات ایجاد شده در ستون های جدول چنین است:

$$\text{جدید } y_r = B_{new}^{-1} P_{r_{new}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_r - c_r = C_B y_r - c_r = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$\text{جدید } y_1 = B^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = C_B y_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 = 0$$

$$X_B = B^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$Z = C_B X_B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix} = -18 + 80 = 62$$

$$z_{s1} - c_{s1} = C_B B^{-1} P_{s1} - c_{s1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 7$$

$$z_{s2} - c_{s2} = C_B B^{-1} P_{s2} - c_{s2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -2$$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۷	-۲	۶۲
x_2	۰	۰	۱	-۱	۱	-۶
x_1	۰	۱	۰	۲	-۱	۱۶

به جدولی رسیدیم که نه با *Simplex* معمولی نه با سیمپلکس ثانویه *Dual simplex* قابل حل است. احتمالاً با الگوریتم سیمپلکس ضربدری و یا الگوریتم اولیه ثانویه که برای برخی حالات *non-optimal* و *infeasible* قابل استفاده است حل گردد.

با سیمپلکس ضربدری

ابتدا در سطر اول چون $RHS = -6$ و x_2 را به عنوان خارج شونده انتخاب می‌کنیم پس با توجه به صورت مسئله که Max سازی است $z_j - c_j \geq 0$ را تقسیم بر عناصر منفی سطر اول می‌کنیم. با توجه به این S_1 وارد شونده می‌شود.

از اینجا به بعد با سیمپلکس معمولی مسئله را حل می‌کنیم.

Basis	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۷	۰	۵	۲۰
s_1	۰	۰	-۱	۱	-۱	۶
x_1	۰	۱	۲	۰	۱	۴

حال جدول هم شدنی $bi \geq 0$ و هم بهینه می باشد $z_j - c_j \geq 0$

مثال دیگر برای تغییر a_{ij}

پس از حل مسأله

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad &5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ &x_1 + x_2 \leq 10 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

به جدول نهائی زیر رسیده ایم

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	$\frac{17}{5}$	$\frac{4}{5}$	۰	۳۲
x_1	۰	۱	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	۸
s_1	۰	۰	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۱	۲

حال فرض کنید متوجه شده ایم a_{12} اشتباهاً ۸ نوشته شده در حالیکه ۱ بوده است.

این اشتباه روی $z_2 - c_2$ و y_2 اثر می گذارد

$$y_2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = C_B y_2 = (4 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} - 3 = -\frac{11}{5} < 0$$

جدول فوق، دیگر جدول بهینه (نهایی) نبوده و باید با *Simplex* معمولی جدول جدید را تشکیل دهیم.

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	$-\frac{11}{5}$	$\frac{4}{5}$	۰	۳۲
x_1	۰	۱	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	۸
S_2	۰	۰	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۱	۲

اضافه کردن یک متغیر جدید

این حالت در واقع تغییرات همزمان در c_j ها و a_{ij} ها است. تأثیری در *feasibility* ندارد و فقط تأثیر احتمالی بر بهینگی جواب فعلی دارد والا هیچ گونه تأثیر دیگری ندارد. بنحاطر بیاورید که هر متغیرمسأله *primal* متناظر با یک محدودیت در *Dual* است. لذا برای بررسی اثر یک متغیر جدید *primal* به بررسی اثر محدودیت متناظر آن در *Dual* می پردازیم.

(ص ۲۲۹ کتاب Ignizio)

مسأله زیر با جدول نهایی داده شده را در نظر بگیرید.

جدول نهایی						
	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۳۸
X_2	۰	۱	۰	۱	-۱	۶
X_1	۰	۰	۱	۰	۱	۴

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_j \geq 0$$

حال مسئله فوق را به مسئله ذیل می کنیم

۱۶۵

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 8x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0$$

آیا جواب فعلی بهینه باقی می ماند؟

جواب قبل از افزودن متغیر جدید

$$y_1^* = 3$$

$$y_2^* = 2$$

جواب *Dual*:

$$x_1^* = 4$$

$$x_2^* = 6$$

جواب *Primal*:

اضافه شدن متغیر x_3 به اولیه متناظر با اضافه شدن محدودیت جدید $(y_1 \ y_2)P_3 \geq c_3$ به دوال است.

محدودیت جدید متناظر با متغیر جدید در *Dual* چنین است $y_1 + 2y_2 \geq 8$ جواب *Dual* در

محدودیت‌های قبلی دوال صدق می کند.

آیا جواب فعلی بهینه $y_1^* = 3$
 $y_2^* = 2$ در *Dual* جدید نیز صدق می کند؟ نه:

$$Z_3 - C_3 = (3) + 2(2) - 8 = -1 < 0$$

$$x_1^* = 4 \quad x_2^* = 6 \text{ را از بهینگی می اندازد.}$$

چون $Z_3 - C_3 < 0$ پس x_3 باید وارد پایه شود.

(توجه اگر جواب فعلی بهینه *Dual* در محدودیت $y_1 + 2y_2 \geq 8$ صدق می کرد پس $z_j - c_j$ مربوطه

غیرمنفی بوده و متغیر جدید تأثیری در بهینگی نداشت)

جدول بهینه قبل از افزودن متغیر جدید:

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۳۸
x_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۶
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴

حال به آن متغیر x_3 اضافه می شود.

$$y_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = C_B y_3 - c_3 = (3 \ 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 8 = -1$$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	-۱	۳	۲	۳۸
x_2	۰	۰	۱	-۱	۱	-۱	۶
x_1	۰	۱	۰	۲	۰	۱	۴

با روش سیمپلکس معمولی

x_3 متغیر ورودی و x_1 متغیر خروجی می شود.

اگر در مسأله فوق تابع هدف $Max Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$ بود چه می شد.

جواب: $y_1^* = 3$
 $y_2^* = 2$ در محدودیت مربوطه به x_3 در دوال صدق می کرد:

$(y_1, y_2)(P_3) - c_3 = y_1 + 2y_2 - 6 \geq 0$ و لذا $z_3 - c_3$ غیر منفی و x_3 تأثیری در بهینگی نمی داشت

زیرا. $z_3 - c_3 = 3 + 2(2) - 6 = 1 \geq 0$

اضافه کردن یک محدودیت جدید

اشتباهی که خیلی متداول است اینست که در هنگام مدلسازی یک یا چند محدودیت در نظر گرفته نمی شود برای رسیدگی به این امر: اگر جواب بهینه مسأله قبلی در محدودیت های جدید صدق کند، این محدودیت ها تأثیری در جواب بهینه بدست آمده ندارند والا تأثیر داشته و باید اقدام لازم بعمل آید یعنی پس از استاندارد کردن محدودیت جدید آنرا وارد جدول نموده و عملیات سطری و ستونی لازم را انجام دهیم

اضافه کردن یک محدودیت در مسئله Max یا Z^* را کاهش می دهد یا تأثیری در مسأله آن ندارد.

مثال ۱ به مسأله زیر با جدول نهایی داده شده

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_j \geq 0$$

جدول نهایی						
	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۳۸
x_2	۰	۱	۰	۱	-۱	۶
x_1	۰	۰	۱	۰	۱	۴

محدودیت $2x_1 + 3x_2 \leq 30$ را افزوده ایم چون $X_B^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ در آن صدق می کند لذا اثری بر جواب بهینه نمی گذارد (محدویت فعال نیست).

مثال ۲ محدودیت $x_1 + 3x_2 \leq 15$ در مسأله فوق فراموش شده است. اثر آنرا بررسی کنید.

$X_B^* = \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ در محدودیت صدق نکرده و لذا بر مسأله تأثیر دارد (محدویت فعال است). متغیر

کمکی S_3 را به آن افزوده: $x_1 + 3x_2 + S_3 = 15$ و آنرا وارد جدول می کنیم:

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۰	۳۸
x_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۰	۶
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴
S_3	۰	۱	۳	۰	۰	۱	۱۵

ضرائب متغیرهای پایه‌ای x_1 و x_2 در سطر سوم باید با عملیات سطری و ستونی صفر شوند اینکار طی ۲ مرحله (هر مرحله برای یک ضریب) و یا ۱ مرحله تماماً انجام پذیراست:

$$= (\text{سطر اول}) (-3) + (\text{سطر دوم}) (-1) + \text{سطر سوم قدیم} = \text{سطر سوم جدید}$$

جدول جدید حاصل می‌شود که شامل جواب نشدنی است.

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۰	۳۸
X_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۰	۶
X_1	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴
S_3	۰	۰	۰	-۳	۲	۱	-۷
ϕ_j				$ \frac{3}{-3} $			

از **Dual simplex** کمک می‌گیریم: s_3 خروجی s_1 ورودی

جدول زیر حاصل می‌شود که جدول نهایی است.

جدول نهایی

$Basis$	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	۴	۱	۳۱
x_2	۰	۰	۱	۰	$-1\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$6 - \frac{7}{3} = \frac{11}{3}$
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴
S_1	۰	۰	۰	۱	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$

البته برای حالت گسسته موارد دیگری هم در برخی کتب مورد بررسی قرار گرفته است.

II تحلیل حساسیت پارامتری parametric Linear programming

تا بحال تأثیر تغییرات گسسته را در ضرایب بررسی نمودیم. در این بخش می‌خواهیم تأثیر دامنه‌ای از تغییرات خطی را در c_j ، b_i و P_j مربوط به متغیرهای غیر پایه بررسی کنیم.

تغییرات خطی در بردار C

فرض کنید در حال حاضر در یک مسأله $X_B^* = B^{-1}P_0$ جواب بهینه است که در آن B^{-1} در جدول نهائی مفروض است.

حال بردار $(c_1 \dots c_j \dots c_n)$ به $(c_1 + \theta e_1 \dots c_j + \theta e_j \dots c_n + \theta e_n)$ تغییر یافته بعبارت دیگر

$$C = C^+ = C + \theta E$$

که در آن θ یک کمیت اسکالر غیرمنفی

$$E = (e_1 \dots e_j \dots e_n)$$

می‌خواهیم ببینیم θ تا چه حد می‌تواند تغییر کند بطوریکه اگر بردار C با $C = C^+ =$ جایگزین شود جواب بهینه فعلی باقی بماند. جواب:

در بیشینه سازی مادام که کلیه $z_j^+ - c_j^+ \geq 0$ ها، θ می‌تواند تغییر کند و X_B^* فعلی ثابت می‌ماند. اما اگر $C_B = C_B^+$ تابعی از θ باشد Z^* ممکن است با θ تغییر کند.

$$z_j^+ - c_j^+ = (C_B^+ + \theta E_B) y_j - (c_j + \theta e_j) = \overset{=z_j}{C_B} y_j - c_j + \theta (E_B y_j - e_j)$$

که در آن E_B زیر مجموعه ای از E است که متناظر با اجزاء C_B میباشد و y_j ها ستون زیر متغیر نام از جدول نهائی است.

اگر تمام $E_B y_j - e_j \leq 0$ ، در وضعیت فعلی X_B^* مسأله ما تغییری حاصل نمی‌شود زیرا جدول نهائی

بهینه باقی می‌ماند لکن اگر یک یا چند $E_B y_j - e_j$ منفی باشد با تغییر θ ممکن است یک $z_j^+ - c_j^+$

منفی شود و شرایط بهینگی (*optimality*) بهم بخورد. می‌خواهیم آن مقدار بحرانی θ را که بیش از

آن باعث منفی شدن اولین $z_j^+ - c_j^+$ غیر پایه می‌شود بدست آوریم.

برای کلیه $(E_B y_j - e_j) < 0$ می‌نویسیم: توجه برای نهای پایه این مقدار صفر است.

۱۷۰

$$\begin{cases} z_1 - c_1 + \theta(E_B y_1 - e_1) > 0 \\ \vdots \\ z_j - c_j + \theta(E_B y_j - e_j) > 0 \\ \vdots \\ \text{for all } (E_B y_j - e_j) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta < -\frac{z_1 - c_1}{E_B y_1 - e_1} \\ \vdots \\ \theta < -\frac{z_j - c_j}{E_B y_j - e_j} \\ \text{با شرط } E_B y_j - e_j < 0 \end{cases}$$

برای کلیه متغیرها θ که برای آنها $E_B y_j - e_j < 0$ صدق می‌کند، این نامساوی باید نوشته شود به جز متغیرهای پایه زیرا مقدار $E_B y_j - e_j$ برای متغیرهای پایه ای صفر است.

$$\theta_c = \min \left\{ -\frac{z_j - c_j}{E_B y_j - e_j} \mid E_B y_j - e_j < 0 \right\}$$

اگر برای تمام j ها $E_B y_j - e_j$ مثبت یا صفر باشد θ حدهی ندارد $\theta_c = \infty$.

اگر $\theta > \theta_c$ با جایگذاری C^+ ، جواب فعلی دیگر بهینه نخواهد بود.

مثال

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

مقدار C_1, C_2 را بترتیب به $\theta + 3, \theta + 1$ تغییر می‌دهیم

جدول بهینه در $\theta = 0$:

$\theta = 0$						
		$c_1 = 3$	$c_2 = 1$			
	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰/۵	۰	۱/۵	۳
s_1	۰	۰	۲	۱	-۱	۲
x_1	۰	۱	۰/۵	۰	۰/۵	۲

مطلوبست مقدار بحرانی θ بطوریکه تا آن حد X_B^* همین جدول بهینه باقی بماند.

$$C^+ = C + \theta(0 + 2 + 0 + 0)$$

به ازای $\theta = 0$ جدول فوق نهایی است.

لازم به توضیح است با تغییر θ ، Z بعنوان تابعی از θ تغییر می‌کند چون C_B تابعی از θ است. برای یافتن θ_c باید $E_B y_j - e_j$ ها را برای غیر پایه ها بدست آوریم و بینم کدام منفی است. در این مساله x_3, x_2 در پایه نیستند.

$$E_B = (0, 1) \quad \text{غیر پایه} \quad E_B y_j - E_j = (0, 1) \begin{pmatrix} y_r & y_{s_1} \\ 2 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} - (2, 0) = (-1.5, 0.5)$$

البته جدا جدا هم میتوان بدست آورد. تنها $E_B y_j - e_j$ منفی متعلق به x_2 است.

$$z_r^+ - c_r^+ = z_r - c_r + \theta(E_B y_r - e_r) = 0.5 + \theta(-1.5) \Rightarrow$$

$$\theta_c = \frac{-(z_r - c_r)}{E_B y_r - e_r} = \frac{-0.5}{-1.5} = \frac{1}{3} = \alpha$$

این اولین مقدار بحرانی θ را α بنامید.

بنابراین هرگاه θ بین ۰ تا $\alpha = \frac{1}{3}$ تغییر کند تمامی عناصر $z_j - c_j$ جدول فعلی بهینه مثبت یا صفر باقی

خواهند ماند و در $\theta = \alpha = \frac{1}{3}$ هم صفر می‌شود $\Leftarrow$ جواب چندگانه داریم. در

							$\theta = \alpha = \frac{1}{3}$
		$c_1 = 3 + \frac{1}{3}$	$1 + \frac{2}{3}$				
	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$C_B X_B = (0, 3, \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{20}{3}$	
S₁	۰	۰	(۲)	۱	-۱	2	
x₁	۰	۱	۰/۵	۰	۰/۵	۲	

تنها فرق این جدول با جدول بهینه قبلی در $z_j - c_j$ هاست چون C_B تغییر کرده برخی از $z_j - c_j$ ها هم تغییر کرده‌اند. چون $x_2, z_2 - c_2 = 0$ هم میتواند در پایه باشد. اگر x_2 را بجای S_1 وارد پایه جدول کنیم

جواب دیگر بهینه در $\theta = \alpha = \frac{1}{3}$

		$c_1 = 3 + \frac{1}{3}$	$1 + \frac{2}{3}$			
	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS

Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{20}{12}$	$\frac{20}{3}$
x_2	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

$$X_B^* = \begin{pmatrix} X_2^* \\ X_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Z^* = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{20}{3}$$

سوال: X_B^* جدول جدید تاکی بهینه خواهد ماند؟

جواب:

برای حل توجه کنید که جدول جدید در واقع حل بهینه همان مثال دو صفحه قبل است ولی با تابع

$$Z = 3\frac{1}{3}x_1 + 1\frac{2}{3}x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

حال می خواهیم در مساله اول θ را باز بیشتر کنیم. مقدار اضافی را نسبت به $\frac{1}{3}$ را θ' می نامیم. یعنی در این مساله c_1 را از $3\frac{1}{3}$ به $3\frac{1}{3} + \theta'$ و c_2 را از $1\frac{2}{3}$ به $1\frac{2}{3} + \theta'$ تغییر داده ببینیم تا چه مقدار θ' جدول فوق بهینه باقی میماند.

ابتدا باید ببینیم برای متغیرهای غیر پایه این جدول کدام $E_B y_j - e_j < 0$ منفی است؟

$$E_B = (2 \ 1) \quad \text{غیر پایه} \quad E_B y_j - e_j = (2 \ 1) \begin{pmatrix} y_{S_1} & y_{S_2} \\ 0.5 & -0.5 \\ -0.25 & 0.75 \end{pmatrix} - (0 \ 0) = (0.75 \ -0.25)$$

پس تنها $z_j - c_j$ متعلق به S_2 امکان دارد منفی شود.

$$z_{S_2}^+ - c_{S_2}^+ < 0 \Rightarrow z_{S_2} - c_{S_2} + \theta' (E_B y_{S_2} - e_{S_2}) = \frac{20}{12} + \theta' \left(-\frac{1}{2} \right) < 0 \Rightarrow \theta' > \frac{20}{3} = \theta'_C$$

$\theta'_C = \theta'_C$ میزان افزایش در θ نسبت به $\frac{1}{3}$.

یعنی با تغییر بردار C از $C = \left(3\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 0, 0 \right)$ تا $C^+ = C + \theta'_C E$ یعنی $C^+ = C + \frac{20}{3} (1 \ 2 \ 0 \ 0)$

یا $C^+ = \left(\frac{10}{3} + \frac{20}{3} = 10, 1\frac{2}{3} + 2 \times \frac{20}{3} = 15, 0, 0 \right)$ X_B جدول فوق بهینه می ماند و

$$Z = C_B X_B = \left(1 + \frac{2}{3}\theta, \quad 3 + \frac{1}{3} + \theta\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{7}{2}\theta, \quad \theta = \frac{1}{3} + \theta' \quad = \quad \frac{11 + 7\theta}{2}$$

$$\text{در } Z_{S_1}^+ - C_{S_1}^+ = 0, \quad \theta'_C = \frac{2}{3}$$

$$\text{لذا مقدار بحرانی بعدی } \theta \text{ (نسبت به صفر) چنین است } \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 7$$

فرمول یافتن β :

$$\beta = \alpha + \min_{j \text{'s}} \left\{ -\frac{\alpha_{Z_j} - c_j}{E_B^{\alpha} y_j - e_j} \mid E_B^{\alpha} y_j - e_j < 0 \right\}$$

زغیر پایه

منظور از $\alpha_{Z_j} - c_j, \alpha_{y_j}$ ضرایب مربوطه در جدول نهائی (بهینه) پس از اعمال مقدار بحرانی اولیه α است.

$$\text{پس برای } \frac{1}{3} \leq \theta < 7 \quad X_B^* \text{ جدول آخر بهینه باقی می ماند و مقدار تابع هدف}$$

$$Z^* = C_B X_B^* = \left(1 + \frac{2}{3}\theta, \quad 3 + \theta\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{11 + 7\theta}{2}$$

$$\text{حالتی شبیه چندگانه داریم با } Z^* \text{ متفاوت.} \quad \begin{cases} \theta = 7 \\ \theta'_C = \frac{20}{3} \end{cases}$$

بجای S_2 متغیر غیر پایه x_1 می تواند وارد پایه می شود زیرا ضریب آن در سطر Z جدول صفر است

$$X_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ S_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Z^* = 30 \quad \text{جواب بهینه در این حالت } Z_{S_1}^+ - C_{S_1}^+ = 0$$

جدول بهینه دیگر برای $\theta = 7$

$$\begin{matrix} y_1 \downarrow & y_{S_1} \downarrow \\ Z_j - c_j = C_B y_j - c_j = \begin{pmatrix} x_2 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - (3 + \theta \quad 0) = \begin{pmatrix} \frac{\theta - 7}{3} & \frac{2\theta + 1}{3} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

در $\theta = 7$ $z_1 - c_1$ و $z_{s_1} - c_{s_1}$ به ترتیب برابر صفر و پنج میگردند

		Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
C_B	Z	۱	۰	۰	۵	۰	$۲ + ۴\theta$
$1 + 2\theta$	x_2	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	۲
۰	S_2	۰	$\frac{۴}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۲

بررسی $\theta > 7$

با افزایش θ از ۷، X_B^* این جدول تا کی بهینه می ماند؟ تا γ :

$$\gamma = \beta + \min_{\substack{\text{nonbasic} \\ j's}} \left\{ -\frac{\beta z_j - \beta c_j}{E_B \beta y_j - e_j} \mid E_B \beta y_j - e_j < 0 \right\}$$

j غیر پایه

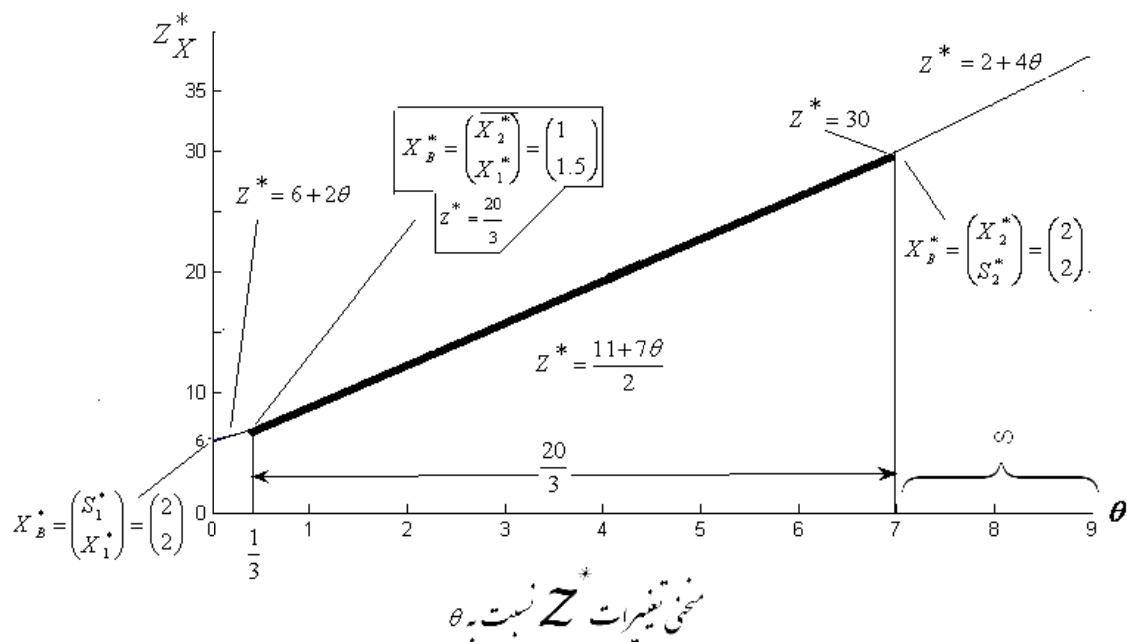
$$E_B(y_1, y_{s_1}) - (e_1, e_{s_1}) = (2, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - (1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} > 0$$

چون هیچ عنصر منفی در آن نیست، $Z_j^+ - C_j^+$ جدید برای غیر پایه ها تا هر جا که θ را بخواهیم

اضافه کنیم مثبت می ماند پس $\gamma = \infty$ پس $X_B^* = \begin{pmatrix} x_2^* \\ S_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ با افزایش θ از 7 به بعد همواره

بهینه باقی می ماند و مقدار تابع هدف برابر خواهد بود با:

$$\theta > 7 \quad Z^* = C_B X_B = (1 + 2\theta, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 4\theta$$



شکل ۲۱ منحنی تغییرات مقدار تابع هدف نسبت به θ در مثال فوق

مثال دیگر برای تغییرات پارامتری در c_j ها

$$c_1 = 6 - \theta \quad c_2 = 14 - 2\theta \quad c_3 = 13 - 2\theta$$

جدول آغازین یک مسأله بیشینه سازی برای $\theta = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	۱	-۶	-۱۴	-۱۳	۰	۰	۰
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	۲	۱	۱	۰	۲۴
S_2	۰	۱	۲	۴	۰	۱	۶۰

جدول نهائی مسأله برای $\theta = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	+۹	۰	+۱۱	۱	294
x_1	۰	۱	۶	۰	۴	-۱	۳۶
x_3	۰	۰	-۱	۱	-۱	۰/۵	۶

$$\theta_c = \min_{\substack{\text{non basic} \\ X_j \text{'s}}} \left\{ -\frac{Z_j - c_j}{E_B y_j - e_j} \mid E_B y_j - e_j < 0 \right\} \quad E_B = (-1 \quad -2)$$

$$E_B y_j - e_j = (-1 \quad -2) \begin{pmatrix} x_1 & s_1 & s_2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^t$$

$$\theta_c = \min_{\substack{x_1 \\ s_1}} \left\{ -\frac{9}{-2}, -\frac{11}{-2} \right\} = \frac{9}{2}$$

در فاصله $0 \leq \theta < \frac{9}{2}$ جواب بهینه فوق یعنی $X_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* = 36 \\ x_2^* = 6 \end{pmatrix}$ بهینه خواهد ماند اما Z^* با تغییر

θ تغییر می‌کند در $\theta = \frac{9}{2}$ حالتی شبیه حالت جواب چندگانه داریم اما با Z^* متفاوت. Z^* با θ تغییر میکند. x_2 ورودی و x_1 خروجی سطر Z از طریق $C_B y_j - c_j$ محاسبه شده است.

		Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
C_B	Z	۱	۰	۰	۰	+۲	$+\frac{2}{3}$	۷۸
$\frac{9}{14 - 2(-)} = 5$	x_2	۰	$\frac{1}{6}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	۶
4	x_3	۰	$\frac{1}{6}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱۲

$$\text{for non basic } X_j \text{'s} \quad E_B y_j - e_j = (-2 \quad -2) \begin{pmatrix} x_1 & s_1 & s_2 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - (-1 \quad 0 \quad 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ -\frac{2}{-\frac{2}{3}}, -\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} \right\} = \{3, 1.5\} = 1.5$$

جواب $X_B^* = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ با تغییر θ بین $4.5 \leq \theta < 4.5 + 1.5$ بهینه باقی می ماند اما Z^* با θ تغییر می کند.

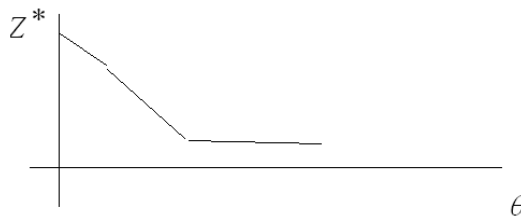
$$\theta = \beta = \alpha + \min_{\text{non-basic}} \left\{ -\frac{\alpha_{zj} - c_j}{E_B^{\alpha} y_j - e_j} \mid E_B^{\alpha} y_j - e_j < 0 \right\} = 6$$

's' زیر پایه

در $\theta = 6$ ضریب S_2 در سطر Z صفر می گردد. حالتی شبیه به جواب بهینه چندگانه داریم S_2 وارد پایه و x_3

خارج می شود و تا $\gamma = 6 + \min\{\cdot\} = 6 + 1 = 7$ یعنی θ_c یعنی $\theta = \gamma = 7$ پایه $\begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \end{pmatrix}$ بهینه باقی می ماند در

$\theta = 7$ S_1 وارد و x_2 خارج می شود و جدول شبیه اولین جدول خواهد بود.



شکل ۲۲

یک مساله با حل و تحلیل حساسیت با Lindo

Consider Giapetto AGAIN!

! OPERATIONS RESEARCH BO 310 IPSKRUGER

11/3/2000

! GIAPETTO AS DEFINED IN WINSTON P.52 I MAX

3X1 + 2X2

SUBJECT TO

2X1 + X2 <= 100

X1 + X2 <= 80

X1 <= 40

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 180.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	60.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	1.000000
4)	20.000000	0.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES			
VARIABLE	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	COEF	INCREASE	DECREASE
X1	3.000000	1.0000	1.0000
X2	2.000000	1.000000	0.5000

RIGHTHAND SIDE RANGES			
ROW	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	100.000000	20.000000	20.000000
3	80.000000	20.000000	20.000000
4	40.000000	INFINITY	20.000000

تمرین حل و تحلیل حساسیت مساله زیر را با یک نرم افزار انجام دهید (حل با **Lindo** آخر همین جزوه).

Max Z=32 SM + 55TM +5SB +5TB				
SUBJECT TO				
2)	3 SM +	5TM	≤	145
3)	2 SM +	4TM	≤	90
4)	SM +	SB	≤	50
5)	TM +	TB	≤	50
تمام متغیرها غیر منفی اند				

بررسی تغییرات خطی در بردار P_0

فرض کنید که **RHS** را از P_0 به $P_0 + \theta b$ تغییر داده ایم توجه بردار b را در اینجا با خود **RHS** اشتباه نکنید.

$P_0 + \theta b$ را با 0P_0 و $P_0 + \theta b$ را به 0P_0 نشان می‌دهیم. $X_B = B^{-1}P_0$ جواب بهینه فعلی با 0P_0 محاسبه شده است. X_B پس از تغییر P_0 ، به ${}^{\theta}X_B = B^{-1}P_0 + \theta B^{-1}b$ تبدیل می‌شود.

اگر تمام عناصر $B^{-1}b \geq 0$ مثبت یا صفر باشند θ به طور نامحدود قابل افزایش است و همواره ${}^{\theta}X_B$ با هر مقدار θ ، شدنی بودن (و بهینگی) خود را حفظ می‌کند. اما اگر بازای حداقل یک i $(B^{-1}b)_i < 0$ آنگاه یک مقدار بحرانی برای θ بدست می‌آید که اگر θ از آن بگذرد جواب مسأله نشدنی می‌گردد و باید در جستجوی جواب جدید باشیم.

$$\theta_c = \min_i \left\{ -\frac{(X_B)_i}{(B^{-1}b)_i} \mid (B^{-1}b)_i < 0 \right\}$$

اگر α و β ۲ مقدار بحرانی متوالی برای θ باشد و $\alpha < \beta$ بطور کلی می‌توان نوشت:

$$\beta = \alpha + \min_i \left\{ -\frac{\alpha (X_B)_i}{(\alpha B^{-1}b)_i} \mid (B^{-1}b)_i < 0 \right\}$$

مثال:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 10 - \theta$$

$$x_1 \leq 4 - 2\theta$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \theta \geq 0$$

جدول نهایی برای $\theta = 0$						
	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	۰	۳	۲	۳۸
x_2	۰	۰	۱	۱	-۱	۶
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴

تا چه مقدار θ را تغییر دهیم که جواب فوق بهینه باقی‌بماند؟

۱۸۰

$${}^{\theta}P_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad {}^{\theta}X_B = B^{-1} {}^{\theta}P_o = B^{-1} (P_o + \theta b) = B^{-1} P_o + \theta B^{-1} b$$

$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1} b)_r < 0$$

$${}^{\theta}X_B = X_B^* + \theta B^{-1} b = \begin{pmatrix} 6 \\ \xi \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ \xi - 2\theta \end{pmatrix} = {}^{\theta} \begin{pmatrix} x_r \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ or}$$

$${}^{\theta} \begin{pmatrix} x_r \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 - \theta \\ \xi - 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ \xi - 2\theta \end{pmatrix}$$

برای $\theta > 0$ ، x_r هیچگاه منفی نمی شود اما x_1 تا $\theta < 2$ منفی نمی شود و لذا برای $0 \leq \theta < 2$ X_B

فعلی شدنی و بهینه باقی می ماند. در $\theta = 2$ جواب تباهیده داریم: $X_B^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

به ازای $\theta > 2$ مقدار x_1 منفی شده و باید از پایه خارج شود چون هیچ یک از ضرائب سطر x_1 در جدول منفی نیست تا بتوانیم بکمک قوانین *Dual Simplex* مسأله را حل کنیم $\Leftarrow$ مسأله بازاری $\theta > 2$ جواب بهینه ندارد.

این نتیجه نباید تعجب آور باشد با نگاه به مسأله اصلی می بینیم که بازاری $\theta > 2$ در محدودیت دوم RHS کمتر از صفر می گردد و $x_1 < 0$ (منابع مربوطه تمام می گردد).

مثال دیگر برای تغییرات پارامتری در P_0

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 - \theta$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 + \theta$$

$$x_j \geq 0, \theta \geq 0$$

جدول بهینه							
	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	${}^{\theta}RHS$
Z	1	0	9	0	11	0/5	$294 - 10.5\theta$
x_1	0	1	6	0	4	-1	$36 - 5\theta$
x_3	0	0	-1	1	-1	0/5	$6 + 1.5\theta$

به ازای $\theta > 0$ ، $6 + 1.5\theta$ مثبت باقی خواهد ماند.

۱۸۱

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

یافتن θ_c از طریق فرمول:

$$\theta_c = \min \left\{ \frac{-(x_B)_i}{(B^{-1}b)_i} \mid (B^{-1}b)_i < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{-36}{-5} \right\} \Rightarrow \theta_c = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

راه دیگر از روی جدول فوق:

تا کجا RHS مثبتی بر $\theta (= RHS)$ منفی نمی شود؟

$$\begin{cases} 36-5\theta > 0 \\ 6+1.5\theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_c = 7\frac{1}{5}$$

پس برای $0 \leq \theta < 7\frac{1}{5}$ همین X_B^* جواب بهینه می ماند در $\theta = 7\frac{1}{5}$ جواب منحنی می شود. بازای $\theta > 7\frac{1}{5}$ مقدار x_1 منفی شده و متغیر خروجی می شودمتغیر ورودی براساس روش *Dual Simplex* تعیین میشود:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	${}^{\theta}RHS$
Z	۱	۰/۵	۱۲	۰	۱۳	۰	$312 - 13\theta$
S_2	۰	-۱	-۶	۰	-۴	۱	$-36 + 5\theta$
x_3	۰	۰/۵	۲	۱	۱	۰	$24 - \theta$

برای یافتن θ_c بعدی می گوییم این جدول در صورتی بهینه است که ${}^{\theta}RHS$ غیر منفی باقی بماند

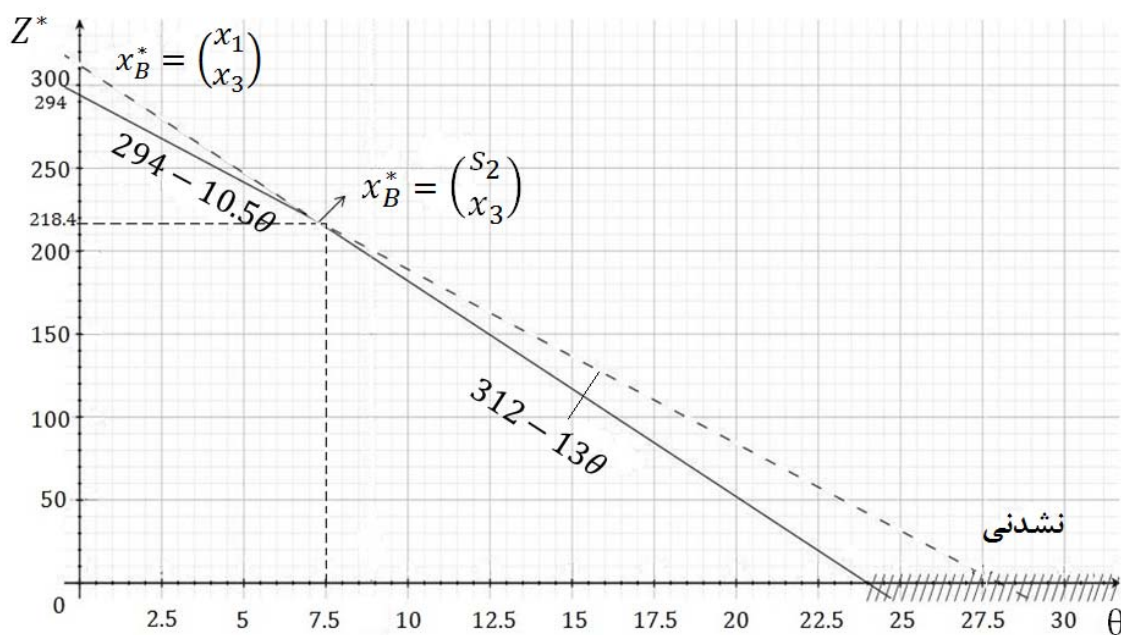
$$\begin{cases} -36 + 5\theta \geq 0 & \theta \geq 7\frac{1}{5} \\ 24 - \theta \geq 0 & \theta \leq 24 \end{cases} \Rightarrow 7\frac{1}{5} \leq \theta \leq 24$$

در $\theta = 24$ چه حالتی داریم؟

منفی شده و باید از پایه خارج شود، اما سطر دوم هیچ ضریب منفی ندارد. x_3 مقدار $\theta > 24$ برای ثانویه مسأله نشدنی است. جهت اینکه این مطلب را بهتر متوجه *Simplex* پس براساس ضوابط زیر درآمده است صورت شوید. دقت کنید که محدودیت دوم با اعمال گاس جردن به

$$\begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot Z + 0.5 x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 + 0 \cdot s_2 = 24 - \theta$$

برای $\theta > 24$ سمت راست رابطه فوق منفی می‌شود و این در حالتی که سمت چپ چون متغیرها غیرمنفی‌اند و ضریب آنها مثبت است هیچ‌گانه منفی نمی‌شود پس برای $\theta > 24$ جواب شدنی نداریم. البته این امر از روی صورت مسأله نیز مشخص است (به محدودیت اول توجه کنید).



شکل ۲۳ منحنی تغییرات Z نسبت به θ

توجه: برخی از کتاب‌ها θ را مثبت نمی‌گیرند و می‌گذارند θ مثبت یا منفی شود.

بررسی تغییرات در بقیه حالت‌ها

این امر کار چندان ساده‌ای نیست. یک حالت آن در کتاب برای P غیرپایه تا حدی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است راحت‌تر است مسأله از اول حل گردد تا اینکه تحلیل حساسیت پارامتری انجام شود.

تذکر به دانشجویان در مورد *simplex* برای متغیرهای کراندار (*bounded variable*) و نیز در مورد *dual-primal simplex* و نیز *LINDO* و *Sensitivity Analysis*: کتاب *Winston* ص ۲۰۱ به بعد

مسئله حمل و نقل Transportation

اولین مدل حمل و نقل در ۱۹۴۱ توسط هیچکاک (*F.L. Hitchcock*) استاد MIT طی مقاله‌ای ارائه شد.

مفروضات:

- (۱) m مبدا O_i ($i=1 \dots m$) با تعداد واحد قابل عرضه S_i داریم
- (۲) n مقصد D_j ($j=1 \dots n$) با تعداد واحد مورد تقاضای d_j داریم
- (۳) هزینه حمل هر واحد کالا از مبدا i تا مقصد j برابر است با C_{ij}

	D_1	.	.	.	D_j	.	.	.	D_n	S_i
O_1	c_{11} X_{11}								c_{1n} X_{1n}	S_1
.										
.										
.										
O_i					c_{ij} X_{ij}					S_i
.										
.										
.										
O_m	c_{m1} X_{m1}								c_{mn} X_{mn}	S_m
d_j	d_1				d_j				d_n	

مثال‌هایی برای کاربرد مدل حمل و نقل

نحوه توزیع برق چند نیروگاه بین چند شهر. تقسیم میزان تولید لازم از چند نوع کالای مختلف که توسط چند کارخانه مشابه تولید می‌شود.

نحوه تقسیم چند نوع از خدمات یک مؤسسه که دارای چند شعبه است بین شعبات مختلف، ت

قسیم n نوع پروژه جهت ممیزی و بررسی بین ممیزهای مختلف m گانه

مسائل time-dependent نظیر زمان بندی تولید (production scheduling) تقسیم

خدمات عمده فروشی‌ها،

Storage /retrieval (computer files ,customer information ,warehouse layout)

هدف مسئله حمل و نقل:

میخواهیم تعداد واحدهائی را که باید از مبادی m گانه به مقصدهای n گانه اختصاص یابد تعیین شود بطوریکه مجموع هزینه حمل کمینه گردد و تمام تقاضاها برآورده شود.

یک فرم کلی مسئله حمل و نقل چنین است

(ص ۱۹۳. واگنر ۱۹۶۹، اسمیت و جانسون، ۱۹۶۶ ص ۱۷۰):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n X_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} \geq d_j \quad j = 1, \dots, n \\ X_{ij} \geq 0 \text{ for all } i \& j \end{array} \right.$$

X_{ij} = تعداد واحد کالائیکه از مبدا i به مقصد j اختصاص می یابد.

C_{ij} = هزینه ارسال واحد کال از مبدا i به مقصد j

d_j = تعداد واحد کالائیکه در مقصد j نیاز داریم

S_i = تعداد واحد کالائیکه در مبدا i در اختیار هست.

در مسئله (مدل) حمل و نقل سه حالت $\sum S_i < \sum d_j$, $\sum S_i > \sum d_j$, $\sum S_i = \sum d_j$

ممکن است وجود داشته باشد. مدل را در حالت اول متوازن و در دو حالت دیگر نامتوازن گویند.

شرط لازم و کافی برای وجود داشتن جواب شدنی مسئله فوق $\sum S_i \geq \sum d_j$ می باشد (اسمیت و جانسون،

۱۹۶۶)

مدل متوازن حمل و نقل (با میزان عرضه و تقاضای برابر)

$$\begin{cases} \sum_i X_{ij} = d_j \\ \sum_j X_{ij} = S_i \end{cases} \quad \text{ساده ترین حالتی که در مدل هست اینست که}$$

مدل برنامه ریزی خطی مساله چنین خواهد بود:

$$\text{Min } \sum \sum C_{ij} X_{ij}$$

s.t.

$$\text{محدودیت بصورت تساوی } m \text{ I) } \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad i=1, \dots, m$$

$$\text{محدودیت بصورت تساوی } n \text{ II) } \sum_i x_{ij} = d_j \quad j=1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

یک شرط لازم و کافی برای وجود جواب شدنی مدل فوق $(\sum_{j=1}^n d_j = \sum S_i)$ (Hadley, 1963 ص ۲۷۹) است.

به عبارت دیگر می توان نشان داد اگر همه محدودیت ها در مدل حمل و نقل به صورت تساوی باشند و بخواهد مساله جواب داشته باشد مدل باید متوازن باشد. این مدل ایجاب می کند که

$$\sum_{j=1}^n d_j = \sum_j \sum_i X_{ij} = \sum_i \sum_j X_{ij} = \sum_{i=1}^m S_i$$

یعنی میزان کل عرضه و کل تقاضا در این مدل برابرند در ضمن اگر تمام S_i ها و d_j ها اعداد صحیح باشند مقادیر جواب بهینه اعداد صحیح خواهند بود (هلیه و لیبرمن، ۱۹۶۷ ص ۱۶۷ و هدلی، ۱۹۶۳ ص ۲۸۰).

خواهید دید تعداد متغیرهای اساسی مسأله: $m + n - 1$

حالات دیگر یعنی $\sum S_i > \sum d_j$ ، $\sum S_i < \sum d_j$ که غیر متوازن است بعداً بررسی قرار خواهد گرفت (از مهرگان ص ۲۵۷ و ۲۵۸)

ثانویه مدل فوق

برای نوشتن مساله ثانویه مدل فوق U_i را متغیرهای ثانویه متناظر محدودیت نوع I و V_j را متغیرهای دوال محدودیت نوع II بگیرید.

$$\text{Max } Z_y = \sum_{i=1}^m s_i U_i + \sum_{j=1}^n d_j V_j$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad \forall i, j \quad \text{دوال مسئله فوق:}$$

$$U_i, V_j = \text{آزاد در علامت}$$

روش حل مسائل حمل و نقل با سیمپلکس حمل و نقل^۱

حل مسائل حمل و نقل طی ۲ فاز صورت می گیرد.

لازم به ذکر است اگر مسأله متوازن (بالانس) نباشد در حل دستی ابتدا باید آنرا متوازن نمود (به

ص ۱۳۷ دکتر مهرگان رجوع شود). یعنی یک مقصد مجازی و یا مبدا مجازی با تقاضا یا ظرفیت برابر تفاضل

$\sum d_j, \sum s_i$ به جدول اضافه نمود.

هزینه خانه های مجازی:

$C_{ij} = M$ برای خانه هایی که اختصاص بدانها غیر ممکن است. و هزینه های داده شده در مسئله برای

خانه های مجازی مشخص شده.

The Transportation simplex Method

فاز ۱: تعیین یک جواب شدنی پایه اولیه (bfs) به یکی از روشهای Heuristic از جمله

(۱) روش گوشه چپ بالایی (North- west corner)

(۲) روش حداقل (کمترین) هزینه Minimum cost

(۳) روش فوگل (Vogel approximation Method) یا روش M

(۴) روش حداقل سطر (s Minimum row method)

(۵) روش تخمین راسل (Russel approximation method)

¹ Transportation simplex algorithm

یک نکته قابل توجه: دو نفر در استفاده از یکی از این روشها لزوماً یک *bfs* یکسان به دست نمی آورند.

II فاز

فاز II: بررسی بهینه بودن یا نبودن جواب پایه فاز ۱ و در صورت بهینه نبودن سعی در بهبود دادن آن بایکی از روشهای زیر:

۱- توزیع تعدیل شده یا روش *uv*

۲- روش مستقیم (روش پله سنگ *stepping stone*)

البته خود فاز II در دو مرحله صورت می گیرد: مرحله اول تعیین متغیر ورودی و مرحله ۲ تعیین متغیر خروجی براساس شرط شدنی بودن، محاسبه مقدار جدید تابع هدف و بازگشت به مرحله اول

فاز I: تعیین جواب پایه شدنی یا **bfs** اولیه (Starting basic feasible Solution)

در مدلی را که بررسی می نمائیم متوازن است. بعبارت دیگر در مدل فرض براینست که

$\sum S_i = \sum d_j$. تعداد محدودیت های مستقل $m + n$ نیست بلکه یکی از روی بقیه قابل تعیین

است. مثلاً

	D ₁	D ₂	D ₃	
O ₁				S ₁
O ₂				S ₂
O ₃				S ₃
	d ₁	d ₂	d ₃	$\sum S_i = \sum d_j$

$$\text{Min } Z = C_{11}X_{11} + \dots + C_{33}X_{33}$$

$$m = 3 \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = S_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{33} = S_2 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = S_3 \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = d_1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = d_2 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = d_3 \end{cases}$$

اگر یکی از معادلات را نداشته باشیم با توجه به $\sum S_i = \sum d_j$ بدست می آید.

پس $m + n - 1$ معادله مستقل و بهمین تعداد در جواب شدنی پایه ابتدایی باید متغیر پایه داشته باشیم لذا در این فاز بدنبال یک جواب پایه شدنی دارای $m + n - 1$ متغیر با مقدار مثبت هستیم.

روش گوشه چپ بالایی برای یافتن جواب اولیه پایه (bfs)

گام ۰: ماتریس را در صورت لزوم متوازن نمایید با هزینه C_{ij} صفر برای خانه های مجازی و $C_{ij} = M$

برای خانه هایی که اختصاص بدانها غیر ممکن است. و یا هزینه های داده شده در مسئله برای خانه های مجازی مشخص شده.

گام ۱: در ماتریس حمل و نقل متوازن خانه چپ بالائی را مشخص و آنرا N_{ij} بنامید.

گام ۲: به خانه N_{ij} مقدار $\min\{S_i, d_j\}$ را اختصاص دهید.

گام ۳: از S_i, d_j باندازه میزان اختصاص داده شده به خانه N_{ij} کسر کنید لذا حداقل یکی از {سطر i و ستون j } صفر می گردند. سطر یا ستون صفر شده را از ماتریس حذف و به گام بعد بروید اگر یک سطر و یک ستون همزمان صفر شدند تنها یکی را از ماتریس حذف کنید.

گام ۴: اگر هیچ سطر و ستونی باقی نماند، جواب شدنی پایه اولیه بدست آمده است و گرنه به گام ۱ برگردید و گام ها را تکرار کنید.

مثال ۱: مطلوب است جواب پایه ای اولیه برای جدول حمل و نقل زیر اعداد هر خانه هزینه اختصاص به هر واحد را نشان میدهد:

	D1	D2	D3	D4	S _i
O1	8	6	4	2	۴
O2	10	6	6	2	۳
O3	4	2	3	8	۶
d _j	۳	۳	۳	۴	

تکرار I: تخصیص به خانه O_1D_1 به اندازه $\min\{4, 3\} = ۳$ واحد، کسر از S_1 میزان سه واحد و حذف D_1

تکرار II: تخصیص به خانه O_1D_2 به اندازه $\min\{3, 1\} = ۱$ واحد سپس کسر از S_1 میزان یک واحد و صفر شدن آن و کسر از d_2 به اندازه یک واحد و سرانجام حذف سطر O_1

تکرار III: تخصیص به خانه O_2D_2 به اندازه $\min\{3, 2\} = ۲$ واحد. کسر از S_2 و d_2 میزان دو واحد و حذف ستون D_2

تکرار IV: تخصیص ۱ واحد به خانه O_2D_3 کسر از S_2 و d_3 به اندازه ۱ واحد و حذف سطر O_2 بواسطه صفر شدن S_2

تکرار V: تخصیص ۲ واحد به خانه O_3D_3 و کسر از S_3 و d_3 به میزان دو واحد و حذف ستون D_3

تکرار VI: اختصاص ۴ واحد به O_3D_4

چون پس از تکرار VI هیچ سطر و ستونی باقی نمی ماند متوقف می شویم. هزینه هر خانه در مربع نوشته شده است.

	D1	D2	D3	D4	S _i
O1	8 ③	6 ①	4	2	حذف در II 4 1 0
O2	10	6 ②	6 ①	2	3 1 0
O3	4	2	3 ②	8 ④	6 4
d _j	3 0	3 2 0	3 2 0	4 0	

حذف در I حذف در III حذف در IV

جواب پایه اولیه (bfs) مساله:

متغیرهای X_B	X_{11}	X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
تعداد	۳	۱	۲	۱	۲	۸
C_{ij}	۸	۶	۶	۶	۳	۳

$$Z = C_B X_B = 3 \times 8 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + 1 \times 6 + 2 \times 3 + 4 \times 8 = ۸۶ = \text{هزینه جواب}$$

تعداد مبادی $m = 3$ تعداد مقصدها $n = 4$ تعداد متغیر پایه $m + n - 1 = 6$

مقادیر کلیه متغیرهای دیگر صفر است

اگر چه عملیات روش گوشه چپ بالایی سریعاً انجام می‌گردد. اما C_{ij} ها را در نظر نمی‌گیرد و یک جواب پایه شدنی خوب ارائه نمی‌دهد. روشهای VAM و RAM که بعداً تشریح می‌شود. روشهای نسبتاً کارایی برای تعیین جواب پایه شدنی اولیه اند.

عدم توازن عرضه و تقاضا و متوازن کردن مدل

توضیحی در مورد متوازن کردن مدل بهنگام عدم توازن عرضه و تقاضای مسئله

حالت ۱- عرضه کل نسبت به تقاضای کل بیشتر است (مهرگان ص ۲۵۷)

هنگامی که $\sum S_i > \sum d_j$ باشد باید یک ستون مقصد مجازی در جدول در نظر بگیریم تا مسئله متوازن شود و پس از حل، اضافی‌های عرضه مبداها در آن ستون باقی بماند / اگر هزینه ای در مسئله بر ای خانه های این ستون مقصد مجازی جدید در مسئله داده نشده باشد / هزینه ارسال به این مقصد مجازی را صفر در نظر بگیرید اگر به یک خانه مجازی نباید مقداری تعلق گیرد هزینه آنرا M بگیرید. و الا اگر هزینه ای دارد باید آن را در نظر گرفت.

مثال

دو مبدا با عرضه های ۵۰۰ و ۲۱۰۰ باید تقاضای دو مقصد با درخواست ۱۵۰۰ و ۵۰۰ را تامین کنند. جدول متوازن را تشکیل دهید

چون مجموع عرضه (۲۶۰۰) از مجموع تقاضا (۲۰۰۰) بیشتر است یک مقصد مجازی با تقاضای $2600 - 2000 = 600$ باید در نظر گرفته و جدول مطلق زیر بشود.

			مقصد	S
			مجازی	
				500

				2100
D	1500	500	600	

تعداد متغیرهای اساسی برابر $۲+۳-۱=۴$ و $m+n-۱$ خواهد بود

حالت ۲ - تقاضای کل از عرضه کل بیشتر است (*Winston, 1994* ص ۳۴۳ و مهرگان ص ۲۵۸،

ignizio ص ۲۸۷)

هنگامی که $\sum d_j > \sum S_i$ باشد یعنی کمبود داریم. واقعاً مسئله جواب شدنی ندارد. پس شرط داشتن

جواب شدنی $\sum dj \leq \sum si$ می باشد.

گاه تمایل بر اینست که تا آنجا که ممکن است تقاضاها برآورده شود البته برخی تقاضاها برآورده نشده

باقی می ماند. در این حالت برای متوازن کردن یک سطر مجازی عرضه $\sum dj - \sum si$ اضافه کنید در

چنین وضعیت غالباً جریمه ای (هزینه کمبود) به خانه های مجازی تعلق می گیرد.

اگر جریمه تعیین نشود هزینه خانه های مجازی صفر در نظر بگیرید. اگر در خانه ای نباید کمبود اتفاق بیفتد

هزینه آن خانه را M اختصاص دهید.

تمرین جدول نامتوازن حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید هزینه کمبود هر واحد در مقاصد ۱ و ۲ و ۳

بترتیب ۲۰ و ۲۲ و ۲۳ واحد پول میباشد ، آنرا متوازن کنید..

				S
	$C_{11}=7$	$C_{12}=8$	$C_{13}=10$	50
	$C_{21}=9$	$C_{23}=7$	$C_{23}=8$	50
	40	40	40	

توجه کنید که جواب بهینه این مسئله عبارتیت از

$$x_{31}^* = 20, x_{23}^* = 40, x_{22}^* = 20, x_{12}^* = 30, x_{11}^* = 20$$

یعنی پس از اضافه کردن یک منبع مجازی (کمبود) بصورت یک سطر به جدول و حل آن جدول بهینه زیر حاصل می شود. جوابی که ۲۰ واحد تقاضای برآورد نشده دارد. ($x_{31}^* = 20$)

				S
	۲۰	۳۰		50
		۱۰	۴۰	50
منبع مجازی	$C = 20$ ۲۰	$C = 22$	$C = 23$	20
d	40	40	40	

روش تخمین فوگل (VAM) برای یافتن جواب اولیه پایه (bfs)

روش فوگل توسط D.V.Reifelal, W.R Vogel در ۱۹۵۳ تدوین گردید

مراحل روش برای یافتن bfs بطور خلاصه چنین است:

گام ۰: در صورت لزوم ماتریس را متوازن کنید.

گام ۱: در ماتریس حمل و نقل متوازن، به هر سطر و ستون اعدادی موسوم به اعداد جریمه بر طبق دستورالعمل زیر اختصاص دهید. این اعداد در واقع نمایانگر جریمه احتمالی عدم اختصاص یک تعداد به یک خانه است.

جریمه سطر $P_{N_i} = i$ = قدر مطلق تفاضل کوچکترین دو C_{ij} آن سطر

جریمه ستون $P_{N_j} = j$ = قدر مطلق تفاضل کوچکترین دو C_{ij} آن ستون

کوچکترین دو عدد می تواند مساوی بایکدیگر باشند یعنی جریمه صفر شود.

تذکر: در هر تکرار جدید که به گام ۱ می رسید جریمه را مجدداً محاسبه کنید چون امکان دارد تغییر کرده باشند.

گام ۲: سطر یا ستونی را مشخص کنید که بزرگترین جریمه را داراست. در صورت منحصر بفرد نبودن میتوانید بدلخواه یکی را برگزینید (گرچه یک راه این است که سطر یا ستونی انتخاب شود که کمترین C_{ij} در آن جا می باشد). البته هر انتخاب ممکن است bfs متفاوت به همراه داشته باشد.

گام ۳: در سطر یا ستون مشخص شده طی گام ۲، تعداد ممکن را به خانه ای که حداقل C_{ij} را دارد اختصاص دهید عرصه سطر i و تقاضا ستون j را تعدیل کنید. سطر یا ستون صفر شده را حذف کنید. اگر یک سطر یا یک ستون همزمان صفر شدند. تنها یکی را حذف کنید و دیگری را با مقدار عرضه یا تقاضای صفر نگه دارید.

صفر شدن همزمان یک سطر و یک ستون نمایانگر جواب تباهیده ($degenerate$) است. گام ۴: گامهای ۱ تا ۳ را ادامه دهید تا یک جواب شدنی اولیه بدست آید یعنی تمام واحدهای کالا اختصاص داده شده باشند و حداکثر یک سطر یا ستون حذف نشده باشد (یا هیچ سطر و ستونی باقی نمانده باشد)

یک مثال برای روش فوگل

	D1	D2	D3	D4	S_i	جریمه سطر
O1	8	6	4	2	4	$4-2=2$
O2	10	6	6	3	2	حذف در $7-3=4$
O3	4	2	3	8	7	$7-3=4$ $4-3=1$
dj	3	3	3	1		
جریمه ستون	4	4	1	8		حذف در $8-2=6$

خلاصه نتایج تکرارها در جدول زیر آمده است

جدول زیر نشان می دهد که طی ۵ تکرار جواب اولیه برای مثال فوق با روش فوگل بدست آمده و در هر تکرار چه متغیری مقدار پیدا کرده است.

C_{ij}	تعداد	متغیر پایه $B.V$	خانه $Cell$	سطر یا ستون گزیده شده در	شماره تکرار (Iteration#)
----------	-------	---------------------	----------------	-----------------------------	-----------------------------

	گام ۲					
<i>I</i>	ستون ۲	O_3D_2		X_{32}	۳	۲
<i>II</i>	سطر ۲	O_2D_4		X_{24}	۳	۲
<i>III</i>	ستون ۴	O_1D_4		X_{14}	۱	۲
<i>IV</i>		O_3D_1		X_{31}	۳	۴
<i>V</i>		O_1D_3		X_{13}	۳	۴
<i>VI</i>		O_1D_1		X_{11}	۰	۸

$$Z = C_B X_B = 0 \times 8 + 3 \times 4 + 3 \times 4 + 1 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2 = 38$$

توجه کنید که این جواب نسبت به جواب حاصل از روش قبلی که دارای جوابی با هزینه $Z=86$ بود، بهتر است.

روش تخمین راسل (RAM) برای یافتن 'bfs'

مقدمه.....

در این متد به هر خانه مقدار $\Delta_{ij} = C_{ij} - \bar{U}_i - \bar{V}_j$ اختصاص می یابد که در آن

$\bar{U}_i$ در هر تکرار برای هر سطر باقیمانده تحت بررسی i ام، برابر بزرگترین C_{ij} باقیمانده در آن سطر می باشد

$\bar{V}_j$ در هر تکرار برای هر ستون باقیمانده تحت بررسی j ام، برابر بزرگترین C_{ij} باقیمانده در آن ستون می باشد.

در هر تکرار مراحل به شرح زیر است.

- به هر خانه ij که قبلاً انتخاب نشده یک مقدار Δ_{ij} مطابق فرمول $\Delta_{ij} = C_{ij} - \bar{U}_i - \bar{V}_j$ اختصاص دهید.

- به X_{ij} با منفی ترین Δ_{ij} ، مقدار ممکن $X_{ij} = \min\{S_i, d_j\}$ را اختصاص دهید.

- عرضه و تقاضای سطر و ستون مربوطه را تعدیل کنید.. سطر یا ستونی را که مقدارش صفر شده حذف کنید. اگر همزمان صفر شدند یکی را حذف و به تکرار بعد بروید.

مثال ۱ مطلوبست یک جواب اولیه برای مسأله زیر باروش راسل (RAM)

	D_1	D_2	S_i	$\bar{U}_i$ تکرار اول	$\bar{U}_i$ تکرار دوم
--	-------	-------	-------	-----------------------	-----------------------

^۱ از: هلیه و لیبرمن ترجمه مدرس و آصف وزیری (۱۳۷۹)

O_1	۲	10 -1-M	۳ 5 -4	۱۵	۳	۳
O_2	M	-M	۴ 35 M-4	۳۵	M	۴
d_j		۱۰	۴۰			
$\tilde{v}_j$ تکرار اول		M	۴			
$\tilde{v}_j$ تکرار دوم			۴			

در تکرار اول منفی ترین $\Delta_{ij} = \Delta_{11}$ پس $X_{11} = \min\{15, 10\} = 10$

در تکرار دوم منفی ترین $\Delta_{22} = \Delta_{ij}$ $X_{22} = ۳۵$

در تکرار سوم تنها خانه باقیمانده $O_1 D_2$ است $X_{12} = ۵$

$$Z = ۲ \times ۱۰ + ۳(۵) + ۴(۳۵) = ۲۰ + ۱۵ + ۱۴۰ = ۱۷۵$$

مثال ۲ مطلوبست یک جواب اولیه پایه با متد راسل برای جدول زیر

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	S_i
O_1	۱۶	16	۱۳	۲۲	۱۷	۵۰
O_2	۱۶	۱۴	۱۳	۱۹	۱۵	۶۰
O_3	۱۶	۱۹	۲۰	۲۳	M	۵۰
O_4 مجازی	M	.	M	.	.	۵۰
d_j	۳۰	۲۰	۷۰	۳۰	۶۰	

حل

تکرار اول در اولین تکرار در سطر اول

$\tilde{U}_1 = ۲۲$ بزرگترین C_{ij} سطر اول و M بزرگترین C_{ij} ستون اول $\tilde{V}_1 = ۱۶$

$$\Delta_{11} = C_{11} - \tilde{U}_1 - \tilde{V}_1 = 16 - 22 - M = -6 - M$$

مقادیر Δ_{ij} در جدول زیر نشان داده شده است منفی ترین Δ_{ij} برابر $\Delta_{45} = -2M$ است.

به آن خانه $\min\{۵۰, ۶۰\} = ۵۰$ را اختصاص می دهیم. اولین متغیر پایه $X_{45} = 50$

تکرار اول

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	S_i	$\tilde{u}_i$
O_1	۱۶	16 -25	۱۳	۲۲	۱۷	۵۰	۲۲
	$\Delta_{ij} = -6-M$		$-9-M$	-23	$-5-M$		
O_2	۱۶	۱۴	۱۳	۱۹	۱۵	۶۰	۱۹

	$-۳-M$	-۲۵	$-۶-M$	-۲۳	$-۴-M$		
O_3	۱۹ $۱۹-۲M$	۱۹ $-۱-M$	۲۰ $۲۰-2M$	۲۳ $-M$	M $-M$	۵۰	M
O_4 مجازی	M $-M$	۰ $-۱۹-M$	M $-M$	۰ $-M-۲۳$	۰ (۵۰) $-۲M$	$\frac{۵۰}{۰}$	M
d_j	۳۰	۲۰	۷۰	۳۰	۱۰ ۱۰		
$\tilde{V}_j$ تکرار اول	M	۱۹	M	۲۳	M	$\rightarrow$	مقدار اختصاص یافته در اولین تکرار $x_{45}=50$

تکرار ۲

در تکرار ۲ پس از حذف سطر ۴ $\tilde{U}_i, \tilde{V}_j$ ها و Δ_{ij} های جدید محاسبه می شود x_{15} دارای منفی ترین Δ_{ij} است. ($\Delta_{15} = 5 - 2M$) پس در تکرار دوم $x_{15} = 10$ و همینطور تا آخر.

$\Delta_{ij} = C_{ij} - \tilde{U}_i - \tilde{V}_j$ تکرار دوم							
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	S_i	$\tilde{U}_i$
O_1	۱۶ -۲۵	16 -۲۵	۱۳ -۲۹	۲۲ -۲۳	۱۷ (۱۰) $-۵-M$	۵۰	۲۲
O_2	۱۶ -۲۲	۱۴ -۲۴	۱۳ -۲۶	۱۹ -۲۳	۱۵ $-۴-M$	۶۰	۱۹
O_3	۱۹ $-M$	۱۹ $-M$	۲۰ $-M$	۲۳ $-M$	+M $-M$	۵۰	M
O_4	۵۰ در تکرار اول حذف شد						
d_j	۳۰	۲۰	۷۰	۳۰	۱۰ ۱۰		

$\tilde{V}_j$	19	19	20	23	M		
---------------	----	----	----	----	-----	--	--

در تکرار دوم دومین متغیر پایه: $X_{15}=10$ بدست می آید و ستون پنجم حذف می شود.

نتیجه تکرارها در جدول زیر دیده می‌شود.

$\tilde{U}_i$ و $\tilde{V}_j$ های تکرارها منفی ترین Δ_{ij} هر تکرار با مقدار اختصاص داده شده به X_{ij} متناظر در جدول زیر دیده می شود

در هنگام متوازن کردن $\sum S_i < \sum d_j$ با فرض کمبود مجاز در مقاصد یک سطر (منبع مجازی $m+1$) اضافه می‌شود. توجه اگر در مقصدی مثل j کمبود مجاز باشد هزینه خانه را $(C_{m+1,j})$ صفر (یا برابر هزینه کمبود برای هر واحد داده شده) در نظر می‌گیریم. اما اگر در این مقصد a واحد کمبود مجاز و b واحد کمبود غیرمجاز باشد ($a+b=d_j$) در اینصورت ستون d_j را به ستون j' ، j'' تقسیم کنید با اختصاص تقاضای a برای ستون j' و $C_{m+1,j'}=0$ و اختصاص تقاضای b برای ستون j'' و $C_{m+1,j''}=M$. زیرا به خانه $m+1, j$ نمی‌خواهیم مقداری تعلق گیرد چون هر مقدار که تعلق گیرد دال بر کمبود است.

جواب پایه اولیہ:

تکرار	$\tilde{u}_1$	$\tilde{u}_2$	$\tilde{u}_3$	$\tilde{u}_4$	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	$\tilde{v}_3$	$\tilde{v}_4$	$\tilde{v}_5$	منفی ترین Δ_{ij}	مقدار متغیر پایه (عناصر X_B)
۱	۲۲	۱۹	M	M	M	۱۹	M	۲۳	M	$\Delta_{45} = -۲M$	$X_{45} = ۵۰$
۲	۲۲	۱۹	M		۱۹	۱۹	۲۰	۲۳	M	$\Delta_{۱5} = -۵ - M$	$X_{۱5} = ۱۰$
۳	۲۲	۱۹	۲۳		۱۹	۱۹	۲۰	۲۳		$?\Delta_{۱۳} = -۲$	$X_{۱۳} = ۴۰$
۴		۱۹	۲۳		۱۹	۱۹	۲۰	۲۳		$\Delta_{۳۳} = -۲۶$	$X_{۳۳} = ۳۰$
۵		۱۹	۲۳		۱۹	۱۹				$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{۲۱} = -۲۴ \\ \Delta_{۲۲} = -۲۴ \end{array} \right\}$	$X_{۲۱} = ۳۰$ or $X_{۲۲} = ۳۰$
۶										لازم نیست	$X_{۳۱} = ۰$
											$X_{۳۲} = ۲۰$
											$X_{۳4} = ۳۰$

											$Z = C_B X_B$ $= 2570$
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---------------------------

مثال ۳: مطلوبست یافتن جواب اولیه مسأله زیر با روش راسل:

تنها ۲۰ واحد کمبود در مقصد اول مجاز است و امکان ارسال از منبع ۳ به مقصد ۴ وجود ندارد. کمبود در مقصد دوم مجاز نیست. هزینه ها و مقادیر عرضه و تقاضا داده شده است.

	I	II	III	IV	S_i
O_1	۱۶	۱۳	۲۲	۱۷	۵۰
O_2	۱۴	۱۳	۱۹	۱۵	۶۰
O_3	۱۹	۲۰	۲۳		۵۰
d_j	۵۰	۷۰	۳۰	۶۰	

جدول مسأله متوازن نیست. منبع مجازی O_4 را اضافه می‌کنیم و ستون اول را به ۲ ستون با تقاضاهای ۲۰ و ۳۰ تبدیل می‌کنیم و به خانه‌های ممکن و غیر ممکن صفر و M می‌دهیم. مقادیر داخل دوایر، جواب پایه اولیه حاصل از روش RAM است

که جزئیات آن و محاسبات کامل در جزوه دستی. تشریح شده (تکثیر شود)

	$D' 1$	$D'' 1$	$D2$	$D3$	$D4$	S_i
$O1$	16	16	13	22	17	50
$O2$	14	14	13	19	15	60
$O3$	19	19	20	23	M	50
$O4$	M	0	M	0	0	50
مجازی					50	
d_j	30	20	70	30	60	210

با این جواب $Z = 2570$ بدست آید.

مقابله با تباهیدگی در جواب اولین پایه یک مسأله حمل و نقل:

از جمله راههای مرسوم برای مقابله با تباهیدگی (*Degeneracy*) در جواب پایه شدنی اولیه اختصاص یک مقدار خیلی کم (مثلاً ϵ اسیلن) به آن متغیر پایه جواب است که مقدارش صفر است و سپس حل مسأله را ادامه می دهیم تا جواب بهینه بدست آید.

فاز II : بهینگی جواب The Transportation simplex Method- phase II

هیچ جواب پایه‌ای هر چند بهینه هم باشد تا فاز II بر روی آن عمل نکند مشخص نمی‌شود که بهینه (*optimal*) است در این فاز اگر پس از بررسی بهینگی، جواب فاز I بهینه تشخیص داده نشود بدنبال بهینه نمودن جواب می‌رویم. فاز II وقتی پایان می‌پذیرد که مطمئن شویم که بهبود بیشتر جواب امکان پذیر نیست. روش‌های متنوعی برای انجام فاز II وجود دارد. که از آنجمله است الف) روش UV ب) روش پله سنگ

ذیلاً روش UV تشریح می‌شود. روش پله سنگ را در مراجعی همچون حمیدی طه ، صفحه... می‌توانید

مطالعه کنید

روش UV

روش UV یا روش MODI (Modified Distribution) یا روش مضربها

برای بهینه نمودن جواب شدنی پایه اولیه

مقدمه:

برای استفاده از روش MODI فاز I باید تکمیل شده باشد یعنی یک جواب پایه شدنی اولیه (غیر تباهیده) در اختیار داشته باشیم. در این روش بهینه بودن جواب پایه فعلی را ابتدا مطابق روشی که گفته خواهد شد. بررسی می‌کنیم. اگر بهینه بود متوقف می‌شویم و گرنه خانه‌های دیگر مد نظر قرار گرفته و عرضه و تقاضا بین آنها بطور تعدیل شده‌ای توزیع می‌گردد.

چون روش UV مبتنی بر تئوری Duality است ابتدا Primal و Dual مساله حمل و نقل خود را می‌نویسیم.

۲۰۱

Primal: $m+n$ constraints $m \times n$ Variable

$$\text{Min } Z_x = \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$$

$$\text{s.t } \sum_j x_{ij} = S_i \quad i=1, \dots, m \quad \text{Dual Variable } u_i$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad j=1, \dots, n \quad v_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

جهت نوشتن *Dual* توجه کنید که هر $Primal$ X_{ij} متعلق به یک خانه است و X_{ij} هر خانه در تنهادر ۲ محدودیت *Primal* دخالت و شرکت دارد یکی محدودیت مربوطه به ستون j و دیگری محدودیت سطر i . ضریب X_{ij} در این ۲ محدودیت ۱ می باشد.

$$\text{Dual: } \text{Max } \sum_i S_i u_i + \sum_j d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij} \quad i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$$

$$u_i, v_j \text{ آزاد}$$

مدل *Dual* فوق $m \times n$ محدودیت دارد و $m+n$ متغیر.

بیاد بیاورید که تفاضل سمت چپ و راست هر محدودیت dual مقدار ضریب هر متغیر متناظر در مسئله اولیه را

در سطر تابع هدف در جدول سمپلکس به مامی داد. (در این جا $z_{ij} - c_{ij} = 0$ برای x_{ij}).

در ضمن اگر یک جواب پایه ای برای *Primal* در اختیار داشته باشیم، برای هر متغیر پایه ای $z_{ij} - c_{ij} = 0$ و لذا محدودیت *Dual* متناظر با آن بصورت تساوی برآورد می شود:

$$z_{ij} - c_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j = C_{ij} = 0 \quad (\text{نوع } A)$$

چون $m+n-1$ متغیر پایه ای داریم پس یک دستگاه شامل $m+n-1$ معادله از نوع A با $m+n$ مجهول داریم.

معمولاً یک مقدار دلخواه برای یکی از متغیرها فرض می کنند (غالباً صفر و برای U_1) و بقیه مضربها (V_j, U_i) را معین می نمایند. پس از تعیین کلیه V_j, U_i ها بدنبال بهبود جواب پایه فعلی بوده و لذا متغیر ورودی و خروجی تعیین می گردد.

بیاد بیاورید که مسأله کمینه سازی است پس متغیر ورودی از بین متغیرهای غیر موجود در پایه با

مثبت ترین مقدار $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ یا کوچکترین مقدار منفی $z_{ij} - c_{ij} = -(u_i + v_j - c_{ij})$ انتخاب می گردد

شرح روش UV یا MODI برای بهینه نمودن جواب اولیه

گام ۱:

به سطر i از ماتریس حمل و نقل مضرب u_i را نسبت دهید $i=1, \dots, m$

به ستون j از ماتریس حمل و نقل مضرب v_j را نسبت دهید $j=1, \dots, n$

(- آنها را با ضرایب روش راسل در تعیین جواب شدنی پایه‌ای اشتباه نکنید).

برای هر متغیر پایه‌ای در جواب فعلی معادله $u_i + v_j = c_{ij}$ را بنویسید c_{ij} ها معلومند. یک دستگاه

$m+n-1$ معادله شامل $m+n$ مجهول بدست می‌آید برای U_I صفر را اختصاص دهید و بقیه مضربها را بدست آورید.

تذکر در هر تکرار V_j, U_i ها را مجدداً حساب کنید.

گام 2

: با توجه به V_j, U_i های محاسبه شده $c_{ij} - u_i - v_j$ خانه‌های خالی را محاسبه کنید اگر تمام این ها

غیر منفی بودند جواب فعلی بهینه است. به مثال صفحه بعد مراجعه شود

تعیین متغیر ورودی

گام ۳:

آن خانه خالی با منفی‌ترین $c_{ij} - u_i - v_j$ جایگاه متغیر ورودی است.

تعیین متغیر خروجی: تعیین متغیر خروجی به کمک رسم یک حلقه ($loop$) مشخص می‌شود.

گام ۴:

برای خانه شامل متغیر ورودی یک $Loop$ رسم کنید (نحوه ترسیم $Loop$ توضیح داده خواهد شد). مقدار متغیر ورودی را از صفر به مقدار θ تغییر دهید و برای حفظ تساوی محدودیت ها از بقیه متغیر های $loop$ آنطور که اقتضا می‌کند مقدار θ - یا θ + کم یا اضافه کنید از میان خانه‌های با θ - در $loop$ ، خانه با کمترین مقدار را بعنوان متغیر خروجی انتخاب کنید.

گام ۵ - جهت تشکیل جدول جدید باندازه مقدار خانه متغیر خروجی را به مقدار خانه‌هایی که در

مسیر دارای θ + اند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای θ - اند کم کنید. جدول جدیدی تشکیل

می‌شود که شامل جواب پایه جدید است. به گام ۱ برگردید.

$$\Delta Z = -\theta(z_{ij} - c_{ij}) = \theta(c_{ij} - u_i - v_j)$$

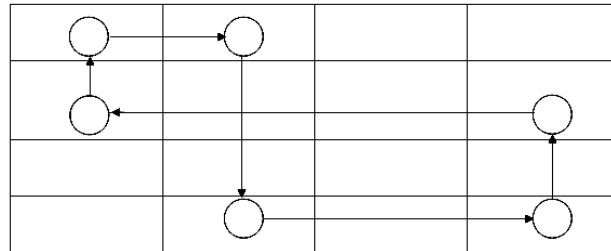
توضیح در مورد تعیین نحوه حلقه ($Loop$) گام ۴ برای تعیین متغیر خروجی در روش UV

حلقه از متغیر ورودی (غیر پایه) و چندین متغیر پایه تشکیل شده و در تعیین متغیر خروجی بکار می‌رود.

شروع و ختم حلقه متغیر ورودی است و شامل قطعات بهم متصل متوالی افقی و عمودی است که در دو سر هر قطعه

یک متغیر پایه‌ای قرار گرفته است با استثنای ۲ قطعه اول و آخر که به متغیر غیر پایه (ورودی) متصل‌اند. حرکت در جهت

عقربه‌های ساعت^۱ (CW) میتواند باشد یا خلاف عقربه‌های ساعت^۲ (CCW) در هر جواب پایه‌ای مفروض، حلقه مربوط به یک متغیر غیرپایه منحصر بفرد است. متغیر خروجی از بین متغیرهای پایه‌ای حلقه مربوط به متغیر ورودی انتخاب می‌شود. قطعات حلقه می‌تواند متقاطع بطور عمودی باشند و یا از روی یک متغیر پایه پرش نمایند. در هر جدول شامل یک جواب پایه ای داده شده برای هر متغیر غیر پایه تنها یک $loop$ به شرح بالا می‌توان تهیه کرد) ترجمه حمدی طه ص ۱۵۰). قطعات حلقه می‌توانند از روی یکدیگر عبور کنند:



مثال ۱ برای یافتن مقدار U_i, V_j و بررسی بهینگی جواب

در جواب پایه‌ای مشخص شده در جدول زیر مطلوبست تعیین U_i, V_j سطر یا ستون مربوطه. آیا این جواب بهینه است؟ (مسئله کمینه سازی است).

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	Si	Ui
O1	2 (20)	1 (30)	3 +2	3 +2	2 0	5 +5	50	$U_1=0$
O2	3	2 (20)	2 (20)	4 +2	3 0	4 +3	40	$U_2=1$
O3	3 (10)	5 +3	4 +2	2 (39)	۲ +1	1 (11)	60	$U_3=1$
O4	4 +2	2 +1	2 +1	1 (1)	2 (30)	2 +2	31	$U_4=0$
dj	30	50	20	40	30	11	181	
Vj	$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=1$	$V_4=1$	$V_5=2$	$V_6=0$	$Z=319$	

U_1 را (برای متغیرهای $X_{11}, X_{12}, \dots$) صفر می‌گیریم. X_{11} در پایه است چون $U_1 + V_1 = C_{11} = 2$

پس $V_1 = 2$

¹ clockwise

² Counter-clockwise

بدنبال معادله‌ای می‌گردیم که V_I در آن باشد:

$$\begin{aligned} 2V_1 + U_3 &= 3 \Rightarrow U_3 = 1 & U_3 + V_1 &= 1 \Rightarrow V_1 = 0 \\ 1V_3 + V_4 &= 2 \Rightarrow V_4 = 1 & V_4 + U_4 &= 1 \Rightarrow U_4 = 0 \\ U_4 + V_5 &= 2 \Rightarrow V_5 = 2 \\ U_1 + V_2 &= 1 \Rightarrow V_2 = 1 \\ V_2 + U_3 &= 2 \Rightarrow U_3 = 1 \\ U_3 + V_3 &= 2 \Rightarrow V_3 = 1 \end{aligned}$$

پس از محاسبه U_i, V_j باید $Z_{ij}-C_{ij}$ که اینها در واقع مقادیر متغیرهای $Dual$ اند، باید $Z_{ij}-C_{ij}$ متغیرهای غیر پایه (خانه‌های خالی) را محاسبه کنیم تا متغیر ورودی از بین آنها مشخص شود متغیر ورودی براساس بیشترین $Z_{ij}-C_{ij}$ تعیین می‌شود یا براساس منفی‌ترین $C_{ij}-Z_{ij}$ و یا براساس منفی‌ترین مقدار $C_{ij}-U_i-V_j$

پاسخ به خواسته دوم مسأله:

برای خانه‌های خالی (متغیرهای غیرپایه) $C_{ij}-U_i-V_j$ را محاسبه می‌کنیم (در جدول اعداد با علامت + یا - داخل خانه نمایش داده شده)

اگر تمام آنها غیر منفی باشند جواب بهینه است. توجه کنید که مسأله، کمینه سازی است و بهینگی در صورتی حاصل می‌شود که $Z_{ij}-C_{ij} \leq 0$ تمام یا $C_{ij}-Z_{ij} \geq 0$ تمام. چون در جدول فوق تمام $C_{ij}-Z_{ij}$ مثبت یا صفرند. جواب مندرج در جدول بهینه است.

$$\begin{aligned} X_{11}^* &= 20, X_{36}^* = 11, X_{44}^* = 1, X_{45}^* = 30 \\ X_{12}^* &= 30, X_{22}^* = 20, X_{23}^* = 20, X_{31}^* = 10, X_{34}^* = 39, Z^* = C_B X_B^* = 330 \end{aligned}$$

مثال

برای یافتن جواب شدنی پایه‌ای (bfs) جدید بکمک روش UV و بررسی بهینگی جواب :
مطلوب است تعیین جواب پایه‌ای جدید برای مسأله زیر با تابع هدف کمینه سازی هزینه در این جدول $C_{ij}-U_i-V_j$ محاسبه شده و داده شده است.

	D1	D2	D3	D4	Si	Ui
O1	8	6	4	2	4	$U_1 = 0$
	3	1	-2	-9		
		$-\theta$		$+\theta$		

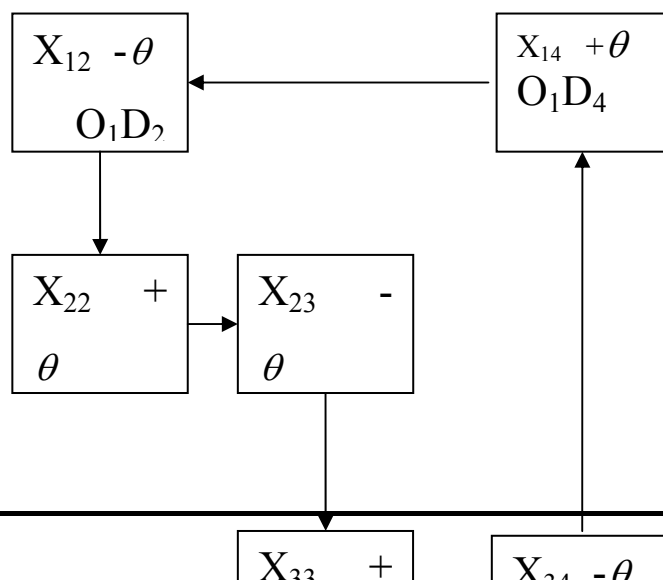
O2	10	+2	6	+θ	6	-θ	2	-9	3	$U_2 = 0$
			2		1					
O3	4	-1	2	-1	3	+θ	8	-θ	6	$U_3 = -\frac{6}{3}$
					2					
dj	3		3		3		4			
Vj	V1=8		V2=6		V3=6		V4=11			

$$Z = 3 \times 8 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + 1 \times 6 + 2 \times 3 + 4 \times 8 = 86$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	S_i	U_i
O1	8	6	4	2	4	$U_1 = 0$
O2	10	6	6	2	3	$U_2 = 0$
O3	4	2	3	8	6	$U_3 = -3$
di	3	3	3	4		
Vj	V1=8	V2=6	V3=6	V4=11		

حل: گام ۱ و ۲ $c_{ij} - u_i - v_j$ هر خانه خالی را باید بیاییم برای اینکار U_i و V_j ها را ابتدا تعیین می کنیم.

گام ۳ خانه های O_1D_4 یا O_2D_4 دارای منفی ترین $c_{ij} - u_i - v_j$ اند یکی را بدلولخواه مثلا O_1D_4 انتخاب می کنیم.



شکل حلقه مربوطه (جهت حرکت CCW)

توضیح θ و $-\theta$ ها

متغیر غیر پایه‌ای X_{14} که بعنوان ورودی انتخاب شده به بالای مقدار فعلیش یعنی صفر افزایش داده می‌شود تا امکان بهتر نمودن مقدار تابع هدف بررسی گردد. اگر X_{14} با اندازه $+1$ واحد (θ یا $+\theta$ واحد) افزایش یابد X_{12} به همین اندازه باید کاهش یابد ($-\theta$ واحد) تا درستی محدودیت سطر اول حفظ شود. به X_{22} باید با اندازه $+1$ واحد (θ یا $+\theta$) باید اضافه شود تا محدودیت ستون ۲ حفظ شود از X_3 به اندازه مقدار $-\theta$ کم بر X_{33} به اندازه مقدار θ + اضافه از X_{34} یکی ($\theta = -1$ واحد) کم شود. حداکثر مقداری که می‌توان برای θ تعیین نمود چه مقدار است؟ مقداری است که خانه‌های با $-\theta$ منفی نشوند. پس θ حداقل X_{ij} خانه‌هایی است با علامت $-\theta$

= مقدار متغیر ورودی در تکرار بعد

$$\theta = \min \{ x_{ij} - \theta \text{ نخبه‌های نخبه یافته به } \theta \}$$

$$= \min \{ x_{12} = 1, x_{23} = 1, x_{34} = 1 \} = 1$$

سپس X_{ij} ای که در حلقه صفر گردد خارج می‌شود^۱

لذا هر کدام از متغیرهای X_{12} و یا X_{23} می‌تواند متغیر خروجی باشد. به دلخواه X_{12} انتخاب می‌شود.

یک مطلب قابل توجه:

^۱ این در واقع براساس تامین شرط شدنی بودن جواب بعدی است هر افزایش بیشتر در مقدار متغیر ورودی (θ) باعث منفی شدن این متغیر در $Loop$ می‌گردد و شرط شدنی بودن جواب بهم می‌خورد.

همانند مسائل قبلی برنامه ریزی خطی میزان تغییر در هزینه حمل و نقل بازاری یک واحد اضافه نمودن به X_{14} برابر است با $\bar{C}_{14} = -(z_{14} - c_{14}) = c_{14} - z_{14}$ می توان ثابت کرد که با توجه به مساله دوال این مقدار برابر است با:

$$\bar{C}_{14} = -(z_{14} - c_{14}) = c_{14} - u_1 - v_4 = +2 - 0 - 11 = -9$$

و با توجه به حلقه

$$\bar{C}_{14} = +\overset{2}{\cancel{X}_{14}} - \overset{6}{\cancel{X}_{12}} + \overset{6}{\cancel{X}_{22}} - \overset{6}{\cancel{X}_{23}} + \overset{3}{\cancel{X}_{33}} - \overset{8}{\cancel{X}_{34}} = -9 = C_{14} - Z_{14} = -(Z_{14} - C_{14})$$

پس بطور کلی همانند *simplex* معمولی حاصل $-(z_{ij} - c_{ij}) = c_{ij} - z_{ij}$ برابر میزان تغییر در تابع هدف است بازاری یک واحد تغییر در متغیر ورودی X_{ij} ، و بازاری θ واحد تغییر در مقدار متغیر ورودی داریم:

$$\Delta Z = -\theta(z_{ij} - c_{ij}) = \theta(c_{ij} - z_{ij})$$

گام ۵: X_{12} را بعنوان متغیر خروجی انتخاب و جدول جدید را تشکیل می دهیم: C_{ij} ها جدول جدید همان مقادیر جدول قبلی است به X_{ij} های واقع در *loop* جدول قبلی بر حسب مورد $\theta = +1$ یا $\theta = -1$ اضافه یا کم کنید تا X_{ij} های جدید بدست آید.

باتوجه به اینکه X_{14} ورودی است، جدول جدید چنین می شود(حلقه برای جواب پایه بعدی نیز داده شده است).

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	S _i	U _i
O ₁	8 ③ -θ	6 -9	4 7	2 1 +θ	4	U ₁ = 0
O ₂	10 -7	6 ③	6 0	2 -9	3	U ₂ = 9
O ₃	4 +θ -10	2 -1	3 ③	8 -θ ③	6	U ₃ = 6
d _j	3	3	3	4		
V _j	V ₁ = 8	V ₂ = -3	V ₃ = -3	V ₄ = 2		

$$Z = 3 * 8 + 1 * 2 + 3 * 6 + 0 * 6 + 3 * 8 + 3 * 3 = 77$$

در هنگام تعدیل متغیرهای loop توجه کنید تنها یک متغیر خروجی است که از پایه باید خارج شود اگر متغیرهای دیگری هم صفر شدند در پایه باقی می ماند توجه: اگر جواب تباهیده باشد برای ادامه صفر را ε در نظر بگیرید.

در جواب جدید مقدار متغیر پایه ای X_{23} صفر شده است یعنی جواب پایه ای جدید تباهیده است حال یک مقدار ناچیز مثل ε به X_{23} اختصاص داده و مسأله را ادامه می دهیم یعنی برای جدول جدید U_i, V_j های جدید محاسبه و $C_{ij} - U_i - V_j$ متغیرهای غیر پایه (خانه های خالی) تعیین و منفی ترین آنها را انتخاب کنید تا متغیر ورودی تعیین شود. اگر تمام $C_{ij} - U_i - V_j$ مثبت یا صفر بود جواب بهینه است. والا **loop** شامل متغیر ورودی را تشکیل دهید و متغیر خروجی را تعیین نمایید

در مساله حمل و نقل هم ممکن است جواب چندگانه با مقدار تابع هدف یکسان داشته باشیم.

یک مطلب دیگر:

ثابت می شود که اگر در فرمول زیر به تمام C_{ij} ها مقداری برابر K اضافه کنیم X_{ij} ها تغییر نمی کند فقط به اندازه $K \sum S_i$ به Z اضافه می شود

$$\text{Min } Z = \sum \sum c_{ij} X_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$C_{ij} \rightarrow C_{ij} + K \quad \sum \sum (C_{ij} + K) X_{ij} = \sum \sum C_{ij} X_{ij} + K \sum \sum X_{ij} =$$

$$Z + K \sum \sum X_{ij} = Z + K \sum S_i \quad \text{مثبت } K \text{ یا منفی}$$

تحلیل حساسیت برای مسائل حمل و نقل^۱

در این بخش ۳ مورد تحلیل حساسیت مدل های حمل و نقل ذکر می شود:

۱- تغییر ضریب یک متغیر غیر پایه در تابع هدف

۲- تغییر ضریب یک متغیر پایه در تابع هدف

^۱ ص ۳۶۹ Winston, 1994 به دکتر مهرگان، ص ۲۸۵ نیز می توانید رجوع کنید

۳- افزایش مقدار یک منبع (مبداء) به اندازه Δ و یک مقصد به اندازه Δ برای روشن کردن این ۳ مورد، جدول زیر را که جواب بهینه یک مسئله است با $Z^*=1020$ در نظر بگیرید.

	D_1		D_2		D_3		D_4		S_i	u_i
O_1		8		6		10		9	35	0
			10		25					
O_2		9		12		13		7	50	3
	45				5					
O_3		14		9		16		5	40	3
			10				30			
d_j	45		20		30		30			
V_j	6		6		10		2			

۱- تغییر ضریب یک متغیر غیر پایه در تابع هدف

تغییر ضریب یک متغیر غیر پایه مثل X_{ij} در تابع هدف بر مقادیر متغیرهای پایه تاثیر نمی گذارد (همانند سیمپلکس معمولی که بر RHS اثر نمی گذارد) پس پایه فعلی هنوز شدنی باقی بماند. چون $C_B B^{-1}$ تغییر نمی کند u_i و v_j ها بدون تغییر باقی میمانند. در سطر صفر تنها ضریب X_{ij} تغییر خواهد کرد. لذا مادام که ضریب X_{ij} در سطر بهینه غیر مثبت باشد پایه فعلی بهینه باقی می ماند.

سوال

برای چه دامنه ای از مقادیر هزینه ارسال یک واحد از مبدا اول به شهر ۱ جواب فعلی بهینه می ماند؟

جواب فرض کنید C_{11} از ۸ به $8+\Delta$ تغییر کند دامنه Δ را برای اینکه جواب فعلی بهینه باقی بماند چقدر است؟

$$\bar{C}_{11} = C_{11} - u_1 - v_1 = (8 + \Delta) - 0 - 6 = 2 + \Delta$$

جواب مادام که $\bar{C}_{11} = +2 + \Delta$ منفی نشود.

پس برای $\Delta \geq -2$ $\Delta + 2 \geq 0$ $\bar{C}_{11} \geq 0$ جواب فعلی بهینه می ماند.

۲- تغییر ضریب یک متغیر پایه در تابع هدف

چون $C_B B^{-1}$ تغییر می کند ضرایب هر متغیر غیر پایه در سطر صفر ممکن است تغییر

کند برای اینکه ببینیم که آیا پایه فعلی بهینه می ماند یا خیر باید v_j های جدید و u_i ها

جدید محاسبه گردد و با آنها $\bar{C}_{11}$ مربوط به متغیرهای غیر پایه محاسبه شود.

مثال

در جدول بهینه داده شده فوق C_{13} از ۱۰ به $10 + \Delta$ تغییر می دهیم. لذا باید دستگاه زیر حل

شود

$$u_1 = 0 \quad u_3 + v_2 = 9$$

$$u_2 + v_1 = 9 \quad u_2 + v_3 = 10 + \Delta$$

$$u_1 = v_2 = 6 \quad u_3 + v_4 = 5$$

$$u_2 + v_3 = 13$$

$$\Rightarrow u_1 = 0 \quad u_2 = 3 - \Delta \quad u_3 = 3 \quad v_1 = 6 + \Delta \quad v_2 = 6 \quad u_3 = 10 + \Delta \quad v_4 = 2$$

حال $\bar{C}_{ij}$ متغیرهای غیر پایه را محاسبه می کنیم و مشخص می کنیم به ازای چه مقدار Δ

غیر منفی باقی می ماند.

$$\begin{cases} \bar{C}_{11} = 8 - u_1 - v_1 = -\Delta + 2 \geq 0 \\ \bar{C}_{14} = 9 - u_1 - v_4 = 7 \\ \bar{C}_{22} = 12 - u_2 - v_2 = 3 + \Delta \geq 0 \\ \bar{C}_{24} = 7 - u_2 - v_4 - 7 = 2 + \Delta \geq 0 \\ \bar{C}_{31} = 14 - u_3 - v_1 = -5 - \Delta \geq 0 \\ \bar{C}_{33} = 16 - u_3 - v_3 = -\Delta + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 2 \\ \Delta \geq -3 \\ \Delta \geq -2 \\ \Delta \leq -5 \\ \Delta \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq \Delta \leq 2 \end{cases}$$

$$10 - 2 \leq C_{13} \leq 10 + 2$$

$$8 \leq C_{13} \leq 12$$

۳- افزایش S_i به اندازه Δ و d_j به اندازه Δ

توجه کنید با این تغییر جدول متوازن باقی می ماند. چون v_j ها و u_i ها را می توان منفی قیمتهای

سایه هر محدودیت به حساب آورد اگر جواب پایه فعلی بهینه باقی بماند بر طبق ص ۲۸۹ و ص

۳۷۱ وینستون (۱۹۹۴) و یا آنچه قبلا در مورد تعبیر قیمت سایه گفته شد :

$$Z_{\text{جدید}} - Z_{\text{قدیم}} = \Delta \times u_i + \Delta \times v_j$$

به عنوان مثال

اگر عرضه منبع یک رابه اندازه $\Delta = 1$ و تقاضای مقصد ۲ را نیز به اندازه $\Delta = 1$ افزایش دهیم

$$۱۰۲۶ = ۱(۶) + ۱(۰) + ۱۰۲۰ = \text{هزینه جدید}$$

مقادیر جدید متغیرهای تصمیم را مطابق زیر نیز می توان بدست آورد.

- ۱- اگر X_{ij} یک متغیر پایه در جواب بهینه است به X_{ij} به اندازه Δ بیافزاید .
- ۲- اگر X_{ij} یک متغیر غیر پایه در جواب بهینه است حلقه شامل X_{ij} و برخی متغیرهای پایه را تشکیل دهید . یک خانه *odd* در حلقه بیابید که در سطر i است مقدار این خانه *odd* را به اندازه Δ افزایش دهید و با حرکت در حلقه متغیرهای پایه فعلی به اندازه Δ کاهش یا افزایش دهید.

برای نمایش حالت اول فرض کنید S_1, d_2 را هریک ۲ واحد افزایش می دهیم از آنجا که X_{12} متغیری پایه است جواب پایه ای جدید در جدول زیر نشان داده شده است

$$Z=1020+2u_1+2v_2=1032 \text{ جدید}$$

جدول بهینه اگر $s_1 = 35 + 2 = 37, d_2 = 20 + 2 = 22$										
	D_1		D_2		D_3		D_4			u_i
O_1		8		6		10		9	37	0
			12		25					
O_2		9		12		13		7	50	3
	45				5					
O_3		14		9		16		5	40	3
			10				30			
	45		22		30		30			
v_j	6		6		10		2			

نمایش
دوم فرض

برای
حالت

کنید به S_1, d_1 یک واحد اضافه شود .

چون X_{11} در جواب بهینه یک متغیر غیر پایه است ، باید حلقه مشتمل بر X_{11} و چند متغیر غیر پایه تشکیل شود :

یعنی $1-1 \leftarrow 1-3 \leftarrow 2-3 \leftarrow 2-1$ و خانه $odd(cell)$ در حلقه X_{13} می باشد پس جواب بهینه جدید با افزایش هم X_{13} و هم X_{21} به اندازه یک واحد و کاهش X_{23} به اندازه یک واحد بدست می آید. اینکار جواب جدید مندرج در جدول زیر را نتیجه خواهد داد

جدول بهینه اگر $s_1 = 35 + 1 = 36, d_1 = 45 + 1$										
	D_1		D_2		D_3		D_4		S_i	u_i
O_1		8		6		10		9	36	0
			12		25					
O_2		9		12		13		7	50	3
	45				5					
O_3		14		9		16		5	40	3
			10				30			
d_j	46		20		30		30			
v_j	6		6		10		2			

کنید اگر

توجه

هم S_1 و هم d_1 به اندازه ۶ واحد افزایش می یافت پایه فعلی غیر شدنی می شد (چرا)؟

متغیرهای کران دار در حمل و نقل

حل مساله حمل و نقل با کران پایین برای x_{ij} ($x_{ij} \geq L$) کار ساده ایست. اما برای کران بالا ($0 \leq x_{ij} \leq L$) از الگوریتم های اولیه - ثانویه ویژه مسایل حمل و نقل میتوان بهره گرفت (ص ۳۶۵، ۱۹۶۳، Hadely)

وجود نامساوی در محدودیت های حمل و نقل:

حل حالت زیر در صفحات ۲۹۸-۳۰۲ (Sivazilian&Stanfeld(1975) آمده

$$\text{Min} \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum x_{ij} = S_i$$

...

.....

$$\sum x_{ij} \geq d_j$$

Sivazilian&Stanfeld(1975) متذکر میگردد که ترکیبی از نامساوی در محدودیت های مبدا و

مقصد نیز قابل حل است.

-توضیح در مورد حل کامپیوتری مسائل حمل و نقل

برنامه LINGO برای مساله غیر متوازن در قالب یک مثال

لازم بتوضیح است که *LINGO* مسائل غیر متوازن $\sum S_i > \sum d_j$ را بدون اینکه لازم باشد آنرا

متوازن نمائیم حل می کند. برای جدول داده شده ذیل

	City1	City2	City3	City4	Supply
Plant 1	8\$	6\$	10\$	9\$	35
2	9\$	12\$	13\$	7\$	50
3	14\$	4\$	16\$	5\$	50
Demand	45	20	30	30	

برنامه مسئله حمل و نقل فوق در محیط LINGO چنین است (Winston,1994, p347)

MODEL:

SETS:

PLANTS/P1,P2,P3/:CAP;

```

CITIES/C1,C2,C3,C4/:DEM;
LINKS(PLANTS,CITIES):COST,SHIP;
ENDSETS
MIN=@SUM(LINKS:COST*SHIP);
@FOR(CITIES(J):
@SUM(PLANTS(I):SHIP(I,J))>DEM(J));
@FOR(PLANTS(I):
@SUM(CITIES(J):SHIP(I,J))<CAP(I));
DATA:
CAP=35,50,50;
DEM=45,20,30,30;
COST=8,6,10,9,
9,12,13,7,
14,9,16,5;
ENDDATA
END

```

مدلهای دیگری از مساله حمل و نقل

مدل واگذاری یا تخصیص *Assignment Model*^۱ و مدل حمل و نقل غیر مستقیم

Trans-shipment modelling^۲ و مساله *shortest rout* کوتاه ترین مسیر^۳ از جمله مسایلی

هستند که با الگوریتم حمل و نقل قابل حل است

در واقع اولی تعمیمی از مدل حمل و نقل و یک مساله *Integer programming* خطی است که میتواند بعنوان حالت ویژه‌ای از مدل حمل و نقل در نظر گرفته شود.

^۴ *Trans-shipment modelling* مدل حمل و نقل غیر مستقیم

^۱ ص ۳۱۵ دکتر مهرگان ص ۳۷۲ *Winston* ص ۱۶۲ حمدی طه

^۲ ص ۱۵۹ حمدی طه ، ص ۳۸۰ *Winston*

^۳ (ص ۳۹۵ *Winston*)

^۴ ص ۱۵۹ حمدی طه ، ص ۳۸۰ *Winston*

در این مدل ارسال کالا به یک مقصد از طریق ارسال به مبدا واسطه ای دیگر علاوه بر ارسال مستقیم امکان پذیر است. الگوریتم یافتن جواب برای یک مسأله حمل و نقل غیرمستقیم با فرض بیشتر بودن

عرضه از تقاضا یعنی $\sum_{i=1}^m s_i > \sum d_j$ چنین است :

گام های یافتن جواب

گام ۱: متوازن کردن

در صورت لزوم یک محل تقاضای مجازی (با عرضه صفر و تقاضایی برابر با عرضه مازاد در مسأله) اضافه نمایید.

هزینه حمل به محل مجازی صفر می باشد همچنین هزینه از یک نقطه به خودش نیز صفر است. برای خانه های غیرممکن هزینه M در نظر بگیرید. S را مساوی جمع کل عرضه در نظر بگیرید. گام ۲: مطابق دستورالعمل زیر یک جدول حمل و نقل جدید بنا کنید.

تعدادسطرها:

برای هر محل عرضه یک سطرو هم چنین برای هر محل *Transshipment* یک سطر منظور کنید. تعدادستون ها:

بازای هر محل تقاضا و هر محل *Transshipment* یک ستون در نظر بگیرید.

عرضه هر محل که صرفاً عرضه می نماید = عرضه اصلی آن محل

و

تقاضای هر محل که صرفاً تقاضا دارد = تقاضای اولیه در مساله می باشد

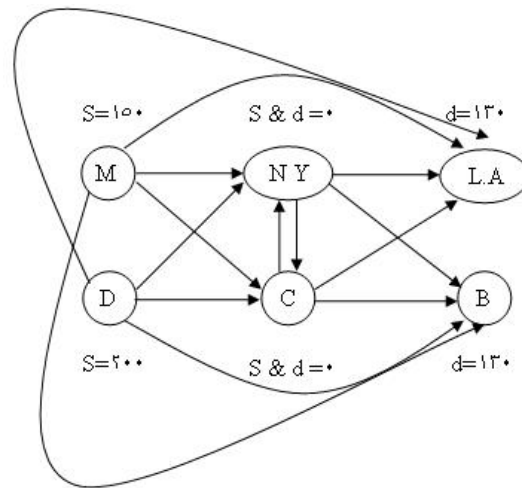
عرضه هر محل *Transshipment* = عرضه اصلی محل S

تقاضای هر محل *Transshipment* = تقاضای اصلی محل S

که در آن مجموع کل عرضه ها S است

گام ۳: با یکی از روشهای روش فوگل یا راسل یک جواب پایه اولیه ($b.f.s$) را یافته سپس با روشی

مثل *UV* آنرا بهینه کنید. مثال ۱ ص ۳۸۱ کتاب *Winston*



شکل ۱۲۴

$$S = 150 + 200 = 350 > \sum d = 130 + 130$$

حاصل گام ۱ و ۲: مساله را یک مساله متوازن حمل و نقل می‌نماییم.

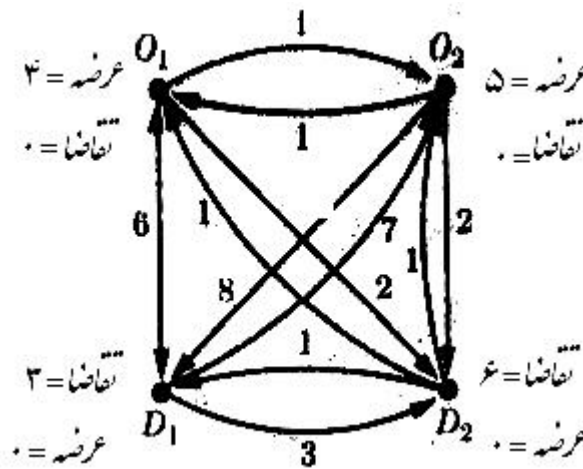
	<i>N.Y</i>	<i>C</i>	<i>LA</i>	<i>B</i>	مقصد مجازی	عرضه
<i>M</i>	8	13	25	28	0	150
<i>D</i>	15	12	26	25	0	200
<i>N.Y</i>	0	6	16	17	0	350
<i>C</i>	6	0	14	16	0	350
تقاضا	350	350	130	130	90	

گام ۳: پس از یافتن یک جواب اولیه و بهینه کردن جواب حاصل، مقادیر بهینه بدست خواهد آمد.

مثال ۲

^۱ با تشکر از آقای علی بازرگان

مطلوبست حل مساله زیر با در نظر گرفتن وبدون در نظر گرفتن *Transshipment* - اعداد روی فلش ها هزینه هستند



شکل ۲۵ (Figure 10-13 Hadley ۱۹۶۳)

الف) تحقیق کنید جدول نهایی مساله اگر *Transshipment* وجود نمی داشت به صورت زیر بود

$$Z^* = ۳۰$$

	D_1	D_2	S_i
O_1	۶ (۳)	۲ (۱)	۴
O_2	۱ ۲	۲ (۵)	۵
b_j	۳	۶	۹

ب) تحقیق کنید که جدول متوازن نهایی مساله با در نظر گرفتن *Transshipment* به صورت زیر وجواب بهینه تابع هدف آن $Z^* = ۲۱$ می باشد. (Hadley ۱۹۶۳/ Table 10-1):

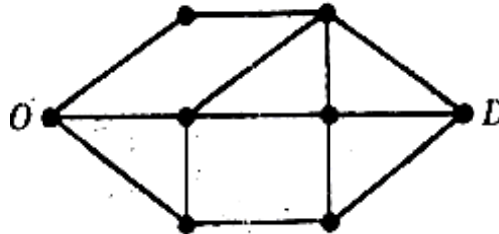
	O_1	O_2	D_1	D_2	
O_1	۰	۱	۶	۲	13

	<u>۹</u>	۱	۳	<u>۴</u>	
O_2	۱ ۱	۰ <u>۹</u>	۸ ۵	۲ <u>۵</u>	14
D_1	۶ ۹	۷ ۱۰	۰ <u>۹</u>	۳ ۴	9
D_2	۱ ۳	۱ ۳	۱ <u>۳</u>	۰ <u>۶</u>	9
	9	9	12	15	45

بر اساس این جدول نهایی، که حمل و نقل غیر مستقیم را مجاز می داند، اگر تمام واحدها از O_1 و O_2 ابتدا به D_2 ارسال شوند سپس از D_2 تعداد ۳ واحد به D_1 ارسال شود هزینه برابر $Z^*=21$ خواهد شد که نسبت به حمل مستقیم ارزان تر است.

یافتن مسیر کمترین هزینه با مدل حمل و نقل

ایجا اشاره این مطلب خالی از لطف نیست که یافتن مسیر کمترین هزینه (مثلاً از O به D در شکل زیر) با الگوریتم سیمپلکس حمل و نقل است (Hadley 1963, page ۳۷۳)



شکل ۲۵ مساله یافتن مسیر کمترین هزینه (از Fig 10-14 Hadley, 1963)

مدل تخصیص یا واگذاری (Assignment Problem)

درنوع معمولی مسأله تخصیص هدف این است که تعدادی مبدأ به همان تعداد مقصد با کمترین هزینه (یا بیشترین سود) اختصاص یابد:

از جمله کاربردهای این مدل: تخصیص پروژه‌ها و شغلها به افراد، تخصیص کارها به ماشینها، تخصیص ماشینها به افراد، تخصیص کارگران به کارها، تخصیص کلاس‌ها به معلمها، حسابدار به حساب‌های مشتریان و... است

مسئله تخصیص حالت خاصی از مدل حمل و نقل است. یکی از ویژگی‌ها این است که تعداد سطر و ستون حتماً باید یکسان باشند (یا یکسان شوند). بهر مقصد تنها یک مبدأ اختصاص داده می‌شود:

$$S_i = d_j = 1, \quad m = n$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

محدودیت‌های مربوط به ماشین

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

محدودیت‌های مربوط به کار

$x_{ij} = 0 \text{ or } 1$ مقادیر متغیرها ۱ و ۰ می‌باشند

جواب مساله شامل $m=n$ متغیر داری مقدار ۱ می‌باشد.

از جمله روش‌های موجود برای حل مسئله واگذاری (تخصیص) فوق روش شمارش *enumeratim* (برای n و m کم)، سیمپلکس حمل و نقل، روش شاخه و کران است

الگوریتم زیر روش ساده‌تری برای حل مسائل تخصیص است که تنها با مقادیر هزینه در جدول تخصیص سر و کار دارد این روش محاسباتی که توسط یک ریاضی‌دان مجا رستاتی (*D.Konig*) وضع شده است. روش مشابه مسئله حمل و نقل میباشد. الگوریتم‌های حل مسئله تخصیص عموماً براساس کمینه‌سازی توضیح داده شده‌اند لذا مساله بیشینه‌سازی را به کمینه‌سازی تبدیل کنید

الگوریتم مجارستانی ۱ برای حل مسائل تخصیص از نوع کمینه سازی:

گام ۰

در ابتدا اگر تابع هدف مساله Max باشد آنرا با ضرب کردن در (-1) به مساله Min تبدیل کنید. و به خانه‌هایی که امکان اختصاص وجود ندارد هزینه M اختصاص یابد. مدل را اگر متوازن نیست یعنی اگر تعداد سطرها و ستونها مساوی نباشد متوازن نمایید (با افزودن سطر مجازی یا ستون مجازی).

گام ۱

- ابتدا کمترین هزینه در هر سطر را از تمام هزینه‌های موجود در آن سطر کم کنید و سپس در جدول بدست آمده، کمترین هزینه در هر ستون را از تمام هزینه‌های موجود در آن ستون کم نمایید. توجه کنید کم کردن یک مقدار مثل a از تمام c_{ij} های یک سطر یا یک ستون در مسأله تخصیص جواب بهینه را تغییر نمی دهد. اما از Z^* قبلی a کسر می شود. (وینستون ۱۹۹۴، ص ۳۷۷)

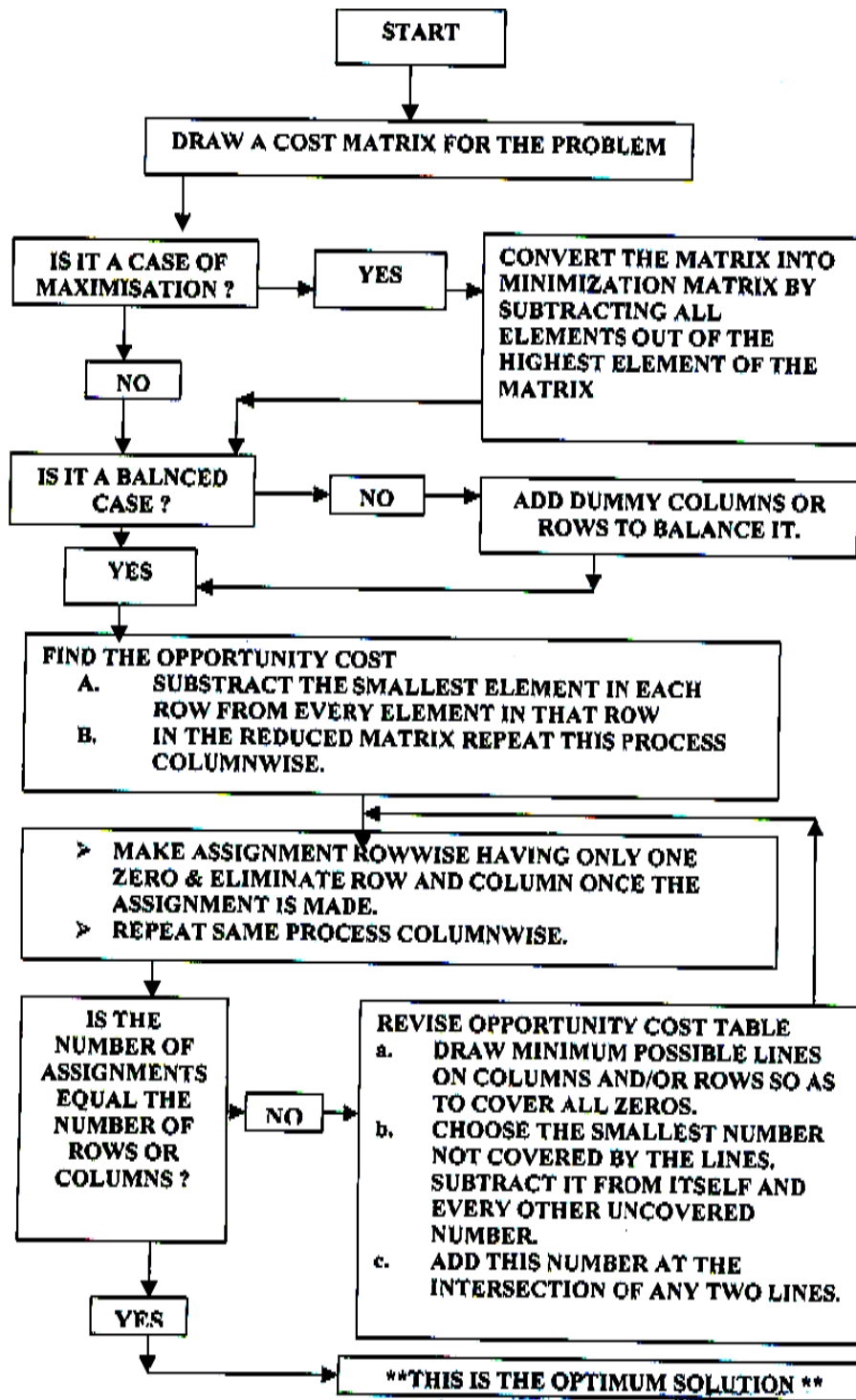
گام ۲

- حداقل تعداد خطوط عمودی یا افقی رسم کنید که کلیه صفرهای جدول را پوشش دهد. چنانچه این تعداد خطوط با تعداد تخصیص‌ها برابر باشد ($m=n$ = تعداد خطوط) متوقف شده و سطر یا ستون با تنها صفر پوشانیده شده را بیابید به خانه شامل این صفر تخصیص لازم را بدهید و سطر و ستون مربوطه را حذف کنید سپس سطر یا ستون با تنها صفر پوشانده شده باقیمانده را بیابید و به آن خانه دارای این صفر تخصیص لازم را بدهید این عمل را متناوباً انجام دهید تا تعداد تخصیص‌ها برابر n گردد. یک جواب بهینه در خانه‌های با صفرهای پوشانده شده است. چنانچه این تعداد خطوط با تعداد تخصیص‌ها برابر نباشد به گام بعدی بروید.

گام ۳

- از بین اعداد مخالف صفر که با خطوط پوشانده نشده است کمترین آنها را انتخاب کنید. این عدد را از کلیه اعدادی که با خط پوشانده نشده است کم کنید و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط رسم شده قرار دارند اضافه کنید و سپس مجدداً به گام دوم برگردید.

مثال: جدول تخصیص زیر را در نظر بگیرید. D, C, B, A چهار کار و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چهار ماشین می‌باشند. می‌خواهیم مشخص کنیم که هر کار به چه ماشین تخصیص داده شود تا هزینه کل حداقل گردد. اعداد داخل جدول هزینه تخصیص یک کار به یک ماشین می‌باشد.



شغل یا ماشین

	۱	۲	۳	۴
A	۱	۴	۶	۳
B	۹	۷	۱۰	۹
C	۴	۵	۱۱	۷
D	۸	۷	۸	۵

فرد یا کار

ابتدا کوچکترین عدد هر سطر را
از تمام عناصر سطر کم می‌کنیم

۰	۳	۵	۲
۲	۰	۳	۲
۰	۱	۷	۳
۳	۲	۳	۰

سپس کوچکترین عنصر
هر ستون را از تمام
عناصر ستون کم می‌کنیم

۰	۳	۲	۲
۲	۰	۰	۲
۰	۱	۴	۳
۳	۲	۰	۰

با کمترین تعداد
خطوط پوششی
صف‌های داخل جدول
را می‌پوشانیم

۰	۳	۲	۲
۲	۰	۰	۲
۰	۱	۴	۳
۳	۲	۰	۰

چون تعداد خطوط پوششی برابر $n=4$ نمی‌باشد بنابراین جدول بهینه نیست از بین عناصری که روی آنها خط کشیده نشده کوچکترین عنصر را انتخاب و آن را که در اینجا برابر ۱ می‌باشد از تمام عناصری که روی آنها خط کشیده نشده کم و به محل برخورد خطوط اضافه می‌کنیم. حال بر طبق گام ۲ روی ستون دوم نیز باید خط کشید تا کلیه صف‌ها پوشانده شود.

۰	۳	۱	۱
۳	۰	۰	۲
۰	۰	۳	۲
۴	۲	۰	۰

چون تعداد خطوط پوششی برابر $n=4$ می‌باشد جدول بهینه است. جواب نهائی:

هزینه	شغل یا ماشین	کار یا فرد
A	۱	۱
B	۳	۱۰
C	۲	۵
D	۴	۵

$$X_{11}^* = 1 \quad X_{23}^* = 1 \quad X_{22}^* = 1 \quad X_{24}^* = 1$$

$$Z^* = 1 + 10 + 5 + 5 = 21$$

توجه داشته باشید جواب نهائی از بین خانه هایی که صفر شده اند انتخاب می گردد با این توجه که در هر سطر و ستون یک خانه انتخاب می شود بعبارت دیگر در جواب نهائی در هر ستون یک صفر در هر سطر نیز یک صفر انتخاب شده وجود دارد. مثال (ص ۳۷۶ وینستون). اگر غیر از این بدست آید اشتباهی رخ داده است.

تمرین : جدول تخصیص زیر را در نظر بگیرید. A, B, C, D چهار کار و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چهار ماشین می باشند. می خواهیم مشخص کنیم که هر کار به چه ماشین تخصیص داده شود تا هزینه کل حداقل گردد. اعداد داخل جدول هزینه تخصیص یک کار به یک ماشین می باشد.

جدول اولیه				
	۱	۲	۳	۴
A	۱۴	۵	۸	۷
B	۲	۱۲	۶	۵
C	۷	۸	۳	۹
D	۲	۴	۶	۱۰

جواب: جدول کاهش یافته نهایی:

	۱	۲	۳	۴
A	۱۰		۳	
B	۰	۹	۳	۰
C	۵	۵	۰	۴
D	۰	۲	۳	۵

و:

$$X_{12}^* = 1 \quad X_{24}^* = 1 \quad X_{33}^* = 1 \quad X_{41}^* = 1$$

نکات مهم مدل تخصیص

- ۱- مدل تخصیص متوازن همواره دارای جواب موجه است.
- ۲- مدل تخصیص شامل n کار و n متقاضی، دارای $2n$ محدودیت می باشد.
- ۳- تعداد متغیرهای تصمیم برای مدل تخصیص با n کار و n متقاضی n^2 می باشد.
- ۴- تعداد متغیرهای اساسی در هر مسئله تخصیص در هر مرحله $2n-1$ می باشد که n متغیر با مقدار 1 ، $n-1$ متغیر با مقدار صفر در پایه می باشد.

حل مسائل واگذاری (تخصیص) با روش حمل و نقل ۱

توجه اگر مدل تخصیص بخواهد بصورت مسأله حمل و نقل حل شود چون $s_i=1$ ، $d_j=1$ برای متوازن نمودن مدل باید $m=n$ والا باید مبدا اضافی غیر حقیقی یا مقصد اضافی غیر حقیقی به مسأله با C_{ij} صفر افزود تا متوازن و قابل حل شود. هزینه بسیار زیاد M برای خانه هایی در نظر گرفته می شود امکان اختصاص بدانها نباشد.

مثال: مسأله تخصیصی را بمنظور حداقل کردن تعداد ساعات در نظر بگیرید که برای آن جواب پایه اولیه زیر بکمک یک روش بدست آمده است. اعداد در خانه ها تعداد ساعتی است که ماشین روی کار وقت صرف می کند. جواب پایه اولیه بر اساس جدول زیر

¹ حل مدل تخصیص به کمک روش حمل و نقل ص ۱۶۲ حمدی طه

$$x_{۴۱}=۱ \quad x_{۳۳}=۱ \quad x_{۴۲}=۰ \quad x_{۱۲}=۱ \quad x_{۲۴}=۱ \quad x_{۱۴}=x_{۱۳}=۰$$

$$Z = ۱ \times ۴ + ۱ \times ۴ + ۱ \times ۲ + ۱ \times ۱ = ۱۱$$

	U_i			
	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	13 +11 1	4 1 +9 7 +8 3 1	7 0 2 1 5 + -1	6 . 4 1 8 +7 9 +۶
M_2	1	11	5	4
M_3	6	7	2	8
M_4	1	3	5	9
V_j	$V_1=2$	$V_2=4$	$V_3=7$	$V_4=6$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = -2$$

$$U_3 = -5$$

$$U_4 = -1$$

در جواب اولیه فوق شدنی ولی تباهیده می باشد که در حل مسأله تخصیص با روش حمل و نقل امری عادی است و $m-1$ or $n-1$ متغیر تباهیده در جواب داریم

مرحله ۲ بهینگی جواب

برای اینکار از روش UV (روش مضارب یا روش MODI) استفاده میشود. پس از انجام محاسبات، متوجه می شویم

حلقه را تشکیل می دهیم. $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ ها مثبت نیستند و متغیر ورودی متغیر مربوط به خانه M_4J_3 (X_{43}) می باشد.

مقدار مجاز برای θ صفر می باشد. که متعلق به X_{23} یا X_{42} است به دلخواه یکی از این ۲ متغیر را خروجی می گیریم توجه داشته باشید که دیگری باید جزو متغیرهای پایه بماند گرچه متغیر پایه تباهیده خواهد بود.

بدلخواه متغیر X_{13} را خروجی می گیریم. جواب جدید چنین است چون θ صفر بود پس بهبودی حاصل نشده است

در جدول زیر ضرایب U, V جدید محاسبه شده است. ابتدا u_4 صفر گرفته شده است.

	J_1	J_2	J_3	J_4	U_i
M1	13 +11	4 ①	7 +2	6 ○	$U_1=1$
M2	1 +1	11 +9	5 +1	4 ①	$U_2=-1$
M3	6 +8	7 +7	2 ①	8 +6	$U_3=-3$
M4	1 ○	3 ○	5 ○	9 +4	$U_4=0$
V_j	$V_1=1$	$V_2=3$	$V_3=5$	$V_4=5$	

چون همه $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ ها نسبت پس جدول نهائی است و نتیجه می گیریم

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1$$

تعداد کل ساعات در حالت بهینه: $Z^* = 1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 11$

لذا ماشین ۱ روی کار ۲ کار خواهد کرد ماشین دوم به کار ۴ مشغول خواهد شد...

حل مدل تخصیص به کمک روش **Branch & Bound** نیز انجام شده است (شاخه و کران

ص ۳۲۹ دکتر مهرگان)

حل مدل تخصیص با مفهوم **Dual** نیز میسر است: به مراجعی مثل ص ۳۱۱-۳۱۳ کتاب

Sivazilian&Stanfel(1975) مراجعه شود.

حل مسئله تخصیص با Lingo

(صفحه ۳۷۸ Winston, 1994)

Computer Solution of Assignment Problems

To solve assignment problems in LINDO type in the objective function and constraints.

Also, many menu-driven programs exist that require the user to input only a list of supply and demand points (such as jobs and machines, respectively) and a cost matrix.

LINGO can also be used to easily solve assignment problems, including the following model to solve the Machineco example (file Assign.Ing).

زمان های تنظیم برای Machineco				
زمان (ساعت)				
کار ۴	کار ۳	کار ۲	کار ۱	
7	8	5	14	ماشین ۱
5	6	12	2	ماشین ۲
9	3	8	7	ماشین ۳
10	6	4	4	ماشین ۱

```

MODEL:
1]SETS:
2]MACHINES/1..4/;
3]JOBS/1..4/;
4]LINKS(MACHINES,JOBS): COST, ASSIGN;
5]ENDSETS
6] MIN=8SUM (LINKS : COST*ASSIGN) ;
7]@FOR(MACHINES(I):
8]@SUM(JOBS(J):ASSIGN*I,J))<1);
9]@FOR(JOBS(J):
10]@SUM(MACHINES(I):ASSIGN*I,J))>1);
11]DATA:
12]COST = 14,5,8,7,
13]2,12,6,5,
14]7,8,3,9,
15]2,4,6,10;
16]ENDDATA
END

```

حالت کلی مسأله تخصیص

در حالت کلی ممکن است بیش از یک فرد به یک پروژه یا کار اختصاص دهیم. یا بیش از یک کار به یک فرد (صفحه ۳۳۲, Ignizio, 1982).

۲۲۸

$$\text{Min } z = \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{for all } i$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq a_j \quad \text{for all } j$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if job } i \text{ assigned to worker } j \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

c_{ij} = time required to perform job i by worker j

a_j = total amount of time that worker j can be assigned

-تکلیف ۳ مساله حمل و نقل را که در کلاس داده خواهد شد با نرم افزار ی مثل **LINGO** (با

فرمات خاص) و یا **LINDO** (بصورت سیمپلکس معمولی) و نیز دستی حل شود

۲- مرجع در مورد برنامه ریزی خطی و مدل حمل و نقل

Winston(1994) **Bazaraa & Jarvis(1990)**

معرفی نرم افزار برای حل مسائل برنامه ریزی خطی

بدیهی است که بکار بردن الگوریتم سیمپلکس برای مسائل با تعداد متغیر و محدودیت زیاد، بطور دستی کار مشکلی است. از این رو نرم افزارهایی همچون **LINDO** و **LINGO** وجود دارد که کار با آنها ساده است و صرفاً باید اصل مسئله برنامه ریزی خطی را به کامپیوتر داد تا جواب بهینه عاید گردد. و نیز با نرم افزارهای **MATLAB**, **TORA**, **GAMS**, **GINO**. همچنین بهینه سازی

خطی به کمک نرم افزارهایی مثل **ANSYS** نیز امکان پذیر است

نمونه کار با **Lingo**

ابتدا تابع هدف و محدودیت ها را در محیط **Lingo** وارد می شود

$$\text{Max}=3.5*x_1+5*x_2;$$

$$2*x_1+x_2\leq 6000;$$

$$x_1+4*x_2\leq 10000;$$

پس از آن Save می گردد.

نتیجه حل (با دستور Solve از منوی Lingo):

Rows= 3 Vars= 2 No. integer vars= 0 (all are linear)
 Nonzeros= 8 Constraint nonz= 4(2 are +- 1) Density=0.889
 Smallest and largest elements in absolute value= 1.00000 10000.0
 No. < : 2 No. =: 0 No. > : 0, Obj=MAX, GUBs <= 1
 Single cols= 0

Optimal solution found at step: 0

Objective value: 17000.00

	Variable	Value	Reduced
Cost	X1	2000.000	0.0000000E+00
	X2	2000.000	0.0000000E+00
	Row	Slack or Surplus	Dual Price
	1	17000.00	1.000000
	2	0.0000000E+00	1.285714
	3	0.0000000E+00	0.9285714

نمونه کار با MATLAB با دستور linprog

مساله باید به فرم $\text{Min } c*x \text{ subject to: } A*x (<= \text{ or } =) b$ باشد

برای جزییات به MATLAB Help مراجعه کنید

$[x,fval] = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub) ;$

حل مثال فوق

```
>> c=[3.5 5];
```

```
>> A=[2 1
```

```
1 4];
```

```
>> b=[6000
```

```
10000];
```

دادن قید $X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$ به صورت $lb=zeros(n, 1)$ می باشد دراین جا $n = 2$.

```
>> lb=zeros(2, 1)
```

۲۳۰

چون در محدودیت های فوق تساوی صرف نداریم $Aeq=[],beq=[]$ چون متغیرها حد بالا ندارند
 $.ub=[]$

```
[x,fval] = linprog(-c,A,b,[],[],lb,[])
```

Optimization terminated.

```
x =
```

```
1.0e+003 *
```

```
2.0000
```

```
2.0000
```

```
fval =
```

```
-1.7000e+004
```

```
 $Z_{max} = -Z_{min} = 17000$ 
```

مثال دیگر

Min $Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

s.t.

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 2$

$x_3 \geq 0$

```
>>c=[-1 -2 -3];
```

```
>>Aeq=[1, 1,1]; beq=[6]
```

```
>> A=[...
```

```
-4, -2, 3
```

```
2, 1, 1];
```

```
>>b=[-5
```

```
6];
```

```
>>lowerBound=[0. 2. 0];
```

```
>>[ x , fval]=linprog(c , A, b, Aeq ,beq,lowerBound)
```

Optimization terminated.

```
x =
```

```
0.0000
```

```
4.6000
```

```
1.4000
```

```
fval =
```

```
-13.4000
```

برنامه حل مسأله غیرمتوازن حمل و نقل در محیط Lingo

برای جدول داده شده ذیل

	City1	City2	City3	City4	Supply
Plant 1	8\$	6\$	10\$	9\$	35
2	9\$	12\$	13\$	7\$	50
3	14\$	4\$	16\$	5\$	50
Demand	45	20	30	30	

برنامه در محیط *LINGO* چنین است (Winston, p347)

MODEL:

SETS:

PLANTS/P1,P2,P3/:CAP;

CITIES/C1,C2,C3,C4/:DEM;

LINKS(PLANTS,CITIES):COST,SHIP;

ENDSETS

MIN=@SUM(LINKS:COST*SHIP);

@FOR(CITIES(J):

@SUM(PLANTS(I):SHIP(I,J))>DEM(J));

@FOR(PLANTS(I):

@SUM(CITIES(J):SHIP(I,J))<CAP(I));

DATA:

CAP=35,50,50;

DEM=45,20,30,30;

COST=8,6,10,9,

9,12,13,7,

14,9,16,5;

ENDDATA

END

خروجی پس از حل (*Solve*)

Rows= 8 Vars= 12 No. integer vars= 0 (all are linear)

Nonzeros= 43 Constraint nonz= 24(24 are +- 1) Density=0.413

Smallest and largest elements in absolute value= 1.00000 50.0000

No. < : 3 No. =: 0 No. > : 4, Obj=MIN, GUBs <= 4

Single cols= 0

Optimal solution found at step: 7

Objective value: $Z^* = 1020.000$

Variable	Value	Reduced Cost
CAP(P1)	35.00000	0.0000000E+00
CAP(P2)	50.00000	0.0000000E+00
CAP(P3)	50.00000	0.0000000E+00
DEM(C1)	45.00000	0.0000000E+00
DEM(C2)	20.00000	0.0000000E+00
DEM(C3)	30.00000	0.0000000E+00
DEM(C4)	30.00000	0.0000000E+00
COST(P1, C1)	8.000000	0.0000000E+00
COST(P1, C2)	6.000000	0.0000000E+00
COST(P1, C3)	10.00000	0.0000000E+00
COST(P1, C4)	9.000000	0.0000000E+00
COST(P2, C1)	9.000000	0.0000000E+00
COST(P2, C2)	12.00000	0.0000000E+00
COST(P2, C3)	13.00000	0.0000000E+00
COST(P2, C4)	7.000000	0.0000000E+00
COST(P3, C1)	14.00000	0.0000000E+00
COST(P3, C2)	9.000000	0.0000000E+00
COST(P3, C3)	16.00000	0.0000000E+00
COST(P3, C4)	5.000000	0.0000000E+00
SHIP(P1, C1)	0.0000000E+00	2.000000
SHIP(P1, C2)	$X_{12}^* = 10.00000$	0.0000000E+00
SHIP(P1, C3)	$X_{13}^* = 25.00000$	0.0000000E+00
SHIP(P1, C4)	0.0000000E+00	7.000000
SHIP(P2, C1)	$X_{21}^* = 45.00000$	0.0000000E+00
SHIP(P2, C2)	0.0000000E+00	3.000000
SHIP(P2, C3)	$X_{23}^* = 5.000000$	0.0000000E+00
SHIP(P2, C4)	0.0000000E+00	2.000000
SHIP(P3, C1)	0.0000000E+00	5.000000
SHIP(P3, C2)	$X_{32}^* = 10.00000$	0.0000000E+00
SHIP(P3, C3)	0.0000000E+00	3.000000
SHIP(P3, C4)	$X_{34}^* = 30.00000$	0.0000000E+00

Row Slack or Surplus Dual Price

1	1020.000	1.000000
2	0.0000000E+00	-9.000000
3	0.0000000E+00	-9.000000
4	0.0000000E+00	-13.00000
5	0.0000000E+00	-5.000000
6	0.0000000E+00	3.000000
7	0.0000000E+00	0.0000000E+00
8	10.00000	0.0000000E+00

LINGO علاوه بر حل مسائل برنامه‌ریزی خطی و حمل و نقل، مسائل تخصیص و کوتاهترین مسیر و نیز برنامه‌ریزی غیرخطی را حل می‌کند.^۱ نیز با یک برنامه خیلی کوتاه احتمالات برخی از توزیعها نظیر نرمال استاندارد و بینومیال و پواسن نیز محاسبه می‌کند.

محاسبه $P_r(Z > -1.250)$:

MODEL:

PROB=@PSN(-1.250);

حل تمرین ص... با کمک نرم افزار Lindo (Winston, 1994 page 228)

Giapto Inc sells wooden soldiers and wooden trains

The resources used to produce a soldier and train are shown in Table

	Soldiers	Train
Lumber (board feet)	۳	۵
Labor (hours)	۲	۴

A total of 145,000 board feet of lumber and 90,000 hours of labor are available. Up to 50,000 soldiers and up to 50,000 trains can be sold, with trains selling for \$55 and soldiers for \$32. In

^۱ به "آشنایی با نرم افزار LINGO" از انجمن دانشجویی مهندسی صنایع دانشگاه باهنر کرمان مترجم حمید بازرگان رجوع شود

addition to producing trains and soldiers itself, Giapetto can buy (from an outside supplier) extra soldiers at \$27 each and extra trains at \$50 each. Let

SM = thousands of soldiers manufactured SB = thousands of soldiers bought at \$27

TM = thousands of trains manufactured TB = thousands of trains bought at \$50

Then Giapetto can maximize profit by solving the LP in the LINDO printout in Figure 22. Use this printout to answer the following questions. (Hint: Think about the units of the constraints and objective function.)

a If Giapetto could purchase trains for \$48 per train, what would be the new optimal solution to the LP? Explain.

b What is the most Giapetto would be willing to pay for another 100 board feet of lumber? For another 100 hours of labor?

c If 60,000 labor hours are available, what would Giapetto's profit be?

d If only 40,000 trains could be sold, what would Giapetto's profit be?

FIGURE 22 LINDO Output for Giapetto

```

MAX      32 SM +    55T    +5SB    5TB
SUBJECT TO
2)        3 SM +    5TM    <=    145
3)        2 SM +    4TM    <=    90
4)        SM + SB    <=    50
5)        TM + TB    =    50
END
  
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1715.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
SM	45.000000	.000000
TM	.000000	4.000000
SB	5.000000	.000000
TB	50.000000	.000000
ROW	SLACK OR	DUAL
	SURPLUS	PRICE
2)	10.000000	.000000
3)	.000000	13.50
4)	.000000	5.000000

5) .000000

5.,000

NO. ITERATIONS= 4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

variable	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
SM	32.000000	INFINITY	۲, ++++++
TM	55.000000	۴, ++++++	INFINITY
SB	5.000000	۲, ++++++	0, ++++++
TB	5.000000	INFINITY	۴, ++++++

RIGHT HAND SIDE Ranges

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	145.000000	INFINITY	10
3	90.000000	6.666667	90
4	50.000000	INFINITY	5
5	50.000000	INFINITY	50

:

الگوریتم تجزیه

در این قسمت صرفاً به معرفی نام یکی از الگوریتمهای موسوم به الگوریتم تجزیه یعنی

الگوریتم تجزیه Dantzig- walfe می پردازیم برای شرح بیشتر به ص ۵۶۹ کتاب

Winston

و ص ۵۲۰ کتاب انگلیسی Hillier & Liberman مراجعه شود

یکی از راههای مقابله با بزرگی مدلهای LP تجزیه مدل به زیرمدلهای کوچکتر است

بطوریکه از جواب این زیرمدلها میتوان جواب مدل کلی را بدست آورد.

$$Z = CX$$

$$s.t.$$

$$AX \leq b$$

در مدل‌های خطی $X \geq 0$ بکرات اتفاق می‌افتد که ماتریس A ساختاری به شکل زیر

دارد

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_N \\ A_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_N \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_N \\ B_1 & B_2 & B_N \end{bmatrix}$$

که در آن $A_1, B_1, \dots, A_N, B_N$ ماتریس و $\cdot$ ماتریس صفر می‌باشد. مثال:

$$\text{Max } z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 25$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_2 + 3x_3 \leq 12$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

ماتریس A گاه بصورت زیر قابل تجزیه است.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$N=2$

یکی از مواقعی که این نوع ماتریس در مسأله ظاهر می‌شود وقتی است که منابع توسط گروهی از فعالیتها می‌تواند استفاده شود.

مثال دیگر

۲۳۷

$$\text{Max } Z = (3 \ 7 \ 2 \ 5 \ 8 \ 5 \ 10) (X)$$

$$s.t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & & 0 & & 0 & \\ 1 & 4 & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ & 1 & 0 & 2 & & & \\ & & & & & 2 & 3 \\ 0 & & 0 & & & 4 & 0 \end{bmatrix} (X) = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 8 \\ 12 \\ 20 \\ 7 \\ 10 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

B_1	B_2	B_3	
1 0	2 3 1	1 4	
2 1	1 1 0	3 1	
2 1			
1 4			0
	1 2 3		
	1 0 2		0
		2 3	
		4 0	
		1	6

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1		1	0	1	1	1	0
A_2		1	1	1	1	0	1
A_3		1	1				
A_4		1	0				
A_5		0		1	1	1	
A_6		0		1	0	1	
A_7		0					1
A_8		0					1

آشنایی با برنامه ریزی آرمانی Preemptive Goal و Goal Programmng
Programming
آشنایی با I.P Integer programming
آشنایی مختصر با DYNAMIC Programming
BENNIE MERK Trucking CO از جزوه دستی

منابع

حمدی طه (نویسنده)، بازرگان، محمد باقر (مترجم)

مقدمه ای بر تحقیق در عملیات

مرکز نشر دانشگاهی

اصغر پور، محمد جواد

برنامه ریزی خطی

دانشگاه تهران

هلیه و لیبرمن ترجمه مدرس و آصف وزیری (۱۳۷۹)

برنامه ریزی خطی

نشر تندر

کتاب کنکور راهیان ارشد

Bazaraa M & Jarvis J: 1990

Linear Prog & Network Flows

Wiley New York

Bradley, Stephen P. Hax, Arnaldo C. and Magnanti, Thomas L. 1977,

Applied math Programming ,

Addison-Wesley. download able (<http://web.mit.edu/15.053/www/>)

Dantzig GB 1953

Computational Algo

RM-1266 The RAND corp

Dantzig Orden Wolfe ,1955

The generalized

Pacific Jr of Mat. vol 5 2

Gottfried

جزوه درسی

University of pittsburgh

Hadley, G,1963

Linear Programming

Addison-Wesley

Hillier, F.S. & Lieberman, G.L.

Intro. to OR

Holden-day Inc

Ignizio, J.P. 1982

linear programming in single & multiple objective systems

Prentice hall

- Radin, R.L., 1997
Optimization in Operations Research
Prentice Hall
- Sivazilian, B. D. & Stanfel, L.E. 1975
Optimization Techniques in O.R.
Prentice. Hall
- Taha, H.A.
Operations Research. An introduction
Macmillan Publishing co, New york
- Winston, W.L. 1994
"Operations Research: Applica. & Algo" 3rd ed
Duxbury Pub. CA, USA
- Zionts, Stanley 1969
The Criss-Cross Method for Solving Linear Programming Problems
Managem. Sci. 15, pp426-445
- Yinyu, Ye, 1997
Interior Point Algorithms: Theory and Analysis
Wily- interscience.