فهرست مطالب

فصل اول

تبه‌گنی در برنامه‌ریزی خطی

۱-۱ مقدمه

مسأله‌ی LP[1] زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m < n$. اگر B پایه‌ای برای ۱-۱ باشد، این پایه را **غیرتبه‌گن**[2] گویند؛ اگر تمامی متغیرهای اساسی آن در جواب اساسی مخالف صفر باشند؛ یعنی اگر و فقط اگر تمامی مؤلفه‌های بردار $B^{-1}b$ غیر صفر باشند. پایه ای از ۱-۱ که غیرتبه‌گن نباشد پایه تبه‌گن است. LP فوق را کاملاً **غیرتبه‌گن (اولیه)**[3] گویند اگر و فقط اگر هر پایه آن غیرتبه‌گن باشد.

1) Linear Programming 2) Nondegenerate 3) Totally Nandegenerate

۱-۱-۱ قضیه. مسأله‌ی LP ۱-۱ کاملاً غیرتبه‌گن است؛ اگر و فقط اگر هر جواب $Ax = b$ حداقل m مولفه‌ی غیرصفر داشته باشد.

برهان. فرض کنید هر جواب $Ax = b$ حداقل m مؤلفه‌ی غیر صفر داشته باشد و B یک پایه اساسی برای آن باشد، $(B^{-1}b, 0)$ یک جواب شدنی مسأله فوق است و طبق فرض تعداد مؤلفه‌های غیرصفر آن از m کمتر نیست. چون $n - m$ مؤلفه‌ی این جواب صفر می‌باشد، پس ناچاراً تمامی m مؤلفه ی $B^{-1}b$ مخالف صفر می‌باشند. یعنی B یک **پایه غیرتبه‌گن** است. چون B دلخواه بود پس هر پایه آن غیرتبه‌گن می‌باشد و این بدان معنی است که مسأله کاملاً غیرتبه‌گن می‌باشد.

بالعکس فرض کنیم که مسأله کاملاً غیرتبه‌گن می‌باشد، ثابت می‌کنیم که هر جواب $Ax = b$ حداقل m مولفه‌ی مخالف صفر دارد.

فرض کنیم x^0 یک جواب $Ax = b$ باشد. به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌شود که فرض کنیم x^0 به‌صورت زیر است:

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_r^0, 0, \dots, 0)$$

و فرض کنیم

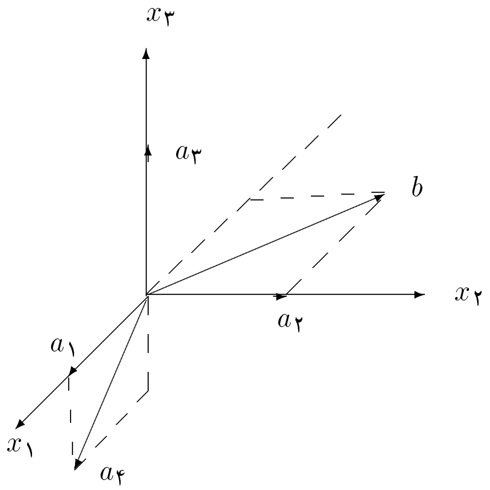
$$D = \{a_1, \dots, a_r\}$$

اگر D **مستقل خطی** باشد، x^0 یک جواب اساسی است و $m = r$. در غیراین‌صورت یعنی اگر D مستقل خطی نباشد از x^0 می‌توان به یک جواب اساسی مانند $\bar{x}$ رسید که $\bar{x}$ اساسی است وتعداد مؤلفه مخالف صفر $\bar{x}$ که طبق فرض برابر m است، یعنی تعداد مؤلفه‌های مخالف صفر x^0 در هر حالت از m کمتر نیست و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

قبل از این که محتوای قضیه فوق از نظر جبری بررسی شود، که در حالت تبه‌گنی چه اتفاقی می‌افتد. b نسبت به ستون های A چه وضعیتی دارد. ابتدا مثالی می‌آوریم:

۱-۱-۲ مثال. چون تابع مقصود نقشی در رابطه با تبه‌گنی ندارد در مثال زیر حذف گردیده است.

$$A = \left[a_1, a_2, a_3, a_4\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



شکل (۱-۱)

در این مثال $m = 3$. b را می‌توان به‌صورت **ترکیب خطی** a_1 و a_2 نوشت از این رو مسأله پرایمال تبه‌گن دارد. هر پایه‌ای که شامل a_1 و a_2 باشد، تبه‌گن خواهد بود. واضح است که مسأله تبه‌گن است اگر در یکی از صفحات مختصات قرار داشته باشد. یعنی b متعلق به یکی از زیر فضاهای:

$$L\{a_1\} \quad L\{a_2\} \quad L\{a_3\} \ldots \quad L\{a_3, a_4\}$$

باشد. مطلب را در حالت کلی با توجه به محتوای قضیه۱-۱-۱ چنین بیان می‌کنیم بیان قضیه‌ی ۱-۱-۱ این است که ۱-۱ کاملاً غیرتبه‌گن است اگر و فقط اگر b را نتوان به‌صورت ترکیب خطی مجموعه‌ای از ستون‌های A که تعداد اعضای آن‌ها کمتر یا مساوی $(m - 1)$ باشد، نوشت؛ یعنی اگر و فقط اگر b در هیچ یک از زیرفضاهای تولید شده به وسیله‌ی ستون های A که تعداد آن‌ها کمتر یا مساوی $m - 1$ باشد قرار نگیرد. به عبارت دیگر اگر b در هیچ‌یک

از زیرفضاهای:

$$L\{a_1\}, L\{a_2\}, \dots, L\{a_1, a_2\}$$
$$L\{a_1, a_2, a_3\}, \dots, L\{a_1, \dots, a_{m-1}\}, \dots\dots$$

قرار نگیرد. به بیان دیگر

$$b \notin L\{B\}$$

که در آن

$$\phi \neq B \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$$

و

$$\text{Card}\, B \leq m - 1$$

با توجه به این‌که تعداد این **زیر فضاها** برای $A = [a_{ij}]^{m\times n}$ مساوی حداکثر این زیرفضا برابر است با:

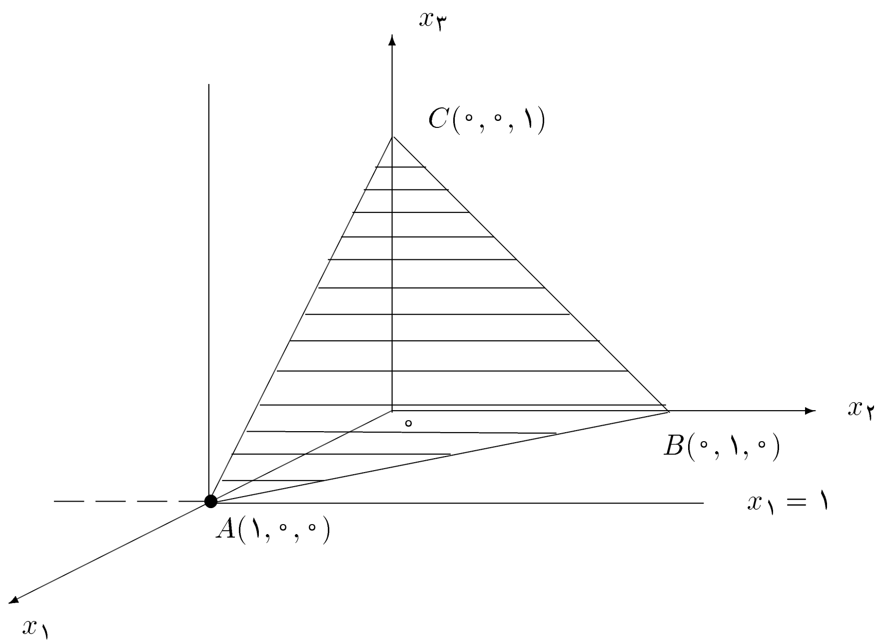
$$C_n^m . \sum_{r=1}^{m-1} C_n^r \qquad = k$$

پس احتمال این که b در یکی از این زیرفضا قرارگیرد $\frac{k}{\infty}$ صفر می‌باشد. پس به مفهوم **آماری** احتمال این که یک LP تبه‌گن باشد صفر می‌باشد، اما از نظر تئوری بحث تبه‌گنی جالب و موردنظر می‌باشد.

بحث فوق در رابطه با تبه‌گنی در حالتی بود که b از نظر برداری با بردارهای ستونی A چه وضعی داشته باشد. مسأله تبه‌گنی را از منظر دیگر نیز می‌توان مورد توجه قرار داد و آن عبارت است از بررسی نقاط رأسی ناحیه شدنی و وضعیت ابرصفحه‌های مار بر این نقاط. برای توضیح مطلب مثال زیر را درنظر بگیرید.

۱-۱-۳ مثال. فرض کنید ناحیه S یعنی **ناحیه شدنی** یک LP به وسیله قیود زیر تعریف شده باشد:

$$S = \{(x_۱, x_۲, x_۳) \mid x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱\ ,\ x_۱ = ۱\ ,\ x_j \geq ۰ \quad j = ۱, ۲, ۳\}$$



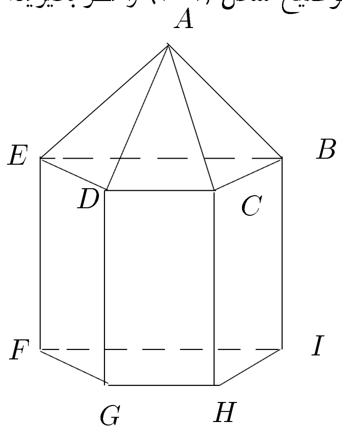
شکل (۱-۲)

نقطه $A(۱, ۰, ۰)$ از ناحیه شدنی که به وسیله هاشور مشخص گردیده است را درنظر بگیرید. از این نقطه چهار ابرصفحه به‌صورت:

$$\begin{array}{llll} x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & = ۱ \\ & x_۲ & & = ۰ \\ & & x_۳ & = ۰ \\ x_۱ & & & = ۱ \end{array}$$

می‌گذرند. به عبارت دیگر ۴ دسته ۳ تایی از ابرصفحه های مستقل خطی از این نقطه می‌گذرند (این ۴ دسته را مشخص نمائید). یعنی ۴ پایه متناظر نقطه A می‌باشد. و این بدان معنی است که نقطه رأسی $x^۰$ در مسأله LP تبه‌گن است اگر تعداد پایه‌های متناظر آن بیش از یکی باشد. (البته عکس مطلب همواره صادق نمی‌باشد این مطلب قبلاً توضیح داده شده است) در اینجا

دیده می‌شود که قید $x_{۱} = ۱$ زائد است. به عبارت قیدهای زائد باعث تبه‌گنی می‌گردند. ذیلاً بیان می‌کنیم که عکس مطلب همواره درست نمی‌باشد یعنی تبه‌گنی دلیل بر بودن قیدها در ناحیه شدنی نیست. برای توضیح شکل (۱-۳) را نظر بگیرید.



شکل (۳-۱)

در شکل (۳-۱) از نقطه رأسی A چهار ابرصفحه می‌گذرد. نقطه A تبه‌گن است ولی هیچ‌یک از **ابرصفحه**های مار بر این نقطه زائد نمی‌باشند.

بحث فوق بررسی نقاط رأسی تبه‌گن از نقطه‌نظر قیدهای زائد بود. از منظر دیگری نیز می‌توان مسأله‌ی تبه‌گنی را بررسی نمود، و آن عبارت است از امکان حرکت در جهت‌های رأسی شدنی مار بر نقطه رأسی موردنظر. برای توضیح مطلب جدول زیر را در نظر بگیرید:

	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	$x_{۵}$	$x_{۶}$	RHS
$x_{۱}$	۱	۰	۰	+۲	۲	۱	۵
$x_{۲}$	۰	۱	۰	۳	-۲	-۳	۰
$x_{۳}$	۰	۰	۱	۰	۴	-۱	۴

جدول فوق متناظر نقطه

$$x^{۰} = (۵, ۰, ۴, ۰, ۰, ۰)$$

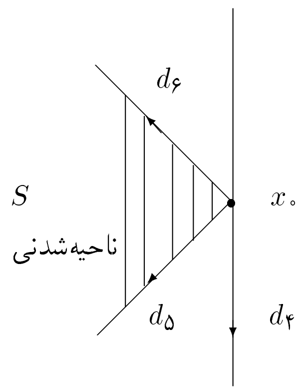
می‌باشد که یک نقطه رأسی تبه‌گن است.

$$d_j = \begin{pmatrix} -B^{-۱}a_j \\ e_j \end{pmatrix} \qquad j = ۴, ۵, ۶$$

جهت‌های رأسی می‌باشند. از این‌رو **جهت‌های راسی** d_5 و d_6، **جهت‌های رأسی شدنی** هستند. یعنی از نقطه x_0 در امتداد آن‌ها می‌توان با اندازه $\delta > 0$ حرکت کرد و در ناحیه شدنی باقی ماند. اما از نقطه x_0 در امتداد d_4 به هیچ عنوان نمی‌توان به‌صورتی حرکت کرد که در ناحیه شدنی باقی ماند و علت این امر نیز آن است که

$$\theta_4 = \min\left\{\frac{5}{2}, \frac{0}{3}\right\} = 0$$

می‌باشد. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم S به‌صورت زیر و x° نقطه رأسی متناظر جدول باشد، d_4 و d_5 و d_6 وضعیت هندسی به‌صورت شکل ۴-۱ دارند.



شکل (۱-۴)

شکل (۴-۱) نقطه‌ی x°، نقطه رأسی تبه‌گن است. حال که مسأله تبه‌گنی را از منظرهای مختلف بررسی نمودیم می‌خواهیم بدانیم وجود تبه‌گنی در LP می‌تواند باعث چه مشکلاتی گردد واین مشکلات را چگونه می‌توان برطرف نمود. قبل از این‌که مطلب فوق را بررسی کنیم ثابت می‌کنیم که الگاریتم سیمپلکس در حالت غیرتبه‌گنی **الگاریتم متقارب**می‌باشد.

یادآور می‌شویم که الگاریتمی متقارب است که در تعداد متناهی از مراحل مساله را حل نماید.[1]

۱) حل مساله ضرورتاً به‌معنی به‌دست آوردن جواب بهینه نیست؛ منظور از حل LP آن است که مشخص کند، مساله بهینه متناهی دارد یا نامحدود است یا نشدنی.

۱-۱-۴ قضیه. الگاریتم سیمپلکس، LP غیرتبه‌گن را در **تعداد متناهی** از مراحل؛ حل می‌کند. به عبارت دیگر اگر LP غیرتبه‌گن باشد. الگاریتم سیمپلکس متقارب است.

برهان. همان‌طوری‌که در کتاب اول گفته شد در هر مرحله از الگاریتم سیمپلکس تابع مقصود، صورتی به شکل زیر دارد:

$$z = z^{\circ} - \sum_{j \in R} (z_j - C_j) x_j$$

که در آن R اندیس متغیرهای غیراساسی می‌باشد. فرض کنیم اگر x_k متغیر واردشونده و مسأله غیرتبه‌گن باشد داریم:

$$z_{New} = z^{\circ} - (z_k - C_k)\theta_k > \circ$$

یا $z_{New} < z^{\circ}$.

اگر فرض کنیم از پایه $B_۱$، شروع نموده به پایه $B_۲$ رفته باشیم و ... که متناظر مقادیر $z_۱, z_۲, \ldots$ می‌باشند، پس داریم

$$z_۱ > z_۲ > \cdots > z_r > \cdots > z_h > \ldots$$

می‌باشند. این امر باعث می‌گردد که اگر الگاریتم از پایه B_h عبور کند دیگر به آن برنگردد، در غیراین‌صورت در مرحله‌ای مانند $r \neq h$ اگر به پایه B_h برگردد، از طرفی داریم

$$z_r = C_{B_h} B_h^{-۱} b = z_h$$

و از طرفی داریم

$$z_r < z_h$$

که طبق **اصل تثلیث قوی** این امر ممکن نیست. چون تعداد پایه‌های اساسی شدنی متنناهی است پس الگاریتم سیمپلکس در حالتی که مسأله غیرتبه‌گن باشد، در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید.

حال با یک مثال نشان می‌دهیم که در حالت تبه‌گنی الگاریتم ممکن است به‌دور بیفتد و هیچ‌گاه به پایان نرسد.

۱-۱-۵ مثال. مسأله زیر را درنظر بگیرید (این مسأله توسط استاد دکتر مارتین بیل[1] استاد فقید کالج **سلطنتی انگلستان** طراحی شد).

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Min}z = & & & & -\frac{3}{4}x_4 & +20x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & & = 1
\end{array}$$

جواب بهینه‌ی مسأله عبارت است از:

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad x_4 = x_6 = 1 \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0 \quad Z^* = -\frac{5}{4}$$

با بکار بردن قاعده‌ی **دانتزیگ** برای انتخاب متغیر واردشونده و قاعده می‌نیمم برای **متغیر خارج‌شونده** (در حالتی که **گره‌ای** اتفاق بیفتد به‌دلخواه می‌توان آن را شکست) جداول به‌صورت‌های زیر خواهد بود:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{3}{4}$	-۲۰	$\frac{1}{2}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\boxed{\frac{1}{4}}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۱۲	$-\frac{1}{2}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	-۳	۰	۰	۰	۴	$\frac{7}{2}$	-۳۳	۰
x_4	۰	۴	۰	۰	۱	-۳۲	-۴	۳۶	۰
x_2	۰	-۲	۱	۰	۰	$\boxed{4}$	$\frac{3}{2}$	-۱۵	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

[1] پروفسورMartin Beal استاد برجسته در دانشگاه لندن بود. او چهره ماندگار واز برجستگان علم O.R و از نوابغ جهان بود. حل مسأله درجه دوم ازکارهای مهم ایشان می‌باشد.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۲	-۱۸	۰
x_4	۰	-۱۲	۸	۰	۱	۰	$\boxed{۸}$	-۸۴	۰
x_5	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۱	$\frac{۳}{۸}$	$-\frac{۱۵}{۴}$	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۲	-۳	۰	$-\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۳	۰
x_6	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۸}$	۰	۱	$-\frac{۲۱}{۲}$	۰
x_5	۰	$\frac{۱}{۱۶}$	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$-\frac{۳}{۶۴}$	۱	۰	$\boxed{\frac{۳}{۱۶}}$	۰
x_3	۰	$\frac{۳}{۲}$	-۱	۱	$-\frac{۱}{۸}$	۰	۰	$\frac{۲۱}{۲}$	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۱	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۱۶	۰	۰	۰
x_6	۰	$\boxed{۲}$	-۶	۰	$-\frac{۵}{۲}$	۵۶	۱	۰	۰
x_7	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱۶}{۳}$	۰	۱	۰
x_3	۰	-۲	۶	۱	$\frac{۵}{۲}$	-۵۶	۰	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۲	۰	$\frac{۷}{۴}$	-۴۴	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰
x_1	۰	۱	-۳	۰	$-\frac{۵}{۴}$	۲۸	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰
x_7	۰	۰	$\boxed{\frac{۱}{۳}}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	-۴	$-\frac{۱}{۶}$	۱	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۴}$	-۲۰	$\frac{۱}{۲}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۱۲	$-\frac{۱}{۲}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

ملاحظه می‌گردد که جدول آخری همان جدول شروع می‌باشد، و تمامی جدول‌ها متناظر نقطه $x^\circ = (۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰)$ می‌باشند که فقط پایه‌های متفاوتی دارند. دنباله‌ی عملیات

محوری فوق‌الذکر به‌وسیله پایه‌های B_1، B_2،B_3 ، B_4، B_5،B_6 ، B_7 که در آن

$$B_7 = B_1 = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

تولید شده است. اگر عمل تکرار شود عملیات در این **حلقه دور می‌زند** بدون آن که به نتیجه‌ای برسد (به جواب بهینه برسد). ملاحظه می‌گردد که در حالت تبه‌گنی تضمینی بر تقارب الگاریتم سیمپلکس نمی‌باشد. و همان طوری که گفته شد، علت تبه‌گنی قرار گرفتن b در زیرفضاهای تولیدشده به‌وسیله مجموعه‌ای از ستون‌های A می‌باشد که **کاردینال** این مجموعه‌ها از $m-1$ کمتر یا مساوی می‌باشد.

رهائی از حالت تبه‌گنی خارج نمودن b از زیرفضاهای فوق‌الذکر می‌باشد. این عمل را آشوب نمودن[1] گویند؛ یعنی تکان دادن مختصری بردار b را از وضعیت کنونی خود به وضعیتی که از فضای موردنظر خارج شود. برای این منظور به‌جای b بردار زیر قرار داده می‌شود:

$$b(\varepsilon) = b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^t \tag{۱-۲}$$

که در آن ε عدد مثبت بسیار کوچکی است و $\varepsilon^r = \varepsilon \times \varepsilon \times \ldots \varepsilon$ یعنی توان rام ε.

۱-۱-۶ قضیه. برای هر بردار $b \in R^m$ وجود دارد. عدد مثبتی مانند $\varepsilon_1 > 0$، به‌طوری‌که وقتی $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$؛ مسأله **۱-۳** غیرتبه‌گن می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b(\varepsilon) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۱-۳}$$

برهان. فرض کنید $B_1, \ldots, B_L$ تمامی پایه‌های **۱-۳** باشند یکی از این پایه‌ها مثلاً B_r را درنظر بگیرید. چون B غیرمنفرد است پس $B_r^{-1} = [\beta_{ij}^r]$ و

$$(\beta_{i1}^r, \ldots, \beta_{im}^r) \neq 0 \qquad r = 1, \ldots, m$$

1) Perturbation

فرض کنید $\bar{b} = B_r^{-1} b$ پس:

$$B_r^{-1} b(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{b}_1^r + \beta_{11}^r \varepsilon + \cdots + \beta_{1m}^r \varepsilon^m \\ \bar{b}_2 + \beta_{21}^r \varepsilon + \cdots + \beta_{2m}^r \varepsilon^m \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{m1}^r \varepsilon + \cdots + \beta_{mm}^r \varepsilon^m \end{bmatrix}$$

برای هر i و r $(i = 1, \ldots, m)$ و $(r = 1, \ldots, L)$ **کثیرالجملهی**

$$\bar{b}_i^r + \beta_{i_1}^r \theta + \beta_{i_2}^r \theta^2 + \cdots + \beta_{im}^r \theta^m$$

یک کثیرالجملهی غیرصفر برحسب θ میباشد. از این رو حداکثر m ریشه دارد فرض کنید ریشههای کثیرالجملهی فوقالذکر عبارت باشند از:

$$\theta_{r,i,1}, \theta_{r,i,2}, \ldots, \theta_{r,i,k}$$

اگر ε مساوی هیچ یک از θهای فوق نباشد، آنگاه:

$$\bar{b}_i^r + \beta_{i_1}^r \varepsilon + \beta_{i_2}^r \varepsilon^2 + \cdots + \beta_{i_m}^r \varepsilon^m \neq 0$$

فرض کنید Γ مجموعهی تمامی ریشههای این m کثیرالجمله که برحسب θ هستند باشد. Γ یک مجموعهی متناهی است که $\operatorname{Card}(\Gamma) \leq Lm^2$ بنابراین این مجموعه دارای عضو ابتدا و عضو انتها میباشد و این امکان وجود دارد که عددی مانند $\varepsilon_1 > 0$ انتخاب گردد (چگونه؟ کاملاً توضیح دهید) که هیچیک از اعضای مجموعهی Γ متعلق به بازه $[0, \varepsilon_1]$ نباشد. با انتخاب $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$، واضح است که تمامی متغیرهای اساسی مسألهی ۱-۳ غیرصفر میباشند، از این رو مسألهی فوقالذکر غیرتبهگن خواهد بود. بحثهائی که از اول فصل تا بدینجا داشتیم راجع به تبهگنی مسألهی پرایمال (اولیه) بود.

۱-۲ غیرتبهگنی دوآل[1]

مسألهی ۱-۱ را کاملاً **دوآل غیرتبهگن** گویند (در رابطه با دوآلیتی در فصول آینده مفصل صحبت خواهیم نمود) اگر و فقط اگر برای هر $w \in R^m$ بردار سطری

$c - wA = [c_1 - wa_1, \ldots, c_n - wa_n]$ حداقل $n - m$ مولفه‌ی مخالف صفر داشته باشد؛ و این بدان معنی است که هر جواب $(w, \bar{c})$ از دستگاه $wA + \bar{c} = c$ (که در آن A و c داده‌ها و w و $\bar{c}$ متغیرها می‌باشند) حداقل $n - m$ از $\bar{c}_j$ها مخالف صفر باشند. در بحث این فصل، هر وقت صحبت از تبهگنی به میان آید، همواره نظر به **تبه‌گنی پرایمال** می‌باشد، مگر مطلب به‌طور صریح در رابطه با تبه‌گنی دوآل ذکر و یا از سیاق عبارت موضوع مشخص گردد.

۱-۳ پایه‌های مجاور[2]

فرض کنیم S مجموعه جواب‌های شدنی ۱-۱ باشد. هر پایه ۱-۱ یک ماتریس مربع غیرمنفرد از مرتبه‌ی m می‌باشد. دو پایه شدنی B_1 و B_2 را مجاور گوئیم، اگر بردارهای متناظر آن‌ها x_{B_1} و x_{B_2} شامل $m - 1$ متغیر اساسی مشترک باشند. بنابراین در مراحل الگاریتم سیمپلکس دو پایه به دست آمده در دو مرحله متوالی آن مجاور می‌باشند.

توجه داشته باشیم که ممکن است دو پایه متوالی متناظر یک نقطه‌ی رأسی باشند. نمونه این مطلب پایه‌های B_1، B_2، B_3، ...، B_5، B_6 بودند که B_i مجاور B_{i+1} بود $(i = 1, \ldots, 5)$ و همگی آن‌ها متناظر نقطه‌ی $x^\circ = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ بودند.

۱-۴ نقاط رأسی مجاورتی S[3]

هر نقطه‌ی رأسی S یک BFS می‌باشد که متناظر بعضی از پایه‌های شدنی می‌باشد. فرض کنیم $\tilde{x}$ و $\hat{x}$ دو نقطه‌ی رأسی متمایز از S باشند و فرض کنیم $\tilde{x}$ متناظر $\tilde{B}$ و $\hat{x}$ متناظر $\hat{B}$ باشد. نقاط رأسی $\hat{x}$ و $\tilde{x}$ را مجاور گوییم:

الف. $\hat{B}$ و $\tilde{B}$ پایه‌های مجاور باشند یا

ب. یک دنباله از پایه‌های مجاور شدنی مانند $\hat{B}, B_1, B_2, \ldots, B_r, B_{r+1}, \ldots, B_k$ و $\tilde{B}$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر زوج متوالی در این دنباله مجاور بوده و پایه‌های $\hat{B}, B_1, \ldots, B_r$ متناظر $\hat{x}$ و پایه‌های $B_{r+1} \ldots, B_t$ و $\tilde{B}$ متناظر $\tilde{x}$ باشند. این تعریف در

1) Dual Nondegenracy 2) Adjacent Bases 3) Adjacent Extrem Point

کتاب اول به‌صورت دیگری بیان گردید که استنباط خواص مشخصه جبری از آن ساده بود (فصل دوم کتاب اول صفحات ۱۵۶، ۱۵۷ و ۱۵۸) ثابت کنید در تعریف معادل هستند.

۱-۵ مسیرهای پایه‌های مجاورتی[1]

۱-۵-۷ قضیه. فرض کنید $\tilde{x}$ یک نقطه ی رأسی S و $\tilde{B}$ و $\hat{B}$ دو پایه‌ی متمایز برای ۱-۱ باشند؛ که هر دو متناظر BFS، $\tilde{x}$ هستند. دنباله‌ای از پایه‌ها مانند $\tilde{B}$ ، $B_1,\ldots,B_t$ و $\hat{B}$ وجود دارد که هر دو پایه متوالی در این دنباله مجاور هستند وتمامی پایه‌ها متناظر $\hat{x}$ می‌باشند.

برهان. فرض کنید

$$\tilde{B}=[a_1,\ldots,a_r,a_{r+1},\ldots,a_m]$$

اگر

$$\hat{B}=[a_1,\ldots,a_r,a_{j_1},\ldots,a_{j_k}] \qquad k+r=m$$

چون فرض بر این است که $\tilde{B}$ و $\hat{B}$ متمایز هستند؛ پس $r<m$ (چرا؟)

توجه کنید به‌صورت $\tilde{x}=(\tilde{x_1},\ldots,\tilde{x_r},0,\ldots,0)$ می‌باشد (چرا؟ علت را دقیقاً توضیح دهید و روی کاغذ بیاورید). البته نمایش فوق بدین معنی نیست که $\tilde{x_i}\neq 0$ به‌ازاء هر $i=1,\ldots,r$ (چرا؟)

a_{j_1} را انتخاب می‌کنیم. چون $[a_1,\ldots,a_r,\ldots,a_m]$ یک پایه می‌باشد پس:

$$a_{j_1}=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_ra_r+\alpha_{r+1}a_{r+1}+\cdots+\alpha_ma_m$$

در نمایش فوق هر $\alpha_j=0 \quad (j=r+1,\ldots,m)$ صفر نیست چه در این‌صورت

$$a_{j_1}=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_ra_r$$

خواهد بود (چه مشکلی در این‌صورت خواهیم داشت؟) و اگر در این‌جا نیز همه αها نمی‌توانند صفر باشند زیرا $a_{j_1}\neq 0$ پس jای هست که $r+1\leq j\leq m$ و $\alpha_j\neq 0$

1) Adjacent Basic Paths

به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌شود اگر فرض کنیم $\alpha_{r+1} \neq 0$ پس طبق قضیه‌ی ۱-۱-۴ $B_1 = [a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{j_1}, a_{r+2}, \ldots, a_m]$ یک پایه شدنی برای ۱-۱ است و مجاور $\tilde{B}$ می‌باشد. با ادامه روش $B_k, \ldots, B_r$ به‌دست می‌آید که هر دو پایه متوالی مجاور هستند وشدنی می‌باشند و همگی آن‌ها متناظر $\tilde{x}$ می‌باشند و حکم ثابت است.(در روش استدلال قدری تعمق کنید، بخصوص مسأله شدنی بودن پایه‌ها).

۱-۵-۸ قضیه. اگر $\tilde{B}$ و $\hat{B}$ یک زوج از پایه‌های شدنی باشند (برای مسأله ۱-۱) آن‌گاه دنباله‌ای از پایه‌ها مانند $\hat{B}, B_t, \ldots, B_1, \tilde{B}$ موجودند، به‌طوری‌که هر دو پایه متوالی مجاورند.

برهان. فرض کنیم $\tilde{x}$ و $\hat{x}$، BFSهای متناظر $\tilde{B}$ و $\hat{B}$ باشند. اگر $\tilde{x} = \hat{x}$، حکم از قضیه ۱-۵-۷ نتیجه می‌شود.

اگر $\hat{x} \neq \tilde{x}$ تابع $z(x) = \sum d_j x_j$

که در آن

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \hat{x_j} = 0 \\ 0 & \text{اگر } \hat{x_j} \neq 0 \end{cases}$$

چون $\hat{x}$ یک BFS؛ S می‌باشد. و این تنها جوابی است که $Z(\hat{x}) = 0$ (چرا؟) وبه‌ازاء هر $x \in S$ ، $Z(x) \geq 0$ و $Z(x) \neq 0$ از این رو $\hat{x}$ تنها جواب بهینه مسأله‌ی فوق‌الذکر می‌باشد.

با شروع از پایه $\tilde{B}$ و با به‌کار بردن الگاریتم سیمپلکس برای می‌نیمم نمودن $Z(x)$ در ناحیه‌ی S، الگاریتم پایه‌های مجاور را طی می‌نماید تا از $\tilde{B}$ به $\hat{B}$ برسد. با ملحوظ داشتن قضایای فوق‌الذکر و نتایج قبلی می‌توان در جمع‌بندی چنین بیان نمود. اگر ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد، در این صورت قاعده‌ی می‌نیمم همواره θ مثبتی را به‌دست می‌دهد. اگر $\tilde{x}$ یک BFS باشد در این حالت (غیرتبه‌گن) فقط یک پایه متناظر آن خواهد بود. از این رو درست $n-m$ **یال** S از نقطه‌ی $\hat{x}$ می‌گذرد.

هر چندوجهی که در هر نقطه رأسی تعداد یال‌های مار بر آن‌ها برابر با بعد آن باشد آن چندوجهی را چندوجهی محدب ساده[1] می‌گویند. ازاین‌رو اگر ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد، S یک

1) Simple Convex Polyhedron

چندوجهی محدب ساده خواهد بود. درحالتی‌که چندوجهی محدود باشد، آن را چند وجهی محدب محدود[1] می‌نامیم.

اگر ۱-۱ تبه‌گن باشد و اگر $\hat{x}$ غیرتبه‌گن ($\hat{x}$ نقطه رأسی S است) ممکن است درست $n-m$ یال S از آن بگذرد. به‌هرحال، اگر $\hat{x}$ یک BFS تبه‌گن باشد، چندین پایه متناظر آن خواهد بود هر کدام از این پایه‌ها منجر به وجود آمدن تعدادی از یال‌های S مار بر $\hat{x}$ خواهد شد.در این حالت برای به‌دست آوردن تمامی یال‌های S مار بر $\hat{x}$، بایستی تمامی پایه‌های متناظر $\hat{x}$ را به‌دست آورد و در هر جدول سیمپلکس متناظر برای تمامی θهائی که در قاعده‌ی می‌نیمم مثبت می‌باشند یال تولید نمود (این یال‌ها ممکن است محدود یا نامحدود باشند) و در این حالت تعداد نقاط رأسی مجاور، از یک نقطه رأسی به یک نقطه رأسی دیگر، متفاوت خواهد بود. در جمع‌بندی مطالب فوق‌الذکر قضیه ذیل را بیان می‌کنیم .

۱-۵-۹ قضیه. فرض کنید ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد و آن را با **روش سیمپلکس** حل می‌نمائیم (که از یک جواب اساسی شدنی شروع نموده ایم). مطالب زیر صادق است:

۱) مقدار θ در هر مرحله در **قاعده می‌نیمم مثبت** است.

۲) متغیر خارج‌شونده به‌طور **منحصر به فرد** مشخص می‌گردد.

۳) مقدار تابع مقصود در هر مرحله کاهش پیدا می‌کند.

۴) پایه‌ای ترک شده در یک مرحله، هیچ‌گاه در مراحل بعدی ظاهر نخواهد شد یعنی دور اتفاق نخواهد افتاد.

۵) الگاریتم در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید.

برهان.

۱) با توجه به این که مقدار تمامی متغیرهای اساسی مثبت می‌باشند، پس مقدار θ در هر مرحله سیمپلکس مثبت خواهد بود (در حالتی‌که $\bar{a_j} \leq ۰$، مقدار θ بی‌نهایت است)

1) Polytope

۲) فرض کنیم در یک مرحله از روش سیمپلکس:

$$\theta = \text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij} > \circ}\right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rj}} = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{sj}}$$

یعنی دو متغیر برای خارج شدن از پایه کاندیدا هستند. به سادگی دیده می‌شود که اگر این مطلب اتفاق بیفتد؛ در جدول بعدی تبه‌گنی داریم (چرا؟ اثبات نمائید) و این خلاف فرض غیرتبه‌گنی مسأله است.

۳) قبلاً اثبات شده است. ۴ و ۵ نیز قبلاً اثبات شده است.

۶-۱ مسأله‌ی آشوب شده

فرض کنید ۱-۱ تبه‌گن باشد. استراتژی کلی برای جلوگیری از به‌دور افتادن به‌صورت زیر می‌باشد. به‌جای b، $b(\varepsilon)$ را قرار می‌دهیم و یک مسأله‌ی آشوب شده به‌دست می‌آید، با توجه بدان‌چه گذشت می‌دانیم عددی مانند $\varepsilon_۱$ موجود است، به‌طوری‌که برای هر $\circ < \varepsilon < \varepsilon_۱$ ۱-۳ غیرتبه‌گن است. بنابراین برای تمامی εهای مثبت ولی بسیار کوچک ۱-۳ را می‌توان با به‌کار بردن روش سیمپلکس، بدون آن‌که به‌دور بیفتد حل نمود. تا زمانی که ε عدد بسیار کوچک ملحوظ گردد، ضرورتی ندارد که مقدار خاص برای آن قائل شویم فقط به همین امر بسنده می‌کنیم که ε عدد بسیار کوچک غیرارشمیدسی است که ممکن است در مراحل سیمپلکس مورد مقایسه قرار گیرد.

۷-۱ شدنی بودن

۱-۷-۱۰ قضیه. اگر B پایه شدنی برای ۱-۳ باشد (برای ε بسیار کوچک) آن‌گاه B پایه شدنی برای ۱-۱ نیز می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $B^{-۱} = [\beta_{ij}]$ و $\bar{b} = B^{-۱}b$ دراین‌صورت:

$$B^{-۱}b(\varepsilon) = (\bar{b}_۱+\beta_{۱۱}\varepsilon+\cdots+\beta_{۱m}\varepsilon^m, \ldots, \bar{b}_m+\beta_{m۱}\varepsilon+\beta_{m۲}\varepsilon^۲+\cdots+\beta_{mn}\varepsilon^m)$$

اگر برای هر عددی مانند i و $\bar{b}_i < 0$ آنگاه برای ε بسیار کوچک:

$$\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \beta_{i2}\varepsilon^2 + \cdots + \beta_{im}\varepsilon^m < 0$$

که در این با فرض شدنی بودن B برای ۱-۳ در تناقض می‌باشد. پس پایه شدنی برای ۱-۱ می‌باشد با الگاریتم سیمپلکس حل می‌گردد (با ملحوظ داشتن ε به اندازه کافی کوچک) پایه‌ای که در یک مرحله ظاهر می‌گردد، هرگز در مراحل بعدی تکرار نخواهد شد (در حالت غیرتبه‌گن). اگر ۱-۳ شدنی باشد، آن‌گاه پایه نهایی یا در شرط بهینگی صدق می‌کند یا معیار**نامحدود بودن** را دارد. این معیار، مستقل از بردار سمت راست می‌باشد. از این رو، پایه نهایی که برای ۱-۳

به‌دست می‌آید، یک پایه نهایی برای ۱-۱ نیز می‌باشد. جواب بهینه نهایی برای ۱-۱ به‌این‌صورت به‌دست می‌آید که در جواب بهینه متناظر ۱-۳ جمله‌ای شامل ε و توان‌های آن حذف گردد (در حقیقت به‌جای ε در جواب نهایی عدد صفر قرار داده شود).

تعریف. بردار $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ را **لکزیکو مثبت** گوییم، اگر $\gamma \neq 0$ و اولین مولفه‌ی مخالف صفر آن مثبت باشد. و به‌صورت $\gamma \succ 0$ نشان می‌دهیم. دو بردار $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ گوئیم $\xi \succ \eta$ اگر

$$\xi - \eta \succ 0$$

عیناً می‌توان **لکزیکو منفی** l را تعریف نمود. به عبارتی γ لکزیکومنفی است اگر $-\gamma$ لکزیکو مثبت باشد.

۱-۷-۱۱ لکزیکو می‌نیمم مجموعه‌ای از بردارها.

فرض کنیم $\gamma^\nu = (\gamma_1^\nu \dots, \gamma_m^\nu)$ $(\nu = 1, \dots, p)$ p بردار در R^m باشد. بردار γ^q لکزیکو می‌نیمم این بردارها گوییم در صورتی‌که:

$$\gamma^\nu - \gamma^q \succ 0 \qquad \nu 1, \dots, p \qquad \nu \neq q$$

عیناً بردار γ^s لکزیکو ماکزیمم بردارهای فوق‌الذکر است اگر

$$\gamma^s - \gamma^\nu \succ 0 \qquad \nu = 1, \dots, p \qquad \nu \neq s$$

برای پیدا نمودن لکزیکو می‌نیمم یک مجموعه از بردارها، ابتدا بردارهایی را پیدا می‌کنیم که مولفه‌ی اول آن‌ها می‌نیمم مؤلفه‌های اول بقیه بردارها باشد و بقیه‌ی بردارها که مولفه‌ی اول آن‌ها می‌نیمم نمی‌باشد از مجموعه حذف می‌کنیم. سراغ مؤلفه‌های دوم بردارهایی می‌رویم که مولفه‌ی اول آن‌ها می‌نیمم بوده و انتخاب شده، آن بردارها انتخاب می‌کنیم که مؤلفه دوم آن‌ها می‌نیمم و بقیه بردارهایی را که مؤلفه دوم آن‌ها می‌نیمم نیست از مجموعه‌ی انتخاب شده حذف می‌نماییم و همین روش را ادامه می‌دهیم، در هر مرحله که تنها یک بردار در مجموعه‌ی انتخاب شده باقی ماند متوقف می‌گردیم.

مثال مجموعه‌ی

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1), (-2, 1, -20, 30), (0, -10, -40, -50)\}$$

مرحله‌ی اول:

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1), (-2, 1, -20, 30)\}$$

مرحله‌ی دوم:

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1)\}$$

مرحله‌ی سوم:

$$\{(-2, 0, -1, 0)\}$$

پس بردار $(-2, 0, -1, 0)$ لکزیکو مینیمم مجموعه‌ی فوق است.

۱-۷-۱۲ B پایه شدنی برای ۱-۳ است اگر و تنها اگر برای ε بسیار کوچک دلخواه داشته باشیم، $(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \beta_{im}) \succ 0$ $(i = 1, \dots, m)$

برهان. چون B^{-1} غیرمنفرد است، واضح است که بردارهای:

$$(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im}) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

اگر ε مثبت بسیار کوچک باشد، علامت:

$$\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \beta_{i2}\varepsilon^2 + \cdots + \beta_{im}\varepsilon^m$$

همان علامت اولین جمله مخالف صفر می‌باشد. بنابراین، برای ε بسیار کوچک دلخواه $\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \cdots + \beta_{im}\varepsilon^m$ مثبت است، اگر و فقط اگر اولین جمله عبارت فوق یا اولین مولفه‌ی بردار $(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{im})$ مثبت باشد. با به‌کار بردن بحث فوق برای هر i، حکم قضیه برقرار می‌باشد.

قضیه‌ی فوق بررسی این‌که، ۱-۳ شدنی می‌باشد را بسیار ساده می‌نماید. در حقیقت، هیچ نیازی بدان نیست که مقدار خاص به ε داده شود. با در دست داشتن بردار سمت راست به‌روز شده و عکس پایه، بررسی این که پایه شدنی می‌باشد، برمی‌گردد به بررسی این‌که m بردار موردنظر لکزیکو مثبت می‌باشد یا نه، بدون این که آشوبی صورت گرفته باشد.

فرض کنیم $B^{-1} = [\beta_{ij}]$ که در آن B پایه ۱-۱ می‌باشد. B شدنی است(شدنی پرایمال) اگر $B^{-1}b \geq 0$. اگر $B^{-1}b > 0$ در این‌صورت گویند B لکزیکو شدنی است زیرا

$$(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im}) > 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

اگر چنین نباشد به‌صورت ذیل بحث را ادامه می‌دهیم:

یادآور می‌شویم که $(\bar{b}, I) = (\bar{b}, B^{-1})$ در شروع روش سیمپلکس به‌صورتی است که هر سطر $(\bar{b}_i, e_i^t) \succ 0$ $(i = 1, \dots, m)$ اگر جدول اولیه با یک پایه‌ی شدنی مانند B شروع گردد، مسأله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad z =& C_B x_B + C_N x_N \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

که از آن داریم $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ با قرار دادن آن در تابع مقصود مسأله‌ی زیر

به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 0 \;\; x_B + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N \\ &\qquad\qquad I x_B + \qquad\qquad B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ &\qquad\qquad x_B \, , \, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

یعنی همواره می‌توان فرض نمود که در جدول شروع هر سطر جدول $(B^{-1}b, B^{-1})$ لکزیکو مثبت می‌باشد. از این‌رو اگر B پایه شدنی برای ۱-۱ باشد، B پایه شدنی برای ۱-۳ می‌باشد. پس با انتخاب ε دلخواه ولی بسیار کوچک پایه شدنی برای ۱-۱ پایه‌شدنی برای ۱-۳ می‌باشد.

فرض کنیم $\text{Max}\{z_j - c_j > 0 \;\mid\; j \in R\} = z_k - c_k > 0$ یعنی متغیر x_k، متغیر واردشونده باشد. برای انتخاب متغیر خارج‌شونده در مسأله ۱-۳ قاعده می‌نیمم زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \ldots, \beta_{im}\varepsilon^m}{\bar{a}_{ik}} \;\mid\; \bar{a}_{ik} > 0\right\} \\ =&\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{\bar{a}_{ik}} \;\mid\; \bar{a}_{ik} > 0\right\} \end{aligned}$$

با توجه به این که ε عدد مثبت بسیار کوچک است، این می‌نیمم در همان اندیس i که متناظر لکزیکو می‌نیمم منحصر به‌فرد مجموعه‌ی بردارهای:

$$D = \{(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \ldots, \beta_{im})/\bar{a}_{ik} \;\mid\; a_{ik} > 0\}$$

به‌دست می‌آید. این می‌نیمم بدون درنظر گرفتن مقدار ε بردار متغیر خارج‌شونده را به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌نماید. برای انجام این می‌نیمم که مستقل از مقدار ε می‌باشد الگاریتمی به‌صورت زیر ارائه می‌گردد که در حقیقت یافتن **لکزیکو می‌نیمم بردار**، مجموعه‌ی D می‌باشد توجه کنید که مجموعه‌ی D از داده‌های اولیه بدون دخالت ε به‌دست آمده است.

قدم اول. مجموعه I_0 را به‌صورت زیر تشکیل دهید:

$$I_0 = \{r \;\mid\; \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \, , \, \bar{a}_{ik} > 0\}\}$$

اگر $\mathrm{Card}(I_0) = 1$ دراین‌صورت متغیر خارج‌شونده همان اندیس سطری و عضو منحصر به‌فرد I_0 می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$I_0 = \{r\}$$

دراین‌صورت x_{B_r} متغیر خارج‌شونده خواهد بود و به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌گردد. درغیراین‌صورت به قدم دوم می‌رویم:

قدم دوم. مجموعه‌ی I_1 را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$I_1 = \left\{ r \ \mid \ \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \underset{i \in I_0}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{\beta_{i1}}{\bar{a}_{ik}} \right\} \right\}$$

قدم کلی. مجموعه‌ی I_j را به‌صورت زیر تشکیل دهید:

$$I_j = \left\{ r \mid \frac{r_j}{\bar{a}_{rk}} = \underset{i \in I_{j-1}}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{i_j}{\bar{a}_{ik}} \right\} \right\}$$

در نهایت I_j $(j \leq m)$ **مجموعه‌ی منفرده** خواهد بود (یعنی مجموعه‌ای که فقط دارای یک عضو می‌باشد) چه در غیراین‌صورت مجموعه‌ی D حداقل دو عضو به‌صورت زیر خواهد داشت:

$$(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \ldots, \beta_{rm})/\bar{a}_{rk}$$

و

$$(\bar{b}_s, \beta_{s1}, \ldots, \beta_{sm})/\bar{a}_{sk}$$

که در آن‌ها

$$\frac{b_r}{\bar{a}_k} = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{sk}} \ , \ \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}} = \frac{\beta_{sj}}{\bar{a}_{sk}} \qquad j = 1, \ldots, m$$

پس:

$$\frac{\beta_{rj}}{\beta_{sj}} = \frac{\bar{a}_{rk}}{\bar{a}_{sk}} \qquad j = 1, \ldots, m$$

ازاین‌رو دو سطر $B^{-1} = [\beta_{ij}]$ متناسب می‌باشند. یعنی B^{-1} منفرد خواهد بود که این تناقض است. پس **بردار لکزیکو می‌نیمم** D بردار منحصربه‌فردی است و تعیین آن ملهم از قاعده می‌نیمم می‌باشد به‌طور منحصربه‌فرد متغیر خارج‌شونده را مشخص می‌نماید.

حال ثابت می‌کنیم که اگر بردار متغیر خارج‌شونده طبق قاعده فوق صورت گیرد، همواره پایه B جدول متناظر برای **۱-۳** شدنی باقی می‌ماند به‌عبارت دیگر اگر B پایه شدنی برای **۱-۳** قبل از عمل محوری باشد و $\hat{B}$ **پایه** پس از عمل محوری حاصل گردد سطرهای ماتریس که $[(\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1})]m(m+1)$ می‌باشد **لکزیکو مثبت** خواهد بود. برای این منظور دو جدول درنظر می‌گیریم. جدول اولی متناظر B قبل از عمل محوری و $\hat{B}$ متناظر جدول دوم پس از عمل محوری باشد و فرض می‌کنیم که m ستون اول (با صرف‌نظر نمودن از ستون متناظر Z) نمایش B^{-1} باشد. جدول اولیه که جدول قبل از عمل محوری است به‌صورت زیر می‌باشد.

جدول متناظر پایه B(جدول قبل از عمل محوری)

	z	x_1	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n	RHS
Z	1	$z_1 - c_1$	$\ldots$	$z_j - c_j$	$\ldots$	$z_m - c_m$	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$\ldots$	$z_k - c_k$	$\ldots$	$z_n - c_n$	$\bar{z}$
x_{B1}	0	β_{11}	$\ldots$	β_{1j}	$\ldots$	β_{1m}	$\bar{a}_{1m+1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{1k}$	$\ldots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
x_{B_i}	0	β_{i1}	$\ldots$	β_{ij}	$\ldots$	β_{im}	$\bar{a}_{i\,m+1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{ik}$	$\ldots$	$\bar{a}_{in}$	$\bar{b}_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
x_{Br}	0	β_{r1}	$\ldots$	β_{rj}	$\ldots$	β_{rm}	$\bar{a}_{r\,m+1}$	$\ldots$	$\boxed{\bar{a}_{rk}}$	$\ldots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
x_{B_m}	0	β_{m1}	$\ldots$	β_{mj}	$\ldots$	β_{mm}	$\bar{a}_{m\,m+1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{mk}$	$\ldots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

جدول متناظر $\bar{B}$ پس از عمل محوری

	z	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_m	$x_{m+1}\ x_k\ x_n$	RHS
z		$z_1 - c_1 - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$	$\dots$	$z_j - c_j - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$	$\dots$	$z_m - c_m - \frac{\beta_{im}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$	$\dots\ 0\ \dots$	$\bar{z} - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$
x_{B_1}	0	$\beta_{11} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\beta_{1j} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\beta_{1m} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$	0	$\bar{b}_1 - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
x_{B_i}	0	$\beta_{i1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$	$\dots$	$\beta_{ij} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$	$\dots$	$\beta_{im} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$	0	$\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
x_k	0	$\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}$	$\dots$	$\frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}$	$\dots$	$\frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}$	$\dots\ 1\ \dots$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
x_{B_m}	0	$\beta_{m1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$	$\dots$	$\beta_{mj} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mj}$	$\dots$	$\beta_{mn} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$	0	$\bar{b}_m - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$

در جداول فوق سطر iام از ماتریس $[\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1}]$ را درنظر بگیرید که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}, \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\right) \qquad i = r \qquad (a)$$

$$d_i = \left(\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}, \beta_{i_1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}, \dots, \beta_{im} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}\right) \qquad i \neq r \quad (b)$$

چون $(\bar{b}_r, \beta_{r_1}, \dots, \beta_{r_m}) > 0$ و $\bar{a}_{rk} > 0$ پس برای $i = r$ بردار سطری $[\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1}]$ ماتریس لکزیکو مثبت می‌باشد. اما در رابطه‌ی (b) داریم :

$$(\bar{b}_i, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{im}) - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) = d_i \qquad (c)$$

دو حالت درنظر می‌گیریم:

الف. $i \notin I_0$ در این‌حالت اگر $\bar{a}_{ik} \leq 0$ پس $d_i > 0$ (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید.)

اگر $\bar{a}_{ik} > 0$. چون $i \notin I_0$ طبق تعریف:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} < \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$$

از این‌رو $b_i - (\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}})\bar{a}_{ik} > 0$ که در این‌صورت نیز $d_i > 0$.

ب. $i \in I_\circ$ و در این‌صورت $\bar{a}_{ik} > \circ$ و $\bar{b}_i - (\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}})\bar{a}_{ik} = \circ$ که در این حالت نیز دو صورت مجزا اتفاق می‌افتد $i \in I_۱$ یا $i \notin I_۱$ اگر $i \notin I_۱$ ، طبق تعریف $I_۱$، $\circ < d$ یعنی $\beta_{i_۱} - (\frac{\beta_{r۱}}{\bar{a}_{rk}}).\bar{a_{ik}} > \circ$.

اگر $i \in I_۱$ داریم:

$$\beta_{i۱} - \frac{\beta_{r۱}}{\bar{a}_{rk}}.\bar{a}_{ik} = \circ$$

حال $i \in I_۲$ یا $i \notin I_۲$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این روند ادامه پیدا می‌کند و حداکثر در $m + ۱$ قدم به این نتیجه می‌رسیم که سطرهای ماتریس:

$$[\hat{B}^{-۱}b, \hat{B}^{-۱}]$$

لکزیکو مثبت می‌باشد.

نتیجه جدول سیمپلکس با یک پایه‌ی شدنی B برای ۱-۱ شروع می‌گردد اگر ε به اندازه کافی کوچک انتخاب گردد B برای مسأله ۱-۱ نیز یک پایه‌ی شدنی خواهد بود، مشروط بر این‌که انتخاب متغیر خارج‌شونده طبق قدم‌هائی باشد که در تشکیل مجموعه‌های $I_\circ, I_۱, \dots$ صورت گرفت. به‌عبارت دیگر اندیس متغیر خارج‌شونده اندیس بردار لکزیکو می‌نیمم در مجموعه‌ی D باشد که به‌طور منحصر به دست می‌آید. (مطلب فوق بسیار مهم است درک عمیق آن اکیداً توصیه می‌گردد).

۱-۸ تغییر در مقدار تابع مقصود

فرض کنیم B یک پایه شدنی برای ۱-۳ برای مقدار بسیار کوچک و دلخواه ε باشد و $B^{-۱} = [\beta_{ij}]$. قرار می‌دهیم $\bar{b} = B^{-۱}b$ و c_B ضریب متغیرهای اساسی در جدول موردنظر باشد. اگر $w = c_B B^{-۱}$ و $\bar{z} = c_B\bar{b}$ ، BFS ۱-۳ متناظر پایه‌ی B و مقدار تابع مقصود $z_\circ$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x_B = \begin{bmatrix} \bar{b} + \beta_{۱۱}\varepsilon + \cdots + \beta_{۱m}\varepsilon^m \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{m۱}\varepsilon + \cdots + \beta_{mm}\varepsilon^m \end{bmatrix} \quad \text{بردار اساسی}$$

$$x_N = 0 \quad \text{بردار متغیرهای غیراساسی}$$

و

$$\bar{z}_0 = \bar{z} + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots + \varepsilon^m w_m \qquad (*)$$

فرض کنید متغیر x_k واردشونده باشد که سود نسبی آن $\bar{c}_k$ $(\bar{c}_k = c_k - z_k)$ و فرض کنیم متغیر خارج شونده x_r درنظر گرفته شود در اینصورت:

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{z}_0 + \bar{c}_k(\bar{b}_r + \varepsilon\beta_{r1} + \cdots + \varepsilon^m\beta_{rm})/\bar{a}_{rk} \\ &= z_0 + \bar{c}_k.\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} + (\varepsilon\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}} + \cdots + \varepsilon^m\frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}) \end{aligned}$$

بهجای $\bar{z}_0$ از $(*)$ مقدار قرار میدهیم، داریم :

$$z_1 = \left(\bar{z} + \bar{c}_k\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\right) + \sum_{i=1}^{m}\varepsilon^t\left(w_t + \bar{c}_k\frac{\beta_{rt}}{\bar{a}_{rk}}\right)$$

بردار $(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \ldots, \beta_{rm}) > 0$ (چرا؟) و ε عددی بسیار کوچک و مثبت است پس $\bar{c}_k(\bar{b}_r + \varepsilon\beta_{r1} + \cdots + \varepsilon^m\beta_r)/\bar{a}_{rk} < 0$ زیرا $\bar{c}_k < 0$ یعنی $z < \bar{z}_0$.

به عبارت دیگر در مسأله ۱-۳ تابع اکیداً برای پایههای متوالی نزولی میباشد یعنی پایهی واردشونده در یک مرحله در هیچیک از مراحل بعدی تکرار نخواهد شد و چون تعداد پایههای مسأله متناهی الگاریتم سیمپلکس در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل مینماید.

حال به روش دیگری **همگرایی الگاریتم سیمپلکس** را با بهکار بردن روش فوقالذکر برای مسائل تبهگن اثبات مینماییم. بردار

$$(c_B B^{-1}b, c_B B^{-1}a_1 - c_1, \ldots, c_B B^{-1}a_m - c_m)$$

را درنظر بگیرید با توجه به اینکه مسأله از صورت کانونی استاندارد شروع میگردد

$$(j = 1, \ldots, m) \qquad C_B B^{-1}e_j - 0 = C_B B^{-1}a_j - c_j$$

پس سطر سود نسبی در مرحله بهصورت $(C_B B^{-1}b, C_B B^{-1}I)$ برای $m + 1$ ستون اول خواهد بود.

ثابت می‌کنیم این بردار لکزیکو نزولی می‌باشد. برای این منظور، درنظر بگیرید:

$$\underbrace{(C_B B^{-1}b, C_B B^{-1})}_{\text{قبل از عمل محوری}} - \underbrace{(C_{\hat{B}}\hat{B}^{-1}b - C_{\hat{B}}\hat{B}^{-1})}_{\text{بعد از عمل محوری}}$$

$$= \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}}(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \ldots, \beta_{rm}) > 0 \qquad \text{(چرا؟)} \qquad (*)$$

از این مطلب برای تقارب الگاریتم استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم الگاریتم سیمپلکس از پایه‌ای مانند B_1 شروع می‌کند به B_2 می‌رود و در دنباله‌ای مانند $B_1 = B_t, \ldots, B_2, B_1$ به دور می‌افتد (با به‌کار بردن قاعده‌ی فوق‌الذکر) پس طبق رابطه $(*)$ داریم:

$$(C_{B_j}B_j^{-1}b, C_{B_j}B_j^{-1}) - (C_{B_{j+1}}B_{j+1}^{-1}b, c_{B_{j+1}}B_{j+1}^{-1}) > 0$$

برای $j = 1, \ldots, t-1$. یعنی:

$$(C_{B_1}B_1^{-1}b, C_{B_1}B_1^{-1}) - (C_{B_2}B_2^{-1}b, C_{B_2}B_2^{-1}) > 0$$

$$(C_{B_2}B_2^{-1}b, C_{B_2}B_2^{-1}) - (C_{B_3}B_3^{-1}b, C_{B_3}B_3^{-1}) > 0$$

$$\vdots$$

$$(C_{B_{t-1}}B_{t-1}^{-1}b, C_{B_{t-1}}B_{t-1}^{-1}) - (C_{B_t}B_t^{-1}b, C_{B_t}B_t^{-1}) > 0$$

با توجه به این که $B_t = B_1$ با جمع نمودن داریم :

$$(C_{B_1}B_1^{-1}b, C_{B_1}B_1^{-1}) - (C_{B_1}B^{-1}b, C_B B^{-1}) > 0$$

که تناقض است. پس الگاریتم به‌دور نمی‌افتد و چون تعداد پایه‌ها متناهی است پس الگاریتم مسأله را در تعداد متناهی از مراحل حل می‌نماید. آن‌چه که در بالاگذشت به‌طور خلاصه ذیلاً آورده شده است.

۱) یک پایه مانند B برای ۱-۳ شدنی است، اگر و فقط اگر سطرهای ماتریس $[B^{-1}b, B^{-1}]$ لکزیکو ماکزیمم مثبت باشد، یعنی B لکزیکو شدنی باشد.

۲) الگاریتم از یک پایه لکزیکو شدنی شروع می‌نماید و همان‌طوری‌که به تفصیل اثبات شد، تمامی پایه‌های به‌دست آمده با به‌کار بردن قاعده‌ی موردنظر لکزیکو شدنی خواهند بود.

۳) معیار ختم الگاریتم و انتخاب ستون واردشونده همان است که در الگاریتم معمولی ذکر گردید. یعنی x_k واردشونده است اگر:

$$z_k - c_k = \mathrm{Max}\{z_j - c_j > 0 \mid j \in R \text{ اندیس متغیرهای غیراساسی است } R\}$$

و مسأله وقتی ختم می‌گردد که به‌ازاء هر j، $(z_j - c_j) \geq 0$.

۴) با انتخاب ستون واردشونده، و با به‌کار بردن قاعده فوق‌الذکر متغیر واردشونده به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌گردد. این قاعده معروف به لکزیکو می‌نیمم [1] می‌باشد.

۵) بردار $(\bar{z}, w_1, \ldots, w_m)$ از محوری به‌صورت لکزیکو اکید نزول نماید. از این‌رو پایه ظاهر شده در یک مرحله در هیچ مرحله‌ی دیگر تکرار نمی‌گردد.

۶) وقتی الگاریتم سیمپلکس با به‌کار بردن این قاعده، ختم می‌گردد، جدول نهایی برای هر مقدار ε بسیار کوچک دلخواه از جمله $\varepsilon = 0$، جدول نهایی ۱-۳ خواهد بود.

۷) پایه‌ی نهایی برای ۱-۳ که با به‌کار بردن الگاریتم سیمپلکس با اعمال قاعده فوق به‌دست می‌آید، برای ۱-۱ نیز جدول نهایی است.

الگاریتم بالا که برای جلوگیری از به‌دور افتادن الگاریتم سیمپلکس در حل مسائل تبه‌گن ذکر شد، به قاعده‌ی لکزیکو معروف است یعنی اگر قاعده‌ی لکزیکو را در انتخاب متغیر خارج‌شونده به‌کار ببریم، الگاریتم سیمپلکس در حل مسأله تبه‌گن به‌دور نمی‌افتد. قاعده‌ی دیگر نیز برای جلوگیری از به دور افتادن ابداع شده است که به قاعده بلند معروف است که در جزئیات، ذیلاً این قاعده را نیز ذکر خواهیم نمود.

۱-۹ قاعده بلند[1]

در حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به وسیله‌ی الگاریتم سیمپلکس وقتی مسأله تبه‌گن نیست، تابع مقصود در هر مرحله اکیداً نزول می‌نماید. این امر مستلزم آن خواهد بود که هیچ، پایه‌ای

1) Lexico Minimum Ratio Rule

در خلال به‌کار بردن الگاریتم فوق‌الذکر تکرار نگردد و تقارب الگاریتم را تضمین می‌نماید. از طرفی دیگر، به‌کاربردن قاعده لکزیکو، را از متقارب بودن الگاریتم مطمئن می‌نماید، به‌این‌صورت که نشان می‌دهد، در حالی‌که $C_B B^{-1}$ در حالت تبه‌گنی ممکن است ثابت بماند ولی بردار $(c_B B^{-1}b, c_B B^{-1})$ به‌طور یکنواخت لکزیکو نزولی است. قاعده‌ی بلند بسیار ساده می‌باشد. در این قاعده ابتدا متغیرها به‌صورتی مرتب میگردند، مثلاً به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ سپس از بین متغیرهای غیراساسی آن متغیر، برای وارد شدن انتخاب می‌شود که $z_j - c_j > 0$ و j **کوچک‌ترین اندیس** متغیری است که دارای این خاصیت می‌باشد، عیناً از بین تمامی متغیرهائی که می‌توانند پایه را ترک کنند آن متغیری انتخاب می‌گردد که دارای کوچکترین اندیس باشد. برای توضیح جدول زیر را در نظر بگیرید.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{3}{4}$	-۲۰	$\frac{1}{2}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{4}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۱۲	$-\frac{1}{2}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

در این جدول x_4 و x_6 هر دو می‌توانند وارد شوند x_4 به عنوان متغیر واردشونده انتخاب می‌گردد. x_1 و x_2 هر دو متغیرهایی هستند که می‌توانند از پایه خارج شوند، x_1 به عنوان متغیر خارج‌شونده انتخاب می‌گردد. به‌عهده‌ی خواننده است که بررسی نماید، اگر قاعده‌ی فوق به‌کار رود مسأله به‌دور نمی‌افتد(مسأله پرفسور بل می‌باشد که قبلاً ذکر شد).

قاعده بلند سیمای یکنواختی زیر را دارد. در یک رشته از عملیات محوری تبه‌گن،اگر متغیری مانند x_q وارد پایه شود، آنگاه، x_q نمی‌تواند پایه را ترک کند مگر متغیر دیگری با اندیس بالاتر از q که زمان وارد شدن q به پایه، متغیر غیراساسی بود وارد پایه گردد. اگر این مطلب اتفاق بیفتد، دور هرگز اتفاق نمی‌افتد. زیرا در یک دور هر متغیری که وارد شود بایستی خارج گردد و این بدان معنی است که با وجود یک متغیر با بالاترین اندیس که هم وارد می‌گردد و هم پایه را ترک می‌کند و این تناقض با سیما یکنوایی بالا دارد. (چرا؟)

1) Blande's Rule

برای نشان دادن این‌که‌این **سیمای یکنوایی** برقرار است، درنظر بگیرید متغیری مانند x_q که وارد پایه می‌گردد. فرض کنید J_1 و J_2 مجموعه‌های اندیس‌های متغیرهایی باشند که اندیس آن‌ها به‌ترتیب از q کمتر و از q بیشتر می‌باشند هر مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت استاندارد کانونی چنین می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j\in J_1} \bar{c}_j x_j + c_q x_q + \sum_{j\in J_2} \bar{c}_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}x_N + x_B = \bar{b} \\ & x_N, x_B \geq 0 \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

که در آن x_B متغیرهای اساسی و x_N متغیرهای غیراساسی می‌باشند و $\bar{c}_j = c_j - z_j$ به‌ازاء هر j. توجه کنید چون x_q طبق **قاعده‌ی بلند** وارد پایه می‌گردد، داریم $\bar{c}_q < 0$ و به‌ازاء هر $j \in J_1$، $\bar{c}_j \geq 0$.

حال فرض کنیم به خلف، که دنباله‌ای از عملیات محوری تبهگن صورت گرفته که در آن x_j، $j \in J_2$، غیراساسی باقی‌مانده است و به یک عمل محوری رسیده‌ایم که در آن متغیری مانند x_p وارد پایه می‌گردد و متغیر x_q از پایه خارج می‌گردد. فرض کنید ۱-۴ صورت اولیه و اصلی مسأله می‌باشد یعنی ستون‌های متغیرها را a_j و پایه‌ها و ضرائب قیمت را نسبت به این نمایش تعریف می‌کنیم. فرض کنید B_1 پایه‌ای باشد که x_p متغیر واردشونده و x_q متغیر خارج‌شونده است(توجه کنید که عملیات محوری، عملیات محوری تبهگن می‌باشند، یعنی θ در قاعده می‌نیمم صفر است) و $\bar{c}_{B_1}$ بردار ضرائب متغیرهای اساسی می‌باشد. از این‌رو $\bar{C}_{B_1}B_1^{-1}a_p - \bar{c}_p$ چون x_p متغیر وارد شونده است. چون $\bar{c}_p \geq 0$ زیرا متغیری که وارد می‌شود فرض شده است از J_1 باشد یعنی اندیس آن‌ها از qکمتر است و $\bar{c}_q$ اولین وکوچک‌ترین اندیسی است که $\bar{c}_q < 0$ و تمامی متغیرها با اندیس کمتر از q دارای $\bar{c}_j \geq 0$ می‌باشد پس $\bar{C}_{B_1}B_1^{-1}a_p > 0$ فرض کنید $\bar{a}_p = B_1^{-1}a_p$ در این‌صورت:

$$(\bar{c}_{B_1}, \bar{c}_{B_2}, \ldots, \bar{c}_{B_m}) \begin{pmatrix} \bar{a}_{1p} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mp} \end{pmatrix} > 0$$

توجه کنید که $\bar{a}_{pq} > 0$ (زیرا عضو محوری است و $\bar{c}_q < 0$) و داریم

$$\bar{C}_{B_1}^{1}\bar{a}_{1p} + \cdots + \bar{C}_q\bar{a}_{pq} + \ldots \bar{C}_{B_m}\bar{a}_{mp} > 0 \qquad (*)$$

در سمت چپ نامساوی فوق $\bar{c}_q\bar{a}_{pq} < 0$ پس بایستی جمله‌ای در آن مانند:

$$C_{B_r}\bar{a}_{rp} > 0$$

و $\bar{C}_{B_r} > 0$.

توجه کنید متغیرهای اساسی در جدول مورد نظر، دو دسته می‌باشند. دسته‌ی اول، آن‌هایی هستند که در خلال عملیات محوری تبه‌گن وارد شدند که $\bar{c}_j$ متناظر آن‌ها نامنفی بوده و دسته‌ی دوم آن‌هائی بودند که در پایه بودند و $\bar{c}_j$ متناظر آن‌ها صفر بود. پس $\bar{C}_{Br} \neq 0$ بایستی مثبت باشد (هیچ متغیری با اندیس کمتر q، $\bar{c}_j$ منفی ندارد و اندیس x_{Br} از q کمتر است) پس $\bar{a}_{rp} > 0$ و جدول به‌صورت زیر می‌باشد:

	x_p	RHS
		$\bar{b}_{i_1}$
x_{Br}	$\bar{a}_{rp}$	0
$\vdots$		$\vdots$
x_q	$\bar{a}_{qp}$	0
		$\vdots$
		$\bar{b}_{r_m}$

با توجه به این که $\mathrm{Min}\left\{\frac{0}{\bar{a}_{rp}}, \frac{0}{\bar{a}_{qp}}, \ldots\right\} = \theta = 0$ پس بایستی طبق قاعده‌ی بلند، X_{Br} خارج می‌شد و این تناقض است و برهان تمام است.

۱-۱۰ نکاتی چند در رابطه با بکارگیری قواعد فوق

اگر چه بیشتر مسائل از واقعیات زندگی که به‌صورت LP فرموله می‌گردند، تبه‌گن می‌باشند، و قواعد فوق‌الذکر، یعنی قاعده لکزیکو و قاعده‌ی بلند را می‌توان جهت جلوگیری از به‌دور افتادن در رابطه با آن‌ها به‌کار گرفت، ولی دراغلب کدهای کامپیوتری تجاری که جهت حل

مسائل برنامه‌ریزی خطی نوشته شده‌اند (منظور کدهای کامپیوتری برای به‌کار بردن الگاریتم سیمپلکس می‌باشد) اعمال قواعد فوق‌الذکر در این کدها ملحوظ نگردیده‌اند. دو دلیل اصلی برای این کار وجود دارد. دلیل اول آن است که به‌کارگیری آن‌ها یا از نظر محاسباتی گران می‌باشد، مانند قاعده لکزیکو، یا از نظر محاسباتی کارآیی پایین دارد،از نظر مسیر سیمپلکسی که تولید می‌گردد، مانند قاعده بلند. دلیل دوم بخاطر گرد نمودن اعداد درکامپیوترهای ارقامی می‌باشد. بحث بدین‌صورت است که مقادیر سمت راست به‌روز شده، از مقدار واقعی آن‌ها در اثر گرد شدن دور گردیده و این مطلب خود به خود یک نوع آشوب نمودن می‌باشد (یعنی در حقیقت به‌طور ضمنی به‌کار بردن قاعده‌ی لکزیکو). ازاین‌رو مشکل جدی محاسباتی در رابطه با مسائل حقیقی زندگی نیز این امر را تائید می‌نماید. ذکر این نکته ضروری است؛ در مسائل برنامه‌ریزی خطی که ساختار شبکه‌ای دارند (این مطلب در رابطه **مسائل حمل ونقل** و ... مطالعه خواهد شد). هیچ‌یک از مسائل فوق‌الذکر در رابطه با به‌کارگیری الگاریتم سیمپلکس دست‌کاری شده[1] برای حل آن‌ها وجود ندارد و به‌کارگیری قواعد فوق‌الذکر جهت جلوگیری از به‌دور افتادن می‌تواند مثمر ثمر نیز واقع گردد.

مطلب دیگری که در این جا لازم به ذکر آن می‌باشد، مسأله‌ی **گیر کردن**[2] است. اگر چه قواعد فوق‌الذکر را می‌توان جهت جلوگیری از به‌دور افتادن به‌کار برد، این موضوع کاملاً امکان دارد که الگاریتم سیمپلکس در یک نقطه رأسی تبهگن یک دنباله طولانی (اگر چه **متناهی**)از عملیات محوری را انجام دهد؛ که این امر در رابطه با مسائلی که دارای ساختار خاصی هستند، تعداد عملیات محوری تبهگن برحسب m و n به‌صورت نمایی می‌باشند. این پدیده را، **گیر کردن** می‌نامیم. لغت گیرکردن از این جهت به‌کار گرفته می‌شود که وقتی اندازه مسأله بزرگ شود،الگاریتم وقت بسیار زیادی (اگرچه متناهی) صرف می‌کند تا از این نقطه رأسی تبهگن خارج شود. علاوه بر به‌کار بردن قواعد جلوگیری از به‌دور افتادن، مسأله چاره اندیشی در رابطه با**گیر کردن** نیز از دیدگاه تئوریسین‌های این علم مورد توجه می‌باشد. این افراد علاقه مند به به‌کارگیری روشی در رابطه با رفع این مشکل می‌باشند که تعداد عملیات محوری تبهگن صورت گرفته از بالا به وسیله‌ی کثیرالجمله‌ای محدود گردد (کثیر الجمله‌ای برحسب m و n.)

1) Modified Simplex 2) Modified Simplex

اساس جلوگیری از پدیده **گیر کردن**، در مسأله‌ی به‌نام مرحله [1] حل می‌گردد.

مرحله عبارت است از دنباله‌ای از عملیات **محوری تبه‌گن** که در آن هر متغیر غیراساسی که قابل وارد شدن باشد وارد می‌گردد تا الگاریتم از آن نقطه رأسی تبه‌گن خارج شود و هیچ زیردنباله محض آن این خاصیت را ندارد.

طراحان الگاریتم و چاره اندیشان رفع مشکل گیرکردن علاقه‌مند هستند که هم تعداد عملیات محوری تبه‌گن در یک مرحله (که آن را طول مرحله می‌نامند) و هم تعداد مراحل در عملیات محوری تبه‌گن کوچک گردد، یعنی به وسیله‌ی کثیرالجمله‌ای محدود شود. اولین شرط از دو شرط فوق‌الذکر که عبارت است از کوتاه نمودن طول مرحله به‌راحتی صورت می‌گیرد. در این رابطه روش‌های خاصی به‌کارگرفته شده که یکی از آن‌ها LRC[2] می‌باشد، که LRC به‌شرح زیر می‌باشد:

فرض کنید یک لیست دوری [3] از متغیرها داریم به‌صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$. اگر در مرحله‌ای از عملیات محوری، x_k واردشونده باشد متغیر بعدی که می‌خواهد وارد شود (یعنی $z_j - g > 0$) اولین متغیر لیست

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n\}$$

خواهد بود (که در آن $x_{n+1} \equiv x_1$). واضح است که بدین‌صورت طول مرحله از n بیشتر نخواهد شد، زیرا هر متغیری که می‌توانسته وارد شود در طول مرحله در عملیات محوری تبه‌گن وارد شده است. با توجه به طبیعت این روش یک خط‌مشی عملی مثبت می‌باشد. زیرا در هر عملیات محوری یک قدم جلو می‌رویم. توجه داشته باشید که روش بلند یک خط‌مشی عملی مثبت نمی‌باشد (در این مورد مثال‌هایی ارائه شده که علاقه‌مندان می‌توانند به منابع آخر کتاب مراجعه نمایند). این مسأله که آیا روش لکزیکو به همراه روش دانتزیگ در انتخاب متغیر واردشونده با مثبت‌ترین $z_j - c_j$ از گیر نمودن جلوگیری می‌نماید یا نه، کاری نمی‌تواند بکند. این مطلب ثابت شده است که برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با ساختار شبکه‌ای این روش از گیرکردن جلوگیری می‌نماید.

1) Stage 2) Last Recently Conidered 3) Circular

مسأله‌ی پیدا نمودن روشی جهت کران‌دار نمودن تعداد مراحل به‌صورت کثیرالجمله کاری است بس مشکل. برای مسائل برنامه‌ریزی خطی در حالت کلی تا کنون چنین روشی ابداع نشده است به‌هرحال در فصول بعدی برای مسائل با ساختار شبکه‌ای یک روش لکزیکو قابل اجرا با نتایج بسیار خوب موجود است، که اگر به همراه یک خط مشی عملی مثبت به‌کارگرفته شود، نتیجه بسیار خوبی ارائه می‌دهد.

۱-۱۱ قیود زاید

با توجه به اهمیت تشخیص قید زاید که در اکثر موارد باعث تبهگنی می‌گردد؛ در پایان این فصل، این مطلب را به دقت و با عمق بیشتری مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توجه به مفاد این روش از ضروریات می‌باشد و درک عمیق آن توصیه می‌گردد.

۱-۱۱-۱۳ قیود تساوی زاید.[1] مسأله‌ی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx + ty \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Dy = b \\ & Gx + Fy \geq h \\ & x \geq 0 \\ & y \ \text{آزاد} \end{aligned} \tag{۱-۵}$$

یک قید تساوی در ۱-۵ را یک قید تساوی زاید گویند، اگر بتوان آن را به‌صورت ترکیب خطی از بقیه‌ی قیود تساوی نوشت.

1) Redundant Equality Constraints

۱-۱۱-۱۴ مثال. در قیود زیر:

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ - ۲x_۳ - ۴x_۴ = ۱۵$$
$$۳x_۱ + ۵x_۲ - x_۳ - ۳x_۴ = ۲۵$$

یک قید زاید می‌باشد (کدامیک؟)

در حالت کلی به سادگی دیده می‌شود که هر تغییر در مقادیر ثابت سمت راست قیود تساوی زاید دستگاه را ناسازگار می‌نماید. مثلاً در مثال فوق تغییر هر یک از اعداد سمت راست باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد (چرا؟)

۱-۱۱-۱۵ قیود زاید نامساوی.[1] یک قید در ۱-۵ ، قید نامساوی زاید است، اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی دستگاه با حذف آن تغییر نکند. در ۱-۵ فرض کنید A، دارای $m_۱$ سطر و G دارای $m_۲$ سطر باشند. قیدهای ۱-۵ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$a^i x + d^i y = b_i \qquad i = ۱, \ldots, m_۱$$
$$g^i x + f^i y \geq h_i \qquad i = ۱, \ldots, m_۲$$

که در آن a^i سطر iام A، d^i سطر iام D، g^i سطر iام G و f^i سطر iام F می‌باشند.

یکی از قیود نامساوی مثلاً قید $g'x + f'y \geq h_i$ را درنظر می‌گیریم. (هر یک از قیدهای نامساوی را برای این منظور می‌توان درنظر گرفت)

1) Redundant Inequality Constraints

مسأله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & g^i x + f^i y & \\ \text{s.t.} & a^i x + d^i y = b_i & i = ۱, \ldots, m_۱ \\ & g^i x + f^i y \geq h_i & i = ۲, \ldots, m_۲ \\ & x \geq ۰ & \\ & y \ \text{آزاد} & \end{array} \qquad (۱-۶)$$

فرض کنیم مقدار بهینه‌ی تابع مقصود $\hat{h}_۱$ باشد.

اگر $\hat{h}_۱ \geq h_۱$ $(i = ۲, \ldots, m_۲)$، در این‌صورت قید $g^i x + f^i y \geq h_۱$ زاید است.

۱-۱۱-۱۶ تمرین.(مهم) با حل یک مسأله چگونه می‌توان نشان داد که وجود یک قید باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد. به دقت حل مسأله را روی کاغذ بیاورید.

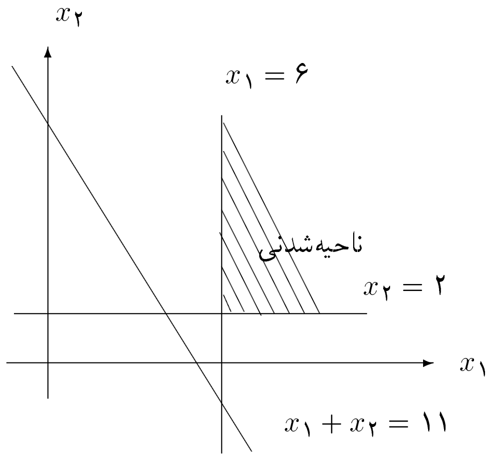
۱-۱۱-۱۷ تمرین. استدلال جبری زاید بودن قید $g'x + f'y \geq h_۱$ را به دقت روی کاغذ بیاورید. (در مسأله‌ی ۱-۶)

۱-۱۱-۱۸ تمرین. چرا در پایان فاز اول قیدهای زاید از مسأله حذف می‌گردند؟ به دقت مطلب را در جزئیات بنویسید.

۱-۱۱-۱۹ مثال. دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{rrl} x_۱ & & \geq ۶ \\ & x_۲ & \geq ۲ \\ ۲x_۱ & +x_۲ & \geq ۱۱ \end{array}$$

ناحیه‌شدنی در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۱-۵)

واضح است که قید نامساوی سوم زاید است (در دستگاه موردنظر) هیچ‌یک از قیدهای اول یا دوم زاید نیستند. مجموعه‌ی جواب‌های شدنی دستگاه در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اگر ثابت سمت راست در قید سوم به $۱۴ + \varepsilon$ (ε عدد مثبتی است) تبدیل گردد، قید سوم نیز زاید نخواهد بود.

۱-۱۱-۲۰ تمرین. فرق اساسی تغییر سمت راست ثابت قیدهای تساوی زاید و قیدهای نامساوی زاید را به دقت روی کاغذ بیاورید و از هرکدام چند مثال بزنید.

۱-۱۱-۲۱ قیدهای نامساوی نافذ (مار)[1] یک قید نامساوی از ۱-۵ را نامساوی نافذ (مار - تنگ) در آن دستگاه گویند، اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی ۱-۵ ، با ملحوظ داشتن آن به عنوان قید تساوی تغییر نکند. از این‌رو قید $g^l x + f^l y \geq h_l$ نافذ است اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی ۱-۵ با قرار دادن $g^l x + f^l y = h_l$ به‌جای $g^l x + f^l y \geq h_l$ تغییر نکند. این مطلب زمانی اتفاق می‌افتد که $\hat{h}_l = h_l$ که در آن $\hat{h}_l$ مقدار بهینه‌ی تابع مقصود

1) Binding Inequality Constraints

مسأله‌ی زیر است:

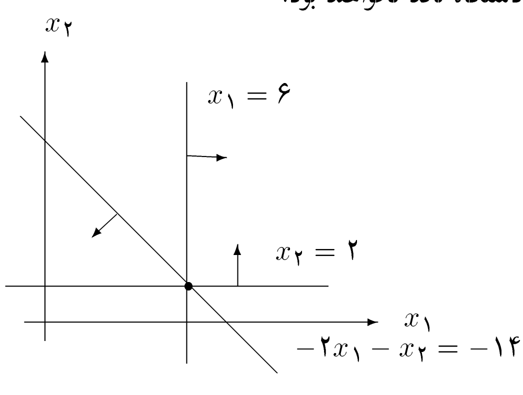
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & g^l x + f^l y \\ \text{s.t.} & \begin{cases} g^i x + f^i y \geq h_i & i = l, \dots, m_۲ \\ & i \neq l \\ a^i x + d^i y = b_i & i = ۱, \dots, m_۱ \end{cases} \\ & x \geq ۰ \ , \ \text{آزاد} \ y \end{array}$$

مطلب فوق را با یک مثال روشن می‌نمائیم.

۱-۱۱-۲۲ مثال. دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{rrl} x_۱ & & \geq ۶ \\ & x_۲ & \geq ۲ \\ -۲x_۱ & -x_۲ & \geq ۶ \end{array}$$

هر یک از قیدهای نامساوی در این دستگاه نافذ است. مجموعه جواب‌های شدنی این دستگاه، مجموعه‌ی منفرده $\{(۶, ۲)\}$ می‌باشد که در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اگر سمت راست از ۱۴− به $\varepsilon - ۱۴-$ تغییر کند (که در آن ε هر عدد مثبتی است) قیدهای نامساوی نافذ در این دستگاه نافذ نخواهند بود.



شکل (۱-۶)

۱-۱۱-۲۳ حذف قیدهای زاید.[۱] زاید بودن قیدهای تساوی در خلال تبدیل یک دستگاه از معادلات به‌صورت کانونی آن به‌راحتی صورت می‌گیرد و هیچ کوشش دیگری موردنیاز نیست. از طرف دیگر تشخیص زاید بودن یا نافذ بودن قیدهای نامساوی در مقایسه بسیار مشکل است و نیاز به حل جداگانه LPهای مختلف دارد. از نقطه‌نظر ریاضی بسیار جذاب است قیدهای زاید در یک دستگاه را تشخیص و آن‌ها را از دستگاه حذف نمائیم و همین‌طور تشخیص قیدهای مارکه به‌جای آن‌ها، قیدهای تساوی قرار داده شود؛ که بدین‌صورت قیدهای کمتری خواهیم داشت. ظاهر مسأله بسیار ساده می‌باشد ولی در عمل تشخیص زاید بودن یا مار بودن قید کوشش فراوانی می‌طلبد که در عمل به‌صرفه نیست.

برای بررسی و مطالعه بیشتر در این مورد به [] مراجعه نمائید.

درکاربردهای عملی، یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی نه تنها برای به‌دست آوردن جواب بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد، بلکه بررسی تغییرات جواب بهینه را وقتی مقادیر سمت راست تغییر می‌کند؛ مورد بررسی قرار می‌دهد.

تحلیل حاشیه‌ای و تحلیل حساسیت در رابطه با بردار ثابت سمت راست اطلاعات بسیار مفید اقتصادی به‌دست می‌دهد، که در رابطه با برنامه‌ریزی بسیار سودمند است. هر نوع تغییر در مقادیر سمت راست قیدهای زاید باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد. بنابراین اطلاعات سودمندی عاید نمی‌گردد. در هر صورت چه حفظ و چه حذف قیدهای زاید، مار مطالبی دارد که بایستی به دقت مورد مطالعه قرارگیرد. قبل از بیان کلی موضوع مسأله ساده‌ی زیر را درنظر بگیرید:

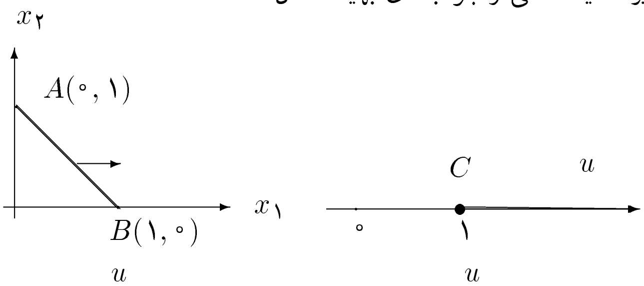
$$\begin{aligned} (P): \qquad & \text{Max} \quad x_1 + x_2 \\ & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 = 1 \\ & \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1) Elimination of Redundant Constraints

دوآل مسأله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(D):\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & w \\ \text{s.t.} & w \geq 1 \\ & w \geq 1 \end{array}$$

در شکل زیر ناحیه شدنی و جواب‌های بهینه نشان داده شده است:

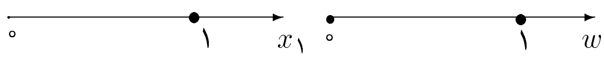


در مسأله‌ی دوآل از قیدهای $w \geq 1$ و $w \geq 1$ یکی زاید است، از این‌رو با حذف آن دوآل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(D):\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & w \\ \text{s.t.} & w \geq 1 \\ & w \ \text{آزاد} \end{array}$$

که دوآل این مسأله به‌صورت عبارت خواهد بود از:

$$(P'):\qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 \\ \text{s.t.} & x_1 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$



ناحیه شدنی در مسأله‌ی P' فقط $x_1 = 1$ می‌باشد که همین نقطه، جواب بهینه مسأله است. یعنی با حذف قید زاید دوآل پرایمال دیگر جواب چندگانه ندارد. این مثال نمونه‌ای بود از این‌که با

حذف قیدهای زاید یا مار ممکن است، مسأله حاصل یا دوآل آن معادل مسأله اصلی نباشد، گرچه جواب‌های بهینه یکسان دارند (در DEA این مطلب کجا ظاهر می‌گردد؟)

توجه(خیلی مهم). دو مسأله P_1 و P_2 را درنظر می‌گیریم معادل بودن این دو مسأله بستگی به تعریفی دارد که می‌آوریم. اگر تعریف زیر را به عنوان معادل بودن بپذیریم.

تعریف. دو مسأله‌ی P_1 و P_2 را معادل گوئیم در صورتی‌که مجموعه‌ی جواب‌های بهینه این دو مسأله مساوی باشند.

یا ممکن است تعریف زیر را برای معادل بودن دو مسأله بیاوریم.

تعریف دو مسأله‌ی P_1 و P_2 را معادل گویند، در صورتی‌که مجموعه‌ی جواب‌های شدنی و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه آن دو مساوی باشند. در مثال قبل با تعریف اول دو مساله، معادل هستند، در صورتی‌که با تعریف دوم، دو مسأله معادل نمی‌باشند.

به‌هرحال وقتی بردار ثابت سمت راست در یک قید نامساوی زاید یا نافذ به مقتضای کار تغییر می‌کند، ممکن است دستگاه سازگار باقی بماند. هر قید نامساوی در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی، توازن مواد اولیه و سمت راست این قید نشان‌دهنده‌ی مقدار مواد اولیه‌ی مورد یا محصول مورد درخواست می‌باشد. حتی اگر قید نامساوی زاید باشد، اگر این قید زاید از مدل حذف گردد، در این صورت کسب اطلاعات اقتصادی کامل میسر نخواهد بود، اگرچه جواب بهینه به‌دست آمده، همان جواب بهینه مسأله‌ی اصلی می‌باشد (مسأله اصلی مسأله‌ی است که دارای قیدهای زاید یا نافذ است که حذف نگردیده است) در فرموله نمودن یک مسأله‌ی عملی به عنوان LP، در مراحل اولیه مدل‌سازی، مجموعه‌ی جواب‌های شدنی به عنوان یک شییء هندسی قابل تشخیص نمی‌باشد بلکه سعی بر آن است که آن به عنوان یک مجموعه که با خواص جبری مشخص می‌گردد بیان نمائیم که این خواص جبری با حداقل قیود بیان می‌گردد. هر قیدی در یک LP نشان‌دهنده عرضه یک کالا یا تقاضای کالا می‌باشد (در این‌جا کالا به معنی اعم به‌کار برده می‌شود). بعد از این که مدل ساخته شد و همه چیز دورهم جمع شد (یعنی تابع مقصود مشخص گردید و قیدها تعیین شد) ممکن است بعضی از این قیود نامساوی در مدل زاید باشد. حذف این قیود زاید باعث از بین رفتن اطلاعاتی در رابطه با تعیین حساسیت باشد. از این‌رو بایستی بسیار با احتیاط با این مسأله برخورد نمود و

بهترین راه حذف نکردن قیدهای نامساوی زاید از مدل می‌باشد.

۱-۱۲ تمرینات فصل اول

۱) مسأله زیر را درنظر بگیرید

$$
\begin{array}{llrrl}
\text{Max} & z = & ۳x_۱ & +۴x_۲ & \\
\text{s. t.} & & ۲x_۱ & +x_۲ & \leq ۸ \\
 & & -x_۱ & +۲x_۲ & \leq ۶ \\
 & & x_۱ & +x_۲ & \leq ۶ \\
 & x_۱, x_۲ \geq ۰ & & &
\end{array}
$$

الف. مسأله را به طریق ترسیمی حل نمائید و بررسی کنید که نقطه‌ی بهینه یک جواب اساسی شدنی تبهگن می‌باشد.

ب. مسأله را با روش سیمپلکس حل نمائید.

ج. از قسمت الف، قیدهائی راکه باعث تبهگنی می‌گردد معین نمائید و این قیدها را از مسأله حذف کنید و مجدداً مسأله را حل کنید و توجه کنید که تبهگنی از بین می‌رود و همان جواب بهینه قبلی به دست می‌آید.

د. آیااین مطلب همواره درست است که نقطه رأسی تبهگن را می‌توان با حذف قیدهایی غیرتبهگن نمود، بدون این که ناحیه شدنی تغییر نماید.

توجه نمائید که حل دقیق این مسائل بدون درک عمیق مطالب فصل ممکن نمی‌باشد.

۲) فرض کنید یک جواب بهینه رأسی برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی از نوع می‌نیمم نمودن داریم. در حالت تبهگنی، آیا امکان این امر وجود دارد که این نقطه‌ی رأسی متناظر یک جواب اساسی شدنی باشد که $z_j - c_j > ۰$ برای حداقل یک متغیر غیراساسی اگر این مطلب اتفاق بیفتد آیا تضمینی وجود دارد که یک جواب اساسی شدنی دیگری موجود باشد که متناظر همان نقطه رأسی باشد و $z_j - c_j \leq ۰$ برای تمامی‌متغیرهای غیراساسی برقرار شود؟ چرا آری و چرا نه؟ مطلب را با یک مثال عددی

توضیح دهید.

۳) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (cx, cY) \\ \text{s.t.} \quad & A(x, Y) = (b, I) \\ & (x, Y) \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ از مرتبه‌ی $m \times n$ و $c \in R^n$ و متغیرها عبارتند از بردار x که یک بردار n تایی است و Y یک ماتریس $n \times m$ تابع مقصود یک بردار سطری است و می‌نیمم نمودن به مفهوم لکزیکو صورت می‌گیرد، یعنی $(cx_2, cY_2) < (cx_1, cY_1)$ اگر و فقط اگر:

$$(cx_1, cY_1) - (cx_2, cY_2) > 0$$

هر سطر از ماتریس (x, y) مقید به نامنفی بودن به مفهوم لکزیکو می‌باشد.

الف. نشان دهید

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , Y = \begin{pmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

یک جواب شدنی برای مسأله است مشروط بر این‌که

$$(B^{-1}b, B^{-1}) > 0$$

ب. نشان دهید که روش سیمپلکس با قاعده لکزیکو، دنباله‌ای به‌صورت

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots$$

که در آن

$$(cx_{j-1}, cY_{j-1}) - (cx_j, cY_j) > 0 \qquad \text{به‌ازاء هر } j$$

تولید می‌کند.

۴) مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنیم x_{B_1} یک بردار اساسی شدنی با این خاصیت باشد که فقط یکی از متغیرهای اساسی برابر صفر می‌باشد (یعنی $x_{B_1} = B_1^{-1}b \geq 0$ و فقط یکی از مؤلفه‌های $B_1^{-1}b$ برابر صفر می‌باشد). ثابت کنید x_{B_1} نمی‌تواند در یک دور از پایه‌های تبه‌گن قرار گیرد (البته برای مسأله فوق)

۵) LP زیر را درنظر بگیرید:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
x_1	1	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{32}{5}$	$\frac{24}{5}$	0	0
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	1	0

z می‌نیمم می‌گردد. $j = 1, \ldots, 7 \quad x_j \geq 0$. در حل این مسأله با **روش سیمپلکس** ، با شروع از یک بردار اساسی شدنی $x_B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ در هر مرحله متغیر واردشونده طبق قاعده‌ی زیر انتخاب می‌گردد:

$$s = \text{Min}\ \{j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

و متغیر خارج‌شونده به‌صورت زیر برای خروج کاندیدا می‌گردد:

$$r = \text{Min}\{i \mid \text{متغیر سطر } i \text{ام طبق قاعده می‌نیمم می‌تواند خارج گردد}\}$$

با به‌کار بردن این قواعد نشان دهید که دور افتادن صورت می‌پذیرد و بررسی نمائید که با به کار بردن قاعده لکزیکو از به‌دور افتادن جلوگیری می‌گردد (مسأله از **K.T.Marshal** می‌باشد).

۶) Lp زیر را درنظر بگیرید :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
x_1	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{32}{9}$	$\frac{2}{9}$	۰	۰
x_2	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{9}$	$\frac{5}{18}$	۰	۰
x_3	۰	۰	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	۰	۰
x_4	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۰	-۷	-۴	۱۵	۱	۰

z می‌نیمم می‌گردد $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 7$ اگر الگاریتم سیمپلکس جهت حل مسأله‌ی فوق با:

$$x_B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

به‌کار برده شود، با به‌کار بردن قواعدی که در مسأله ۵ ذکر شد. نشان دهید که به **دور افتادن** صورت می‌پذیرد، علیرغم این که تابع مقصود در ناحیه شدنی از پائین نامحدود می‌باشد.

مسأله از J.W. Suurballe می‌باشد.

۷) مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = c(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

نشان دهید با وجود تبه‌گنی به‌شرط آن‌که می‌نیمم منحصر به‌فردی در محاسبه‌ی زیر

$$\underset{1 \leq i \leq m}{\text{Min}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \;\middle|\; \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

که در آن $\bar{b} = B^{-1}b$ و $\bar{a}_k = B^{-1}a_k$ و x_k متغیر واردشونده می‌باشد، به‌دور افتادن صورت نخواهد گرفت.

۸) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = c(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و

$$\text{rank}(A) = m < n$$

هر یک از عبارات زیر را به دقت بخوانید و بگوئید راست یا دروغ می‌باشد. اگر راست است اثبات نمائید، در غیراین‌صورت مثال نقض بیاورید.

۱ـ در یک مرحله محوری، سطر محوری، سطر rام باشد، آنگاه ستون متعلق به متغیر وارد شونده نیز، ستون rام جدول خواهد بود.

۲ـ در الگاریتم سیمپلکس دوآل (دوآل سیمپلکس) با شروع از یک جواب شدنی دوآل، هیچ معیاری برای نامحدود بودن $z(x)$ وجود ندارد.

۳ـ در حل مسأله (۱) با پرایمال سیمپلکس، متغیرهای پرایمال همواره نامنفی باقی می‌مانند، عیناً در حل (۱) با سیمپلکس دوآل همواره متغیرهای دوآل نامنفی باقی می‌مانند.

۴ـ وقتی مسأله (۱) با الگاریتم دوال سیمپلکس حل می‌گردد، مقدار تابع مقصود به‌طور یکنواخت نزول می‌کند (وقتی از یک مرحله به مرحله بعدی می‌رویم).

۵ـ وقتی مسأله (۱) با الگاریتم دوآل سیمپلکس حل می‌گردد، وقتی یک متغیر نامنفی شد (در یک مرحله) در تمامی مراحل بعدی نامنفی باقی می‌ماند.

۶ـ وقتی مسأله‌ی (۱) با لگوریتم دوآل سیمپلکس حل می‌گردد، در هر مرحله مقدار تابع مقصود یک کران پائینی برای مراحل بعدی می‌باشد.

۷ـ به‌دور افتادن در تبه‌گن فقط در حل مسأله با الگاریتم پرایمال سیمپلکس اتفاق می‌افتد. در حل مسأله با الگاریتم دوآل سیمپلکس به‌دور افتادن نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

۸ـ برای پیدا نمودن جواب اولیه در پرایمال سیمپلکس متغیر تصنعی به مسأله افزوده می‌گردد و برای به‌دست آوردن جواب اولیه در دوآل سیمپلکس نامساوی تصنعی به مسأله اضافه می‌شود.

۹ـ فرض کنید در یک مسأله Lp، $c_n > \cdots > c_۲ > c_۱$، چون تابع مقصود از نوع می‌نیمم نمودن می‌باشد، پس اگر $(x_۱, \ldots, x_m)$ جواب اساسی شدنی، این جواب یک جواب بهینه می‌باشد.

۱۰ـ اگر در مسأله (۱) بردار $c \geq ۰$، در این صورت دوآل متناظر آن شدنی می‌باشد.

۱۱ـ اگر در (۱) $\text{rank}(A) = m$ و (۱) تبه‌گن نباشد، هر جواب شدنی که درست m مولفه‌ی مثبت داشته باشد، یک BFS می‌باشد.

۱۲ـ در حل یک Lp در **فاز اول** هیچوقت حالت نامحدود بودن مسأله پیش نمی‌آید.

۱۳ـ اگر دریک Lpدر فاز اول حالت نامحدود بودن پیش آید، بایستی مسأله نشدنی باشد.

۱۴ـ در حل یک Lp، در فاز اول برای مسأله شدنی تمامی متغیرهای تصنعی پایه را ترک می‌کنند.

۱۵ـ هیچ جواب شدنی (۱) با $m + ۲$ یا بیشتر متغیر مثبت نمی‌تواند روی یک یال قرار گیرد.

۹) مسأله زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = c(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

فرض کنید B یک پایه شدنی است که فقط یکی از مؤلفههای $B^{-1}b \geq 0$ مساوی صفر میباشد ثابت کنید اگر B در یک دور افتادن مسأله نمیتواند یکی از پایهها باشد.

۱۰) مسألهی $(*)$ را درنظر بگیرید که در آن $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$$\mathrm{Rank}(A) = m < n$$

راست یا دروغ بودن عبارات زیر را مشخص کنید. در صورت راست بودن اثبات نمائید و در صورت دروغ بودن گزاره مثال نقض بزنید.

۱ـ اگر مسأله $(*)$ بهینهی چندگانه داشته باشد، بایستی بهینهی موجود تبهگن باشد.

۲ـ اگر یک نقطه داخلی ناحیه شدنی بهینه $(*)$ باشد در این صورت بایستی تمامی نقاط ناحیه شدنی بهینه باشد.

۳ـ اگر دستگاه $Ad = 0$ و $d \geq 0$ و $d \neq 0$ جواب داشته باشد، ناحیه محدود است و اگر جواب داشته باشد مسأله بهینهی نامتناهی دارد.

۴ـ دستگاه معادلات $Ax = b$ ، $x \geq 0$ که در آن

$$\mathrm{Rank}(A) = n - 1 \ , \ \ x \in R^n$$

و دستگاه دارای جواب است. مجموعهی نقاط شدنی درست دو نقطه رأسی دارد.

۵ـ تعداد یالهای مار بر یک BFS همواره از بعد ناحیه شدنی بیشتر میباشد و در حالت تبهگنی باهم برابرند.

۶ـ اگر دستگاه $Ax = 0$ و $x \geq 0$ یک جواب غیرصفر داشته باشد، آنگاه دستگاه $Ax = b$، $x \geq 0$ همواره شدنی است.

مراجع

[1] D. Avis and V. Chvatal, “Nots on Bland’s Pivoting Rule, ”in Mathematical Programming Study 8, North-Holland, Amsterdam, July 1978, PP, 24-34.

[2] E.M. L. Beale, ”Cycling in the Dual Simplex Algorithm, ”Naval Reseatrch Logistics Quarterly 2 (1955), 269-276.

[3] R. G. Bland, ”New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method, ”Mathmtics of Operations Research (May, 1977), 103-107.

[4] R. Chandrasekharan, S. N. Kabadi, and K. G. Murty, ”Some NP-Complete Programming, ”Opetations Research Letters 1, 3 (July 1982). 101-104.

[5] A. Charnes, ”Optimality and Degeneracy in Linear Programming”, Econometrica 20, 2 (April 1952) 160-170.

[6] W. H. Cunnigham, ”A Network Simplex Method”, Mathiematical Programmong 11(1976), 105-116.

[7] G. B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe, ”Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form Under Liner Inequality Conatraints, ” pacefic Journal of Mathematics 5 (1955), 183-195.

[8] A. Gana, ”Studies in the Complementarity problem, ” PH. D. dissertation, Department of industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, 1982.

[9] A. J. Hoffman, "Cycling in the Simlex Algorithm, " National Bureau of Standards Report 2974, Washington, D. C. , December 1953.

[10] K. T. Marshal and J. W. Suurballe, "A Note on Cycling in the Simplex Method," Naval Research Logistics Quarterly 16, 1 (March 1969), 121-137.

[11] R. Saigl, "A Homotopy for Solving Largi Sparse and Structured Fixed Point Problems, "Mathematics of Operationes Research, to be Published.

[12] P. Wolfe, "A Technique for Resolving Degeneracy in Linear Programming, " Journal of SLAM 11 (1963), 205-211.

فصل دوم

دوآلیتی در برنامه‌ریزی خطی[1]

هر برنامه‌ریزی خطی که حل می‌گردد، متناظر آن یک برنامه‌ریزی خطی دیگر هم‌زمان حل می‌شود. این برنامه‌ریزی خطی، در بعضی از خواص بسیار مهم صدق می‌نماید. آن را می‌توان برای به‌دست آوردن جواب برای مسأله‌ی اصلی بکار برد. متغیرهای این مسأله اطلاعات فوق‌العاده ارزشمندی در رابطه با جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی به‌دست می‌دهد.

۲-۱ فرموله نمودن مسأله‌ی دوآل[2]

متناظر هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دیگری وجود دارد که دوآل آن مسأله نامیده می‌شود. برنامه‌ریزی دوآل شامل خواص بسیار مهمی در رابطه با مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی اصلی دارد که در تمامی کاربردهای آن از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. دو صورت مهم از دوآلیتی (در تعریف آن) وجود دارد؛ **فرم کانونی دوآلیتی** و فرم **استاندارد دوآلیتی**. این دو فرم کاملاً معادل می‌باشند. این دو صورت در رابطه با صورت‌های کانونی و صورت‌های استاندارد مسأله برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شوند.

1) Duality in Linear Programming 2) Formulation of Dual problem

۲-۲ فرم کانونی دوآلیتی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را که به‌صورت کانونی می‌باشد درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{Min} \quad z(x) = cx \\ & \text{s.t.} \quad Ax \geq b \\ & \qquad\quad x \geq \circ \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

دوآل مسأله فوق چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} D \quad & \text{Max} \quad W = wb \\ & \qquad\quad wA \leq c \\ & \qquad\quad w \geq \circ \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

توجه کنید که برای هر قید یک **متغیر دوآل** و برای هر قید دوآل یک متغیر پرایمال وجود دارد. در این رابطه با این موضوع بعداً بیشتر صحبت خواهیم نمود.

۲-۲-۱ مثال. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (پرایمال) زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{Min} \quad z = ۶x_۱ + ۸x_۲ \\ & \text{s.t.} \quad ۳x_۱ + x_۲ \geq ۴ \\ & \qquad\quad ۵x_۱ + ۲x_۲ \geq ۷ \\ & \qquad\quad x_۱, x_۲ \geq \circ \end{aligned}$$

دوآل مسأله فوق چنین خواهد بود.

$$\begin{aligned} D: \quad & \text{Max} \quad w = ۴w_۱ + ۷w_۲ \\ & \text{s.t.} \quad ۳w_۱ + ۵w_۲ \leq ۶ \\ & \qquad\quad w_۱ + ۲w_۲ \leq ۸ \\ & \qquad\quad w_۱, w_۲ \geq \circ \end{aligned}$$

توصیه. این دو مسأله را به‌صورت ترسیمی حل نمائید. مقدار بهینه تابع مقصود آن دو را مقایسه کنید. این مطلب به شما در رابطه با مفاهیم بعدی دوآلیتی بینش عمیق خواهد داد.

در تعریف فرم کانونی دوآلیتی بسیار مهم است که مسأله P را به‌صورت کانونی در بیاوریم. اگر مسأله‌ای از نوع می‌نیمم نمودن باشد بایستی تمامی قیود به‌صورت $\geq$ و اگر از نوع ماکزیموم باشد تمامی قید به‌صورت $\leq$ بایستی تبدیل شوند و تمامی متغیرها مقید به محدودیت نامنفی بودن باشند.

۲-۳ فرم استاندارد دوآلیتی[1]

تعریف معادل دیگری از دوآلیتی چنین می‌باشد. مسأله P را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \text{Min} \quad z = cx \\
& \text{s.t.} \quad Ax = b \\
& \qquad\quad x \geq 0
\end{aligned}
\tag{۲-۳}
$$

دوآل آن چنین تعریف می‌شود.

$$
\begin{aligned}
D \quad & \text{Max} \quad W = wb \\
& \qquad\quad wA \leq c \\
& \qquad\quad w \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{۲-۴}
$$

۲-۳-۲ مثال. مسأله‌ی پرایمال را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & 6x_1 & +8x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 4 \\
& 5x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 7 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1) Standard Form of Duality

دوآل این مسأله به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{llrrl} \text{Max} & z = & 4w_1 & +7w_2 & \\ & \text{s.t.} & 3w_1 & +5w_2 & \leq 6 \\ & & w_1 & +2w_2 & \leq 8 \\ & & -w_1 & & \leq 0 \\ & & & -w_2 & \leq 0 \end{array}$$

w_1 و w_2 آزاد هستند

با قبول یکی از تعاریف فوق ملاحظه می‌کنیم که دیگری نیز معتبر است. به عبارت دیگر، اگر یکی را به‌صورت تعریف اصلی قبول کنیم دیگری از آن حاصل می‌گردد.

به عنوان مثال، فرض کنید که صورت استاندارد را به عنوان تعریف قبول نموده‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صورت کانونی آن نتیجه می‌گردد.

$$\begin{array}{lll} P & \text{Min} & z = cx \\ & \text{s.t.} & Ax - Ix_s = b \\ & & x, x_s \geq 0 \end{array}$$

با توجه به تعریف دوآل این مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{lll} D & \text{Max} & W = wb \\ & & wA \leq C \\ & & -wI \leq 0 \\ & & w \text{ آزاد} \end{array}$$

اما $-wI \leq 0$ به معنی $w \geq 0$ بنابراین مسأله به‌صورت کانونی خواهد بود.

۲-۳-۳ قضیه. دوآل دوآل پرایمال است.

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq \circ \end{aligned}$$

با به‌کار بردن تبدیلات مناسب داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (-b^t)w^t \\ \text{s.t.} \quad & (-A^t)w^t \geq (-c^t) \\ & w^t \geq \circ \end{aligned}$$

دوآل مسأله‌ی فوق‌الذکر چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x^t(-c^t) \\ \text{s.t.} \quad & x^t(-A^t) \leq (-b^t) \\ & x^t \geq \circ \end{aligned}$$

اما این مسأله همان مسأله:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

می‌باشد. این قضیه نشان می‌دهد که تعاریف را که ممکن است به‌صورت عکس به‌کار ببریم. لغت‌های «پرایمال» و «دوآل» در رابطه با مرجعی که انتخاب می‌کنیم نسبی می‌باشند. به عبارت دیگر در یک زوج مسائل برنامه‌ریزی به‌صورت فوق هرکدام را می‌توان پرایمال و دیگری را دوآل به حساب آورد.

۲-۴ صور مختلط دوآلیتی[1]

در عمل، بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی خطی شامل قیدهایی از نوع کوچکتر یا مساوی، یا از نوع تساوی یا از نوع بزرگتر یا مساوی و همچنین متغیرهایی از نوع «≥ 0» یا«≤ 0» یا آزاد می‌باشند. در تئوری وجود حالت‌هایی به‌صورت‌های فوق هیچ مشکلی پیش نمی‌آورد، زیرا می‌توان با تبدیلات مناسب آن‌ها را به‌صورت‌های مورد نظر تبدیل نمود. خوشبختانه نیازی به چنین تبدیلاتی وجود ندارد و می‌توان با روشی که ذیلاً ذکر می‌کنیم که این روش‌ها مستقیماً با استفاده از تعریف نتیجه می‌گردد، دوآل مسأله را نوشت.

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$
\begin{array}{llllllll}
P: & \text{Min} & z = & c_1x_1 & +c_2x_2 & +c_3x_3 & \\
 & \text{s.t.} & & A_{11}x_1 & +A_{12}x_2 & +A_{13}x_3 & \geq b_1 \\
 & & & A_{21}x_1 & +A_{22}x_2 & +A_{23}x_3 & \leq b_2 \\
 & & & A_{31}x_1 & +A_{32}x_2 & +A_{33}x_3 & = b_3
\end{array}
$$

$x_1 \geq 0$ ، $x_2 \leq 0$ و x_3 آزاد باشد.

با تبدیلات زیر می‌توان مسأله‌ی فوق‌الذکر را به‌صورت کانونی تبدیل نمود. به‌جای $x_2 = -x'_2$ و $x_3 = x'_3 - x''_3$، قید دوم را در (۱-) ضرب می‌کنیم و به جای قید سوم دو نامساوی قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & z = & c_1x_1 & -c_2x'_2 & +c_3x'_3 & -c_3x''_3 & \\
\text{s.t.} & & A_{11}x_1 & -A_{12}x'_2 & +A_{13}x'_3 & -A_{13}x''_3 & \geq b_1 \\
 & & -A_{21}x_1 & +A_{22}x'_2 & -A_{23}x'_3 & +A_{23}x''_3 & \geq -b_2 \\
 & & A_{31}x_1 & -A_{32}x'_2 & +A_{33}x'_3 & -A_{33}x''_3 & \geq b_3 \\
 & & -A_{31}x_1 & +A_{32}x'_2 & -A_{33}x'_3 & +A_{33}x''_3 & \geq -b_3
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x'_2 \geq 0 \ , \ x'_3 \geq 0 \ , \ x''_3 \geq 0$$

1) Mixed Forms of Duality

متغیرهای دوآل را به w_1، w'_2،w'_3 و w''_3 نشان می‌دهیم. دوآل مسأله فوق عبارت خواهد بوداز:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{Max} & w_1 b_1 & -w'_2 b_2 & +w_3 b_3 & -w''_3 b_3 & \\
\text{s.t.} & w_1 A_{11} & -w'_2 A_{12} & +w'_3 A_{31} & -w''_3 A_{31} & \leq c_1 \\
 & -w_1 A_{12} & +w'_2 A_{22} & -w'_3 A_{32} & +w''_3 A_{32} & \leq -c_2 \\
 & w_1 A_{13} & -w'_2 A_{23} & +w'_3 A_{33} & -w''_3 A_{33} & \leq c_3 \\
 & -w_1 A_{13} & +w'_2 A_{23} & -w'_3 A_{33} & +w''_3 A_{33} & \leq -c_3
\end{array}
$$

$$w_1 \geq 0 \ , \ w'_2 \geq 0 \ , \ w'_3 \geq 0 \ , \ w''_3 \geq 0$$

با قرار دادن $w_2 = -w'_2$ و $w_3 = w'_3 - w''_3$ مسأله‌ی فوق‌الذکر به‌صورت زیر درمی‌آید که دوآل مسأله اصلی می‌باشد:

$$
\begin{array}{lll}
D: & \text{Max} & W = w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\
 & \text{s.t.} & w_1 A_{11} + w_2 A_{21} + w_3 A_{31} \leq c_1 \\
 & & w_1 A_{12} + w_2 A_{22} + w_3 A_{32} \geq c_2 \\
 & & w_1 A_{13} + w_2 A_{23} + w_3 A_{33} = c_3 \\
 & & w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \ \text{آزاد}
\end{array}
$$

در جمع‌بندی با استفاده از جدول زیر می‌توان مسأله به هر صورت که باشد دوآل آن را بدون تبدیل نوشت:

	مسأله از نوع مینیموم نمودن		مسأله از نوع ماکزیموم نمودن	
متغیرها	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	قیدها
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	
	آزاد	$\longleftrightarrow$	$=$	
قیدها	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	متغیرها
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	آزاد	

جدول (۱-۱)

۲-۴-۴ مثال. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \text{ آزاد} \end{aligned}$$

با به‌کار بردن روابط ذکر شده در جدول (۱-۱) دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود.

$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & W = & 2w_1 & -4w_2 & \\ & & w_1 & +5w_2 & \geq 8 \\ & & -6w_1 & +7w_2 & \leq 3 \\ & & w_1 & -2w_2 & = -2 \\ & & & & \\ & & w_1 \geq 0 & w_2 \text{ آزاد} & \end{array}$$

۲-۴-۵ تمرین. روابط بین پرایمال و دوآل ذکر شده در بالا، برای صورت کانونی بود. چنین روابطی را برای صورت استاندارد به‌دست آورید.

قبل از وارد شدن به‌صورت‌های مختلف بین روابط بین پرایمال و دوآل چند نمونه از متغیرهای اقتصادی، مدیریتی، ... .ذکر می‌نمائیم.

۲-۴-۶ مثال. یک مسأله‌ی حمل و نقل به‌صورت زیر درنظر بگیرید که از دو انبار W_1، W_2 به سه مشتری R_1و R_2 و R_3 طبق داده‌های زیر کالا ارسال می‌نماید.

مشتری	R_1	R_2	R_3	**عرضه**
W_1	۳	۴	۶	۲۰
W_2	۵	۵	۴	۲۵
تقاضا	۱۵	۲۰	۱۰	۴۵

مسأله‌ی حمل ونقل فوق‌الذکر به‌صورت زیر فرموله می‌گردد:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & ۳x_{۱۱} & +۴x_{۱۲} & +۶x_{۱۳} & +۵x_{۲۱} & +۵x_{۲۲} & +۴x_{۲۳} & \\
\text{s.t.} & x_{۱۱} & +x_{۱۲} & +x_{۱۳} & & & & \geq ۲۰ \\
 & & & & x_{۲۱} & +x_{۲۲} & +x_{۲۳} & \geq ۲۵ \\
 & x_{۱۱} & & & +x_{۲۱} & & & \leq ۱۵ \\
 & & x_{۱۲} & & & +x_{۲۲} & & \leq ۲۰ \\
 & & & x_{۱۳} & & & +x_{۲۳} & \leq ۱۰
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq ۰ \ , \ i = ۱, ۲ \ , \ j = ۱, ۲, ۳$$

(که در x_{ij} مقدار کالای ارسالی از انبار i به مشتری j می‌باشد)

برای آن‌که دوآل مسأله‌ی فوق را بنویسیم، قیدهای سوم و چهارم و پنجم را در عدد (۱-) ضرب می‌کنیم تا به‌صورت کانونی درآید و مسأله چنین خواهد بود.

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{Min} & Z = & ۳x_{۱۱} & +۴x_{۱۲} & +۶x_{۱۳} & +۵x_{۲۱} & +۵x_{۲۲} & +۴x_{۲۳} & \\
\text{s.t.} & & x_{۱۱} & +x_{۱۲} & +x_{۱۳} & & & & \geq ۲۵ \\
 & & & & & x_{۲۱} & +x_{۲۲} & +x_{۲۳} & \geq ۲۰ \\
 & & -x_{۱۱} & & & -x_{۲۱} & & & \geq -۱۵ \\
 & & & -x_{۱۲} & & & -x_{۲۲} & & \geq -۲۰ \\
 & & & & -x_{۱۳} & & & -x_{۲۳} & \geq ۱۰
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq ۰ \ , \ i = ۱, ۲ \ , \ j = ۱, ۲, ۳$$

دوآل مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & W = & ۲۵w_{۱} & +۲۰w_{۲} & -۱۵w_{۳} & -۲۰w_{۴} & -۱۰w_{۵} & \\
\text{s.t.} & & w_{۱} & & -w_{۳} & & & \leq ۳ \\
 & & w_{۱} & & & -w_{۴} & & \leq ۴ \\
 & & w_{۱} & & & & -w_{۵} & \leq ۶ \\
P: & & & w_{۲} & -w_{۳} & & & \leq ۵ \\
 & & & w_{۲} & & -w_{۴} & & \leq ۵ \\
 & & & w_{۲} & & & -w_{۵} & \leq ۴
\end{array}$$

$$w_{۱}, w_{۲}, w_{۳}, w_{۴}, w_{۵} \geq ۰$$

۲-۵ تفسیر اقتصادی مسأله[1]

در مثال ۲-۴-۳ هدف پیدا نمودن یک خط‌مشی جهت ارسال کالا از انبارهای W_1 و W_2 به مشتری‌های R_1 و R_2 و R_3 می‌باشیم که هزینه‌ی کل ارسال کالا می‌نیمم گردد.

فردی در این میان ظاهر می‌گردد و این‌گونه پیشنهاد می‌نماید که حاضر است تمامی کالاهای انبار W_1 را از قرار هر واحدی w_1و تمامی کالاهای انبار W_2 را از قرار هر واحدی w_2 خریداری نماید، و کالای خریداری شده را به مشتری اول از قرار هر واحدی w_3 و به مشتری دوم از قرار هر واحدی w_4 و به مشتری سوم از قرار هر واحدی w_5 بفروشد. فرد موردنظر با نشان دادن قیدهای دوآل، فروشندگان را متقاعد می‌نماید که سود حاصله از مشتریان از هزینه حمل ونقل کالا که قرار بود برای هر واحد از طرف مشتریان پرداخت گردد، اضافی نخواهد بود و از طرفی مقدار سود خودش $(15w_3 + 20w_4 + 10w_5) - (25w + 20w_2)$ خواهد بود.

خریدار سعی می‌نماید wها را طوری مشخص نماید که سود دریافتی او ماکزیمم گردد، در عین حالی‌که رضایت مشتری را نیز جلب نموده است.

اتفاقی که می‌افتد آن است که:

الف. فروشندگان کالا، زحمت ارسال کالا و حل مسأله از گردنشان می‌افتد.

ب. خریدار کاری به دست آورده است که در قبال انجام آن پولی به‌دست می‌آورد.

۲-۵-۷ مثال. جهت تأمین سوخت مورد نیاز در یک کشور پالایشگاه‌های A و B و C و D و E فعالیت می‌کنند که قرار است روزانه سوخت مصرفی به شرحی که در جدول زیر داده شده تأمین نمایند. هزینه تأمین سوخت های موردنظر برای هر ساعت فعالیت نیز در جدول داده شده است.

تقاضای روزانه	E	D	C	B	A	
۷۰	۵	۶	۷	۸	۱۰	بنزین
۳۰	۴	۴	۵	۶	۸	گازوئیل
۲۰	۲	۲	۲	۳	۴	نفت سفید
	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	هزینه هر ساعت فعالیت

1) Economic Interpratiton of Problem

(تقاضا برحسب میلیون لیتر می‌باشد و هزینه برحسب ۱۰۰۰ دلار می‌باشد.)
اعداد داخل جدول مقدار سوخت تولید شده در هر ساعت می‌باشد. مثلاً درسطر اول و ستون اول؛ عدد ۱۰ نشان‌دهنده آن است که اگر پالایشگاه A یک ساعت فعالیت داشته باشد ۱۰ میلیون لیتر بنزین تولید می‌کند.(تمامی‌ارقام جدول اعم از تقاضا و تولید فرضی می باشند.)
فرض کنیم:

$$x_j = \text{تعداد ساعات فعالیت پالایشگاه } j \text{ باشد}$$
$$j = A, B, C, D, E$$

مسأله‌ی فوق به‌صورت زیر فرموله می‌گردد:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & z = ۱۲x_A + ۱۰x_B + ۹x_C + ۸x_D + ۷x_E \\
\text{s.t.} \quad & ۱۰x_A + ۸x_B + ۷x_C + ۶x_D + ۵x_E \geq ۷۰ \\
& ۸x_A + ۶x_B + ۵x_C + ۴x_D + ۴x_E \geq ۳۰ \\
& ۴x_A + ۳x_B + ۲x_C + ۲x_D + ۲x_E \geq ۲۰ \\
& x_A, x_B, x_c, x_D, x_E \geq ۰
\end{aligned}$$

دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & W = ۷۰w_۱ + ۳۰w_۲ + ۲۰w_۳ \\
\text{s.t.} \quad & ۱۰w_۱ + ۸w_۲ + ۴w_۳ \leq ۱۲ \\
& ۸w_۱ + ۶w_۲ + ۳w_۳ \leq ۱۰ \\
D: \quad & ۷w_۱ + ۵w_۲ + ۲w_۳ \leq ۹ \\
& ۶w_۱ + ۴w_۲ + ۲w_۳ \leq ۸ \\
& ۵w_۱ + ۴w_۲ + ۲w_۳ \leq ۷ \\
& w_۱, w_۲, w_۳ \geq ۰
\end{aligned}$$

در مثال ۲-۴-۳ هدف می‌نیمم نمودن هزینه تولید سوخت های‌موردنظر می‌باشد که عبارتند از ۷۰ میلیون لیتر بنزین، ۳۰ میلیون لیتر گازوئیل و ۷۰ میلیون لیتر نفت سفید.

از طرف یک کمپانی بزرگ نفتی پیشنهادی به‌صورت زیر دریافت می‌شود که در حقیقت بیان کننده‌ی مسأله‌ی D است.

پیشنهاد به‌صورت ذیل است. شما پالایشگاه‌ها را کلاً تعطیل نمائید. ما سوخت مصرفی موردنیاز شما را؛ بنزین به قیمت w_1 و برای گازوئیل به قیمت w_2 و برای نفت سفید به قیمت w_3 تأمین می‌کنیم. پیشنهاددهنده با ارائه قیدهای دوآل، تولیدکننده را قانع می‌نماید که پول پرداختی جهت خرید سوخت از هزینه‌ی تولید آن بیشتر نیست. دو اتفاق مهم رخ می‌دهد.

الف. تولیدکننده با خیال راحت، پالایشگاه‌ها را تعطیل و سوخت موردنیاز خود را بدون هیچ دردسر و با پولی که بیشتر از هزینه تولید نمی‌باشد دریافت می‌کند.

ب. فروشنده یا پیشنهاددهنده مبلغی معادل

$$70w_1 + 30w_2 + 20w_3$$

از فروش سوخت دریافت می‌نماید.

گرچه مسأله‌ی فوق یک مسأله‌ی فرضی است ولی متاسفانه در جهان سوم این امر اتفاق می‌افتد. پس از تعطیل کارگاه‌های تولید، وقتی فروشنده مطمئن از نیاز خریدار شد، به‌هرقیمتی که دلش بخواهد جنس خود را می‌فروشد و خریدار چون ابزار تولید که مهم‌ترین آن‌ها کارگران و نیروهای متخصص باشد از دست داده است و مهم‌تر از همه وابستگی است که پیش آمده و بیکار شدن تعداد زیادی از نیروها است که مشکل اجتماعی ایجاد می‌نمایند.

فعلاً در این جا به ذکر همین دو مثال بسنده می‌کنیم و پس از بررسی مطالب ذیل تفسیر اقتصادی بیشتری که حالت کلی‌تری نیز دارد را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲-۶ رابطه‌ی بین پرایمال-دوآل[1]

تعریفی را که برای دوآل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی آوردیم، منجر به نتایج و روابط بین پرایمال و دوآل می‌گردد که ذیلاً آن‌ها را بررسی می‌نمائیم.

1) Primal Dual Relationship

۲-۶-۸ رابطه بین مقادیر تابع مقصود پرایمال و دوآل.

مسأله‌ی P را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
P: \qquad & \text{Min} \quad z = cx \\
& \text{s.t.} \quad Ax \geq b \\
& \qquad\quad x \geq \circ
\end{aligned}
$$

که دوآل آن یعنی مسأله‌ی D چنین خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
D: \quad & W = wb \\
& wA \leq c \\
& w \geq \circ
\end{aligned}
$$

فرض کنید:

$$
\begin{aligned}
& S_P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq \circ\} \\
& S_D = \{w \mid wA \leq c, w \geq \circ\} \qquad (۲-۵)
\end{aligned}
$$

۲-۶-۹ قضیه. به‌ازاء هر $x \in S_P$ و به‌ازاء هر $w \in S_D$ داریم :

$$cx \geq wb$$

از این قضیه تحت عنوان، قضیه‌ی **ضعیف دوآلیتی**[۱] یاد می‌گردد.

برهان. فرض کنیم: $x^\circ \in S_P$ و $w^\circ \in S_D$. داریم :

$$Ax^\circ \geq b \quad , x^\circ \geq \circ \qquad (a)$$

و

$$w^\circ A \leq c \quad w^\circ \geq \circ \qquad (b)$$

1) Weak Duality Theorem

(a) را در w° و (b) را در x° ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$w^{\circ}Ax^{\circ} \geq w^{\circ}b \qquad (a')$$

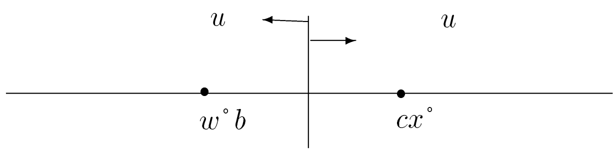
$$w^{\circ}Ax^{\circ} \leq cx^{\circ} \qquad (b')$$

از (a') و (b') نتیجه می‌شود:

$$cx^{\circ} \geq w^{\circ}b \qquad (۶-۲)$$

و حکم ثابت است.

در نمودار زیر این مطلب ارائه شده است:



شکل (۲-۱)

قضیه فوق به ما می‌گوید که به‌ازاء هر $x \in S_P$، cx یک کران بالا برای مجموعه‌ی زیر است:

$$H_D = \{wb \mid w \in S_D\}$$

هم چنین برای $w \in S_D$، wb یک کران پائین برای مجموعه‌ی H_p که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، می‌باشد:

$$H_p = \{cx \mid x \in S_P\}$$

از قضیه ضعیف دوآلیتی نتایج بسیار مهمی عاید می‌گردد که ذیلاً درج می‌گردد.

نتیجه‌ی اول. اگر $x_{\circ} \in S_p$ و $w_{\circ} \in S_D$ و $cx_{\circ} = w_{\circ}b$ آن‌گاه $x_{\circ}$ بهینه‌ی پرایمال و $w_{\circ}$ بهینه‌ی دوآل است.

برهان. فرض کنیم x عضو دلخواهی از S_P باشد. طبق قضیه‌ی فوق :

$$cx \geq w^{\circ}b$$

اما $cx^{\circ}=w^{\circ}b$ پس

$$\forall x (x \in S_P \Longrightarrow cx^{\circ} \leq cx)$$

یعنی x° بهینه مسأله‌ی P است.

عیناً می‌توان ثابت کرد که $w_{\circ}$ بهینه‌ی مسأله‌ی D است. این مطلب در مسائل بهینه‌سازی کاربرد بسیار زیادی دارد.

نتیجه‌ی دوم. اگر مسأله‌ی P بهینه نامتناهی داشته باشد D نشدنی است و همین‌طور اگر D بهینه نامتناهی داشته باشد P نشدنی است.

برهان. فرض کنید P بهینه نامتناهی داشته باشد و D شدنی باشد در این‌صورت اگر $w^{\circ} \in S_D$ بایستی:

$$w^{\circ}b \leq -\infty$$

که این امر امکان ندارد. (چرا؟) عیناً مورد دیگر قابل اثبات است.

سوالی که در اینجا پیش می‌آید آن است که آیا نشدنی بودن یکی از دو مسائل مستلزم نامحدود بودن (بهینه نامتناهی داشتن) دیگری است؟ جواب آن است که چنین ضرورتی وجود ندارد. در مثال زیر این مطلب ارائه شده است.

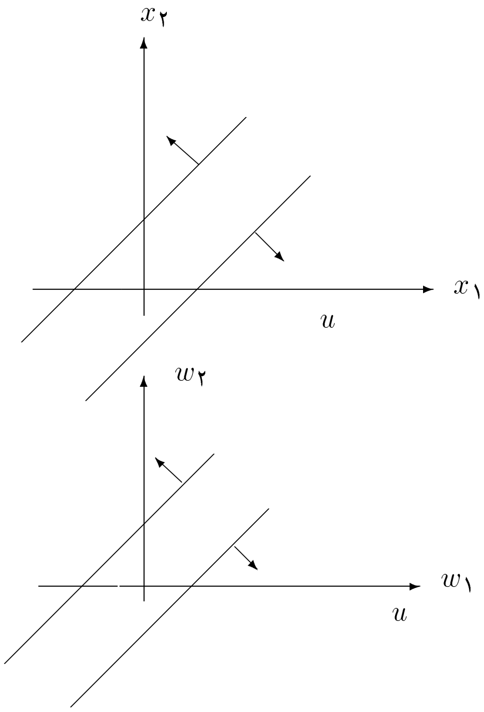
۲-۶-۱۰ مثال. مسائل پرایمال و دوآل زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{llrrl} P: \text{Min} & Z = & -x_1 & -x_2 & \\ \quad \text{s.t.} & & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\ & & -x_1 & +x_2 & \geq 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{llrrl} D: \text{Max} & W = & w_1 & +w_2 & \\ \quad \text{s.t.} & & w_1 & -w_2 & \leq -1 \\ & & -w_1 & +w_2 & \leq -1 \end{array}$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$



شکل (۲-۲)

با رسم قیدهای تعریف کننده ناحیه شدنی هر دو مسأله ملاحظه می‌گردد که:

$$S_P = \phi$$

$$S_D = \phi$$

نتیجه‌ی سوم. اگر $S_P \neq \phi$ و $S_D \neq \phi$ آن‌گاه هر دو مسأله‌ی بهینه‌ی متناهی دارند.

برهان. چون هرLP یا شدنی یا نشدنی و اگر شدنی باشد یا نامحدود است یا بهینه‌ی متناهی دارد. چون $S_D \neq \phi$ پس P هم شدنی و هم کران دار است، یعنی بهینه‌ی متناهی دارد. عین مطلب را می‌توان در رابطه با Dبیان نمود.

۷-۲ قضیه‌قوی دوآلیتی[1]

اگر P و D یعنی مسأله‌ی پرایمال و دوآل هر دو شدنی باشند، هر دو بهینه‌ی متناهی دارند و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود هر دو مساوی است به عبارت دیگر اگر x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D باشند، داریم.

$$w^*b = cx^*$$

برهان. در نتیجه‌ی سوم دیدیم که تحت شرایط قضیه هر دو مسأله بهینه‌ی متناهی دارند. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که مقدار بهینه‌ی P و D مساوی هستند. فرض کنید x^* بهینه‌ی مسأله‌ی P است. پس اگر B پایه متناظر آن باشد، (توجه کنید که ثابت نمودیم اگر مسأله بهینه‌ی متناهی داشته باشد، همواره یک بهینه BFS دارد) داریم:

$$Ax^* \geq b$$

$$x^* \geq \circ$$

و به‌ازاء هر j:

$$z_j - c_j = w^*a_j - c_j \leq \circ \qquad (*)$$

که در آن $w^* = C_B B^{-1}$ و C_B بردار ضرایب متغیرهای اساسی است.

از $(*)$ داریم:

$$w^*A \leq c$$

پس w^* در قیدهای مسأله‌ی دوآل صدق می‌کند. حال ثابت می‌کنیم $w^* \geq \circ$. در حل مسأله P صورت استاندارد آن با روش سیمپلکس ملحوظ شده است یعنی صورت:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx + \circ\, x_s \\ \text{s.t.} \quad & Ax - Ix_s = b \end{aligned}$$

در مسأله‌ی فوق با استفاده از $(*)$ داریم (برای jها متعلق به x_s)

$$wa_j - c_j = w(-e_j) - \circ \leq \circ \quad \text{به‌ازاء هر } j$$

1) Strong Duality Theorem

یعنی:

$$-wI \leq 0$$

پس:

$$w \geq 0$$

واین بدان معنی است که $w^* = c_B B^{-1}$ یک جواب شدنی دوآل می‌باشد. از طرفی داریم:

$$Z^* = (c_B, c_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} b = w^* b = W^*$$

و حکم ثابت است.

برای مسأله‌ی:

$$P: \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z(x) = cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & W = wb \\ \text{s.t.} & wA \leq 0 \\ & w \geq 0 \end{array} \qquad (۲\text{-}۷)$$

مسأله **۲-۷** فرم متجانس دوآل[1] گویند و آن را به HD نشان می‌دهند. توجه کنید که دوآل مسأله HD همان ناحیه شدنی P را دارد. بنابراین اگر HD نامحدود باشد، آنگاه طبق نتایج فوق‌الذکر P نشدنی است. بالعکس اگر P نشدنی باشد، در این‌صورت HD بایستی نامحدود باشد (زیرا HD شدنی است $w = 0$ در قیدهای HD صدق می‌کند)، چه در غیراین‌صورت HD بایستی جواب بهینه داشته باشد (طبق قضیه دوآلیتی در این‌صورت بایستی P جواب بهینه داشته باشد یعنی شدنی باشد، که این تناقض است پس نتیجه‌ی مهم زیر عاید میگردد.

1) Homogenous Form of Dual

نتیجه. مسأله‌ی پرایمال نشدنی است اگر و فقط اگر فرم متجانس دوآل مسأله نامحدود باشد و بالعکس.

با به‌کار بردن نتایج فوق‌الذکر، دو قضیه‌ی بسیار مهم و اساسی زیر را در دوآلیتی به‌دست می‌آوریم. این دو قضیه به ما اجازه می‌دهد که مسأله دوآل را در جهت حل مسأله پرایمال به‌کار بریم و همچنین الگاریتمی برای حل هر دو مسأله به‌دست آوریم.

۲-۷-۱۱ قضیه اول. با ملحوظ داشتن مسأله پرایمال و دوآل درست یکی از عبارات ذیل صادق می‌باشد:

الف. مسأله‌ی پرایمال دارای جواب بهینه x^* و مسأله‌ی دوآل دارای جواب بهینه w^* بوده و $cx^* = w^*b$.

ب. اگر یکی از مسائل پرایمال یا دوآل نامحدود باشد دیگری دارای جواب شدنی نمی‌باشد.

ج. هر دو مسأله نشدنی هستند.

از این قضیه ملاحظه می‌شود که دوآلیتی کاملاً متقارن نمی‌باشد. بهترین چیزی که می‌توان گفت آن است که:

P دارای بهینه است	$\Leftrightarrow$	D دارای بهینه است
$P(D)$ نامحدود است	$\Leftrightarrow$	$D(P)$ نشدنی است
$P(D)$ نشدنی است	$\Leftrightarrow$	$D(P)$ نامحدود یا نشدنی است
$P(D)$ نشدنی است	$\Leftrightarrow$	$D(P)$ نامحدود در فرم همگن است

در بالا بهینه به معنی بهینه متناهی است و نامحدود به معنی داشتن مقدار نامحدود برای تابع مقصود می‌باشد.

۲-۷-۱۲ قضیه‌ی دوم.قضیه‌ی مکمل زائد [1] مجدداً مسأله‌ی (P) و (D) را به‌صورت زیر درنظر بگیرید :

$$\begin{array}{lll} P: & \text{Min} & z = cx \\ & \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \\ D: & \text{Max} & W = wb \\ & & wA \leq c \\ & & w \geq 0 \end{array}$$

با اضافه نمودن متغیرهای کمکی مسائل فوق‌الذکر را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = cx \\ \text{s.t.} & Ax - u = b \\ & x, u \geq 0 \end{array} \tag{۲-۸}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & W = wb \\ \text{s.t.} & wA + v = c \\ & w, v \geq 0 \end{array} \tag{۲-۹}$$

فرض کنید (x^*, u^*) جواب بهینه ۲-۸ و (w^*, v^*) جواب بهینه ۲-۹ باشند داریم:

$$Ax^* - u^* = b$$

و

$$w^*A + v^* = c$$

1) Complementary slackness Theorem

اگر دستگاه اول را چپ در w^* و دوم را از راست در x^* ضرب کنیم و حاصل اولی را از دومی کم کنیم داریم :

$$\begin{array}{c} (-1)\ \ w^*Ax^* - w^*u^* = w^*b \\ w^*Ax^* + v^*x^* = cx^* \\ \hline w^*u^* + v^*x^* = cx^* - w^*b = 0 \end{array}$$

(قبلاً ثابت نمودیم که $w^*b = cx^*$) پس :

$$w^*u^* + v^*x^* = 0$$

با توجه به این‌که $w^*u^* \geq 0$ و $v^*x^* \geq 0$ پس :

$$w^*u^* = 0 \Rightarrow w_i^*u_i^* = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$v^*x^* = 0 \Rightarrow v_j^*x_j^* = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

اگر قرار دهیم $(j = 1, \ldots, n)$ $v_j = w_{m+j}$ و $v_i = x_{n+i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & ,\ldots, & x_n & x_{n+1} & ,\ldots, & x_{n+m} \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ w_{m+1} & ,\ldots, & w_{m+n} & w_1 & ,\ldots, & w_m \\ \| & & \| & \| & & \| \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array} \qquad (2\text{-}10)$$

یعنی:

$$x_j w_{m+j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$w_i x_{n+i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (2\text{-}11)$$

از ۲-۱۱ نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یکی از مسائل مثبت باشد، قید متناظر آن در مسأله‌ی دیگری فعال می‌باشد (تنگ می‌باشد) و اگر قید در جواب بهینه تنگ (نافذ) نباشد، متغیر متناظر آن در مسائل دیگر صفر می‌باشد.

۲-۱۱ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت. (چرا؟)

$$w^*(Ax^* - b) = 0$$
$$(c - w^*b)x^* = 0 \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

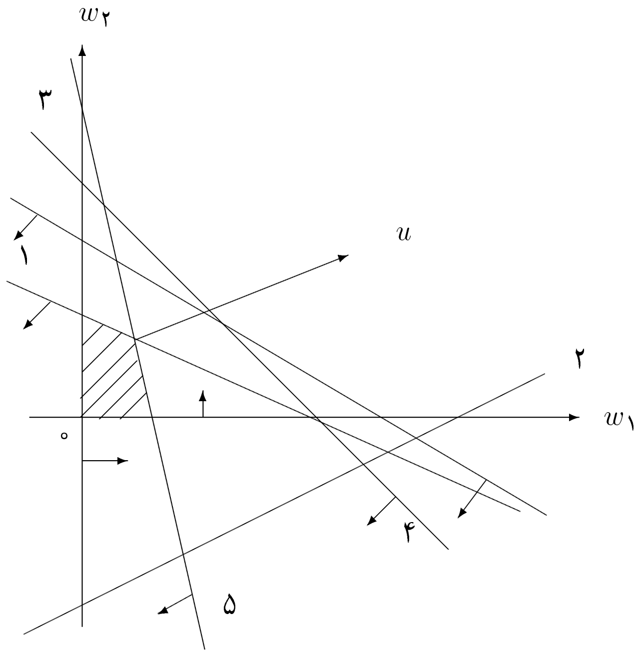
که روابط ۲-۱۲ بیان مطلب فوق‌الذکر می‌باشد.

مطلب فوق متغیرهای دو مسأله را به‌هم مربوط می‌سازد، متغیر x_j با w_{m+j} $(j = 1, \ldots, n)$ و x_{n+i} با w_i $(i = 1, \ldots, m)$ را زوج‌های مکمل می‌نامند.

۲-۷-۱۳ مثال. مسائل زیر را درنظر بگیرید (در حقیقت P پرایمال و دوآل D است) با به‌کار بردن قضیه‌ی مکمل زائدبا حل مسأله‌ی دوآل، جواب بهینه‌ی پرایمال را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{lll} P: & \text{Min} & Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ & \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} D: & \text{Max} & W = 4w_1 + 3w_2 \\ & \text{s.t.} & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & & w_1 - 2w_2 \leq 3 \\ & & 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\ & & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ & & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$



شکل(۳-۲)حل مسأله‌ی دوآل

با توجه به این‌که دوآل دارای دو متغیر می‌باشد، این مسأله را به‌صورت ترسیمی حل می‌کنیم. حل ترسیمی مسأله در شکل (۳-۲) نشان داده شده است. جواب بهینه مسأله عبارت است از $w_1^* = \frac{4}{5}$ و $w_2^* = \frac{3}{5}$ و مقدار تابع مقصود برابر با $w^* = 5$ خواهد بود، با توجه به این‌که ۳ تا از قیدها یعنی قید (۲)، (۳) و (۴) از نقطه بهینه نمی‌گذرند پس $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ چون $w_1^* > 0$ و $w_2^* > 0$ پس قید اول و دوم بایستی تنگ باشد یعنی:

$$\begin{cases} x_1^* + 3x_5^* = 4 \\ 2x_1^* + x_5^* = 3 \end{cases}$$

که از این دستگاه حاصل می‌گردد $x_1^* = 1$ و $x_5^* = 1$ و همان‌طوری‌که انتظار می‌رود $Z^* = 5 = W^*$. بنابراین با استفاده از جواب بهینه‌ی دوآل، جواب پرایمال حاصل گردید.

۲-۷-۱۴ اصل راهنما[1] فرض کنید که راهنمای شما، از شما می‌خواهد که مسأله‌ی P و D را حل نمائید. شما می‌توانید، مسائل را با دست یا کامپیوتر حل کنید و هر الگاریتمی را

1) The Supervisor Principle

که مایل باشید برای حل مسائل به‌کار برید، حتی ممکن است، جواب را حدس بزنید. راهنمای آدم بسیار شکاک می‌باشد و وقتی جواب‌ها x^* برای P و w^* برای D به ایشان نشان می‌دهید و ادعا می‌کنید که به ترتیب جواب‌های بهینه پرایمال و دوآل می‌باشند، او ادعای شما را قبول نمی‌کند مگر این‌که، خود شخصاً مطلب را بررسی نماید. آن‌چه که راهنما باید انجام دهد عبارت است از این‌که، آیا x^* شدنی P و w^* شدنی D و $cx^* = w^*b$ یا نه؟ اگر این سه شرط برقرار باشد، قضیه ضعیف دوآلیتی تضمین می‌کند که x^* واقعاً بهینه‌ی P و w^* در حقیقت بهینه‌ی D می‌باشد. این مطلب تحت عنوان اصل راهنما برای زوج پرایمال و دوآل P نامیده می‌شود.

اصل راهنما برای مسائل بهینه‌سازی، سریع‌ترین روش برای چک نمودن آن است که آیا جواب داده شده بهینه می‌باشد یا بهینه نمی‌باشد. قضیه ضعیف دوآلیتی یک اصل راهنمای بسیار مناسب برای زوج پرایمال - دوآل مسائل برنامه‌ریزی خطی فراهم می‌نماید. در مقایسه‌ی این مطلب با وضعیت مسائل برنامه‌ریزی صحیح و بهینه‌سازی غیر محدب که نمی‌توان شرایط بهینگی خوبی ارائه داد تا بر مبنای آن اصل راهنمای مناسب جهت چک نمودن بهینگی به دست آورد. ملاحظه می‌گردد که یکی از خواص مهم مسأله برنامه‌ریزی خطی، وجود اصل راهنمای سریع و بسیار ساده می‌باشد که برای زوج پرایمال - دوآل آن ارائه گردید ولی متاسفانه برای بسیاری از مسائل بهینه‌سازی رسیدن به چنین ابزاری ممکن نمی‌باشد.

۲-۸ دوآل شدنی یک پایه[1]

مسأله Lp که با روش سیمپلکس حل می‌گردد، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \qquad\qquad (۲\text{-}۱۳) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(در صورت استاندارد مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی) که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m$. فرض کنید B پایه برای مسأله‌ی فوق بوده و بردار متغیر اساسی

1) Dual Feasibility of a Basic

متناظر آن x_B و c_B ضرائب x_B در تابع مقصود باشد. با توجه به آن‌چه گذشت $w = c_B B^{-1}$، جواب دوآل متناظر آن می‌باشد. مسأله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P: \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = c_B x_B + c_N x_N \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x_B \, , \, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

$$D: \quad \begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ & wb \leq c_B \\ & wN \leq c_N \\ & w \ \text{آزاد} \end{aligned}$$

جواب اساسی ۲-۱۳ که متناظر B می‌باشد از حل دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{cases} x_N = 0 \\ B x_B = b \end{cases}$$

و پایه پرایمال شدنی است اگر وفقط اگر جواب دستگاه فوق در شرط $x_B = B^{-1} b \geq 0$ صدق نماید و جواب دوآل متناظر پایه B از حل دستگاه:

$$wB = c_B \tag{۲-۱۴}$$

عاید می‌گردد. جواب دوآل دستگاه ۲-۱۴ ممکن است شدنی نباشد، مگر این‌که این جواب در قیدهای مسأله‌ی دوآل صدق نماید. این جواب دوآل شدنی و B پایه‌شدنی دوآل است اگر

$$wN \leq c_N$$

از این‌رو، B یک پایه دوآل شدنی است اگر $w = c_B B^{-1}$ و این جواب در قیدهای $wA \leq c$ صدق کند. یعنی:

$$[c - (c_B B^{-1}) A] \geq 0$$

با توجه به این‌که $\bar{c} = c - (c_B B^{-1})A$ بردار ضرایب نسبی در این Lp است (نسبت به پایه B). بنابراین یک پایه برای Lp ۲-۱۳ دوآل شدنی است اگر وفقط اگر بردار ضرایب نسبی آن نامنفی باشد. و این همان شرط بهینگی در سیمپلکس پرایمال است توجه نمائید روش سیمپلکسی که تا به‌حال یعنی در فصول گذشته در رابطه باآن صحبت نمودیم به آن روش سیمپلکس پرایمال گویند. روش سیمپلکس دوآل در همین فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت. بنابراین پایه‌ای مانند B برای مسأله‌ی ۲-۱۳ یک پایه‌ی بهینه و x_B بردار اساسی متناظر با آن بردار اساسی بهینه است اگر وفقط اگر آن‌ها هم پرایمال و هم دوآل شدنی باشند.

روش **سیمپلکس پرایمال** از یک پایه پرایمال شدنی شروع می‌نماید و جلو می‌رود تا در شرط دوآل شدنی بودن نیز صدق نماید(در صورت داشتن بهینه متناهی). بنابراین تمامی پایه‌های جدول سیمپلکس جز پایه متناظر جدول نهائی دوآل شدنی نمی‌باشند. در حقیقت وقتی یک پایه دوآل شدنی در روش سیمپلکس پرایمال به‌دست آمد، کار خاتمه می‌یابد.

۲-۸-۱۵ تفسیر اقتصادی بیشتری از مسأله‌ی دوآل.

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی دوآل آن را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$P: \qquad \begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

$$D: \qquad \begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

فرض کنید B یک پایه‌ی بهینه‌ی برای مسأله‌ی پرایمال بوده و C_B، بردار قیمت متناظر آن باشد. فرض کنید BFS متناظر B، یعنی x^* غیرتبه‌گن است. اگر R مجموعه اندیس متغیرهای

غیراساسی باشد(یعنی $R \subseteq \{۱, \ldots, m+n\}$) داریم:

$$z = C_B B^{-۱} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j = w^* b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

اگر b_i یعنی مقدار سمت راست iامین قید را قدری تغییر دهیم(مثبت یا منفی) به‌طوری‌که جواب حاصل شدنی باقی بماند، جواب به دست آمده بهینه است (چرا؟) و اگر z^* مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد و $B_i^{-۱}$ ستون iام $B^{-۱}$، داریم :

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = w_i^* = c_B B_i^{-۱} \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

بنابراین w_i^* میزان تغییرات مقدار بهینه تابع مقصود به‌ازاء یک واحد از افزایش b_i می‌باشد(یعنی وقتی b_i تبدیل به $b_i + ۱$ می‌شود تابع مقصود با اندازه‌ی w_i^* تغییر می‌کند. با فرض این‌که تمامی متغیرهای غیراساسی در سطح صفر باقی می‌مانند و بدون توجه به این‌که جواب شدنی باقی ماند یا نه). چون $w_i^* \geq ۰$ پس z^* افزایش می‌یابد یا ثابت باقی می‌ماند و اگر b_i تبدیل به $b_i - ۱$ شود z^* کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

توجه. کاهش یا افزایش z^* را به‌صورت زیر نیز می‌توان استدلال نمود:

$$z^*_{\text{جدید}} = w^* b_{\text{جدید}} = w^* \begin{pmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_i \pm ۱ \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = w^* \begin{pmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \pm w^* \begin{pmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$z^*_{\text{جدید}} = z^*_{\text{قدیم}} \neq w_i^*$$

از نظر اقتصادی می‌توان w^* را به عنوان قیمت سایه[۱] برای بردار منابع سمت راست ملحوظ داشت. برای توضیح، اگر iامین قید نمایش تقاضا حداقل به اندازه b_i از محصول i باشد و cx نشان دهنده هزینه کلی تولید، در این‌صورت w_i افزایش هزینه‌ی تولید یک واحد اضافی از محصول i می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر w_i منصفانه‌ترین بهایی[۲] است که برای تولید واحد

1) Shadow Price 2) Fair Price

اضافی از محصول i پرداخت می‌گردد.

در حالت کلی درنظر بگیرید که منابعی مانند $b_1, \dots, b_m$ در اختیار داریم و می‌خواهیم محصولاتی مانند $1, 2, \dots, n$ تولید کنیم که سود حاصل از تولید یک واحد از محصول jام برابر با c_j می‌باشد. به چه صورت بایستی محصولات تولید گردد که سود کلی ماکزیمم شود، با فرض این‌که $a_{ij}(j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m)$ مقداری از منبع iام می‌باشد که در تولید یک واحد از محصول jام مصرف می‌گردد. مسأله را می‌توان به‌صورت زیر فرموله نمود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \ge 0 \end{aligned} \tag{**}$$

(x_j سطح تولید محصول j ام می‌باشد.)

پیشنهادی به‌صورت زیر ارائه می‌گردد. منابع $b_1, \dots, b_m$ شما را به‌ترتیب با قیمت هر واحد $w_1, \dots, w_m$ خریداریم. شما به‌جای فروش محصولات مواد اولیه منابع را به ما بفروشید، ما تضمین می‌کنیم که پول دریافتی شما بابت فروش منابع از سود تولید محصول jام شما کمتر نخواهد بود به عبارت دیگر پیشنهاد به این‌صورت است:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \ge c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & w_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{*}$$

در عین حال پیشنهاددهنده به دنبال یافتن wهایی است که پول پرداختی‌اش با در نظر گرفتن قیدهای $(*)$ کمترین شود. به عبارت دیگر دنبال حل مسأله زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = \sum_{i=1}^{m} w_i b_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ge c_j & j = 1, \dots, n \\ w_i \ge 0 & i = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

که این مسأله دوآل مسأله‌ی (**) می‌باشد.

مانند سابق، فرض کنید w_i نشان دهنده‌ی قیمت سایه باشد. قیمت سایه، در حقیقت قیمت منصفانه منابع موجود می‌باشد در این‌جا به یک نکته بسیار مهم تفسیر اقتصادی قیمت‌های سایه اشاره می‌نمائیم و آن این است که اگر تمامی منبع i را در جواب بهینه نتوان برای تولید به‌کار برد، در حقیقت قید متناظر آن در نقطه بهینه تنگ نخواهد بود و قیمت سایه متناظر آن صفر خواهد بود، به عبارت دیگر هر نوع افزایش در این منبع عایدی برای تولیدکننده نخواهد داشت. (چند مثال در این مورد بزنید)

۹-۲ قیمت‌های سایه تحت تبه‌گنی[1]

قبل از شروع بحث مطالبی را که مورد نیاز این بحث می‌باشد می‌آوریم. درک عمیق و تسلط بر نحوه استدلال مطالب اکیداً توصیه می‌گردد. یادآور می‌شویم که مطالب نه تنها در این‌جا بلکه در بسیاری از زمینه‌های بهینه‌سازی کاربرد دارد.

۲-۹-۱۶ تعریف. تابع آفین تابعی است مانند f :

$$f : R^n \longrightarrow R$$

که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = f(x_۱, \dots, x_n) = c^\circ + \sum_{j=۱}^{n} c_j x_j = c_\circ + cx$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که تابع آفین هم محدب است و هم مقعر (ثابت کنید). فرض کنیم :

$$f_i(x) = c_\circ^i + \sum_{j=۱}^{n} c_j^i x_j \qquad (i = ۱, \dots, k)$$

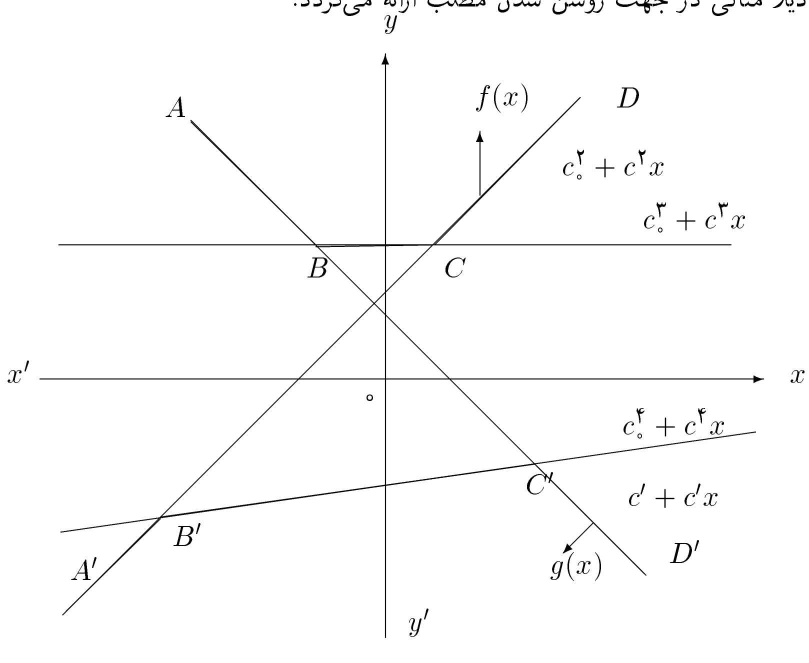
1) Shadow Price Under Degeneracy 2) Pointwise Maximum

k تابع آفینی باشد و $f_i \ : \ S \longrightarrow R$ و S محدب باشد **تابع نقطه‌ای ماکزیمم** [2] و **تابع نقطه‌ای می‌نیمم** [1] به‌صورت زیر تعریف می‌شود به‌ازاء هر $x \in S$:

$$f(x) = \underset{1 \leq i \leq k}{\mathrm{Max}} \left(f_i(x) \right)$$

$$g(x) = \underset{1 \leq i \leq k}{Min} \left(f_i(x) \right)$$

تابع نقطه‌ای ماکزیمم را مورد بحث قرار می‌دهیم. عین مطالب بررسی شده با مختصری تغییرات در رابطه با تابع نقطه‌ای می‌نیمم را می‌توان بررسی نمود قبل از بیان کلی خواص f و g ذیلاً مثالی در جهت روشن شدن مطلب ارائه می‌گردد.



شکل(۴-۲)

شکل ۵-۲ تابع $f(x)$ یعنی نقطه‌ای ماکزیمم در بالای محور به وسیله‌ی نیم‌خط AB و پاره‌خط BC و نیم‌خط CD و تابع $g(x)$ یعنی نقطه‌ای می‌نیمم به وسیله‌ی نیم‌خط $A'B'$ پاره‌خط $B'C'$ و نیم‌خط $C'D'$ نشان داده شده است. همان‌طوری‌که از این شکل پیداست $f(x)$ تابعی است محدب و $g(x)$ تابعی است مقعر که این مطلب را در حالت کلی اثبات خواهیم نمود. هر دو تابع **قطعه‌قطعه خطی** [2] می‌باشند. (البته این زمانی صحیح است که

1) Pointwise Minimum 2) Piecewise Linear

f_iها آفینی باشند).

۲-۹-۱۷ قضیه. تابع $f(x)$ یعنی نقطه‌ای ماکزیمم تابعی است **محدب**.

برهان. باید ثابت کنیم به‌ازاء هر $x_۱$ و $x_۲$ از S و هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داریم :

$$f[\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲] \leq \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda)f(x_۲)$$

قرار می‌دهیم $x = \lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲$ چون S محدب است پس $x \in s$ درنتیجه:

$$f(x) = \max_{۱\leq i\leq k}(f_i(x)) = \max_{۱\leq i\leq k}[c_۰^i + c^i x]$$

فرض کنیم ماکزیمم فوق در اندیسی مانند h اتفاق می‌افتد. پس :

$$f(x) = c_۰^h + c^h x$$

با همین استدلال داریم :

$$f(x_۱) = c_۰^l + c^l x_۱ \geq c_۰^h + c^h x_۱ \quad (\text{چرا؟}) \qquad (a)$$

$$f(x_۲) = c_۰^s + c^s x_۲ \geq c_۰^h + c^h x_۲ \quad (\text{چرا؟}) \qquad (b)$$

طرفین (a) و (b) را به‌ترتیب در λ و $(۱-\lambda)$ ضرب نموده و با هم جمع می‌کنیم داریم :

$$\lambda f(x_۱) + (۱-\lambda)f(x_۲) \geq \lambda(c_۰^h + c^h x_۱) + (۱-\lambda)(c_۰^s + c_۰^s x_۲)$$

یا

$$\lambda f(x_۱) + (۱-\lambda)f(x_۲) \geq c_۰^h + c^h x = f(x)$$

یعنی :

$$f(x) \leq \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda)f(x_۲)$$

$$f[\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲] \leq \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda)f(x_۲)$$

حکم ثابت است. عیناً می‌توان ثابت کرد که $g(x)$ تابعی است مقعر. (ثابت کنید)

۲-۹-۱۸ قضیه. تابع $f(x)$ یعنی نقطه ای ماکزیمم، تابعی است قطعه‌قطعه خطی.

برهان. برای اثبات این‌که یک **تابع قطعه‌قطعه خطی** است. باید ثابت کنیم که اگر S یعنی حوزه تعریف تابع به‌صورت زیر افراز شود:

$$S = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \ldots \bigcup \Gamma_r$$

که در آن:

$$\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = 0 \quad , \quad (j = 1, \ldots, r)\Gamma_j \neq 0$$

۱

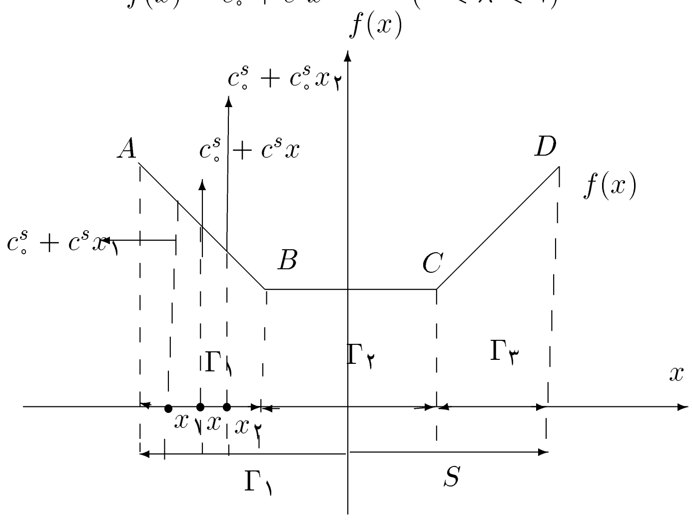
(برای $i \neq j$) آن‌گاه اگر به‌ازاء هر x_1 و x_2 از Γ_j: $(j = 1, \ldots, r)$

$$f(x_1) = c_0^s + c^s x_1$$

$$f(x_2) = c_0^s + c^s x_2$$

و$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ باید داشته باشیم :

$$f(x) = c_0^s + c^s x \qquad (0 < \lambda < 1)$$



شکل(۵-۲)

۱) توجه(مهم.) مطالبی را که از خواننده خواسته می‌شود قلم به‌دست گرفته و ثابت کنند، از اصولی‌ترین روش یادگیری است. از این‌رو توجه به این توصیه‌ها از ضرورت آموزش می‌باشد.

شکل (۲-۶) تابع $f(x)$ از سه پاره‌خط AB و BC و CD تشکیل شده است.
فرض کنیم:

$$f(x) = c_{\circ}^h + c^h x$$

اگر $h = s$.
در این‌صورت حکم ثابت است. اگر $h \neq s$ باید داشته باشیم:
(فرض خلف)

$$\begin{aligned} f(x) &= c_{\circ}^h + c^h x > c_{\circ}^s + c^s x \\ &= \lambda c_{\circ}^s + (۱-\lambda) c_{\circ}^s + c^s[\lambda x_۱ + (۱-\lambda) x_۲] \\ &= \lambda [c_{\circ}^s + c^s x_۱] + (۱-\lambda)[c_{\circ}^s + c^s x_۲] \\ &> [c_{\circ}^h + c^h x_۱] + (۱-\lambda)[c_{\circ}^h + c^h x_۲] \\ &= c_{\circ}^h + c^h[\lambda x_۱ + (۱-\lambda) x_۲] = c_{\circ}^h + c^h x = f(x) \end{aligned}$$

یعنی $f(x) > f(x)$ و طبق اصل تثلیث قوی این ممکن نیست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

پس یعنی ثابت کردیم درصورتی‌که f_iها آفینی باشند،$f(x) = \underset{۱\leq i\leq k}{\mathrm{Max}}(f_i(x))$ یک تابع قطعه‌قطعه خطی و محدب است.

عیناً می‌توان ثابت کرد که تحت همان شرایط تابع $g(x)$ **تابع قطعه‌قطعه خطی** می‌باشد. (ثابت کنید.) با این مقدمات به بررسی قیمت‌های سایه تحت تبه‌گنی می‌پردازیم.

حال مسأله‌ی پرایمال P و دوآل D به همان‌صورتی‌که در ۲-۱۵ و ۲-۱۶ داده شده‌اند را درنظر بگیرید و فرض کنید که یک جواب بهینه تبه‌گن در دست می‌باشد. تا زمانی‌که مشتق Z در معادله‌ی ۲-۱۷ نسبت به b_i، w_i^* باقی بماند، (به مفهوم معمولی از مشتق) درحالی‌که تمامی پارامترها b_k و $(k \neq i)$ و x_jها $(j \in R)$ در سطح کنونی خود نگه‌داشته شوند، ممکن است منعکس‌کننده قیمت سایه واقعی نباشد. (توضیح این‌که ممکن است چندین w جواب بهینه دوآل باشند و مشتق یکی از آن‌ها را می‌دهد.) یعنی معادله ۲-۱۸ ممکن است معتبر

نباشد. در حقیقت، همان‌طوری‌که بعداً خواهیم دید، z^* ممکن است برحسب b_i تابع مشتق‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر، یک آشوب جزئی در b_i ممکن است. پایه‌ی بهینه موجود را نشدنی نماید که تغییر در پایه مورد نیاز باشد.

به عبارت دقیق‌تر، فرض کنیم که مسأله‌ی D در ۲-۱۶ شدنی است، به‌طوری‌که مسأله‌ی P به‌ازاء هر مقدار بردار b نامحدود نمی‌باشد. اگر $z^*(b_i)$ مقدار بهینه تابع مقصود برحسب پارامتر سمت راست b_i فرض شود، تا زمانی‌که b_i در ناحیه تغییر کند و P شدنی باقی می‌ماند، با توجه به این‌که دوآل شدنی و پرایمال شدنی است، پس D جواب **بهینه متناهی** دارد و با توجه به قضایای ثابت شده، D دارای **بهینه رأسی** می‌باشد، یعنی:

$$\text{مقدار بهینه مشترک } P \text{ و } D = w^* = z^*(b_i) = \mathrm{Max}\{w^j b, j = ۱, \ldots, E\}$$

که در آن $k = \{w^۱, w^۲, \ldots, w^E\}$ مجموعه‌ی نقاط رأسی ناحیه شدنی مسأله‌ی D می‌باشد.

پس :

$$z^*(b_i) = \mathrm{Max}\{(w_۱^j, \ldots, w_m^j)\begin{pmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad | \quad (w_۱^j, \ldots, w_m^j) \in k\}$$

یا

$$z^*(b_i) = \mathrm{Max}\{w_i^j b_i + \sum_{\substack{l \neq i \\ l=۱}}^{m} w_l^j b_l \quad | \quad w^j \in k\}$$

$$z^*(b_i) = \mathrm{Max}\{w_\circ^j + w_i^j b_i \quad | \quad j = ۱, \ldots, E\}$$

که در آن

$$w_\circ^j = \sum_{\substack{I=i \\ I \neq i}}^{m} w_I^i b_I$$

مقدار ثابتی است برای j و پس

$$f_j(b_i) = w_\circ^j + w_i^j b_i \qquad (j = ۱, \dots, E)$$

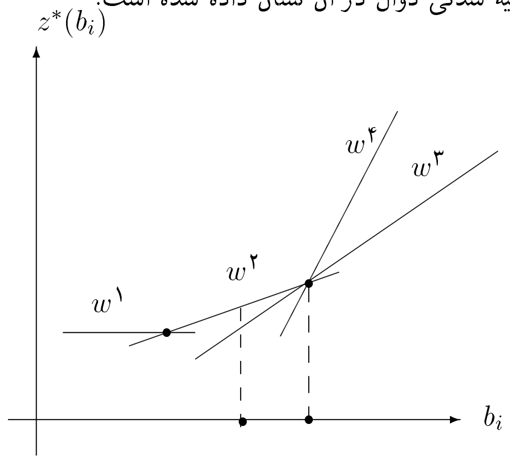
$$z*(b_i) = \underset{۱\leq j\leq \mathrm{E}}{Max}[f_j(b_i)] \tag{۲-۱۹}$$

با توجه به آن‌چه گذشت $z^*(b_i)$ یک تابع نقطه‌ای ماکزیمم می‌باشد که ثابت کردیم محدب و قطعه‌قطعه خطی است.

توجه کنید ناحیه‌ای که P را شدنی نگه‌می‌دارد یک چند وجهی است مانند F که در آن ناحیه $bd < \circ$ برای تمامی جهت‌های رأسی دورشونده ناحیه شدنی D، زیرا فرض بر این است که P شدنی است پس D نمی‌تواند نامحدود باشد.

در جمع‌بندی $z^*(b_i)$ یک تابع نقطه‌ای ماکزیمم می‌باشد که حوزه تعریف آن F است. و با توجه به این‌که افزایش b_i ناحیه شدنی P را تنگ‌تر می‌کند پس تابع $z^*(b_i)$ یک تابع نانزولی برحسب b_i می‌باشد؛ یعنی با افزایش b_i، $z^*(b_i)$ یا ثابت می‌ماند یا افزایش پیدا می‌کند.

برای توضیح شکل ۷-۲ ملاحظه شود. این شکل از چهار تابع آفینی تشکیل شده است؛ که نقاط رأسی ناحیه شدنی دوآل در آن نشان داده شده است.



شکل(۶-۲)

تغییرات z^* به عنوان تابعی از b_i داده شده است. درنظر بگیرید $\beta_۱ = b_i$ در این نقطه $z^*(b_i)$ مشتق‌پذیر می‌باشد، در حقیقت $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^۲$ که سازگاری کامل با ۲-۱۸ دارد. اما در نقطه

$b_i = \beta_2$، $z^*(b_i)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد، به عبارت دیگر $z^*(b_i)$ در این نقطه گره دارد. توجه نمائید که برای $b_i = \beta_2$ مسأله‌ی دوآل دارای جواب بهینه‌ی چندگانه w^2، w^3، w^4 می‌باشد، و این مستلزم آن است که پرایمال در بهینه جواب تبه‌گن داشته باشد. این مطلب را تحت عنوان قضیه‌ی زیر ثابت می‌کنیم.

۲-۹-۱۹ قضیه. بهینگی چندگانه دوآل مستلزم بهینگی تبه‌گنی در پرایمال می‌باشد.

برهان. فرض کنید D در بهینه جواب چندگانه دارد و x^* بهینه غیرتبه‌گن پرایمال می‌باشد. به عبارت دیگر اگر S_D^* مجموعه‌ی جواب های بهینه دوآل باشد به‌طوری که $\mathrm{Card}(s_D^*) > 1$، در این‌صورت :

$$\forall w^* (w^* \in S_D^* \longrightarrow w^* b = c x^*)$$

و B پایه بهینه متناظر x^* باشد. پس x^* متناظر تنها پایه B می‌باشد و جواب بهینه متغیرهای دوآل از رابطه $wB = c_B$ به‌دست می‌آید که منحصربه‌فرد است و این خلاف فرض می‌باشد، پس بایستی x^* تبه‌گن باشد.

به روش دیگر می‌توان مطلب فوق را اثبات نمود.

قیدهای دوآل را درنظر بگیرید:

قیدهای دوآل	متغیرهای پرایمال متناظر آنها
$wa_1 \leq c_1$	x_1
$wa_2 \leq c_2$	x_2
$\vdots$	$\vdots$
$wa_n \leq c_n$	x_n

برای سهولت در بیان می‌توان فرض کرد که $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)$ باشد که درآن $x_j^* > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ (این مطلب به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌نماید.) پس با توجه

به قضیه‌ی مکمل زاید در جواب بهینه باید داشته باشیم :

$$w_1^* a_1 = c_1$$
$$\vdots$$
$$w_m^* a_m = c_m$$

یعنی:

$$w^* B = c_B$$

که از آن حاصل می‌شود $w^* = c_B B^{-1}$ که منحصر به‌فرد است و این خلاف فرض می‌باشد. از این‌رو بایستی x^* تبه‌گن باشد. در نتیجه تعداد مؤلفه‌های مخالف صفر کمتر از m می‌باشد. باز هم به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌شود که فرض کنیم $x^* = (x_1^*, \ldots, x_q^*, 0, \ldots, 0)$ می‌باشد که در آن $x_j^* > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, q)$. در نتیجه باتوجه به آن‌چه گفته شد، در بهینگی قیدهای زیر از دوآل به‌صورت معادله می‌باشد.

$$w^* a_1 = c_1$$
$$\vdots$$
$$w^* a_q = c_q$$

در نتیجه $\text{rank}[a_1, \ldots, a_q] = q$. برای تشکیل پایه بایستی $m - q$ از ستون‌های دیگر به‌صورتی انتخاب گردند که $\{a_1, \ldots, a_q\}$ تشکیل پایه دهند، که تمامی این پایه‌ها متناظر x^* خواهد بود. بنابراین جواب‌های بهینه چندگانه متناظر پایه‌های متفاوتی می‌شود که همگی آن‌ها متناظر x^* است. توجه کنید که عکس مطلب ممکن است همواره صادق نباشد. یعنی اگر x^* بهینه تبه‌گن باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که دوآل بهینه چندگانه دارد. زیرا اگر $B_1, \ldots, B_t$ همگی متناظر x^* باشند، ممکن است :

$$w^* = c_{B_1} B_1^{-1} = c_{B_2} B_2^{-1} = \cdots = c_{B_t} B_t^{-1}$$

یک جواب منحصربه‌فرد باشد. در این مورد به مثال زیر توجه نمائید.

شکل (۷-۲)

$$\begin{array}{llllll}
\text{Min} & Z = & -3x_1 & & & \\
\text{s. t.} & & x_1 & & \le & 7 \\
 & & & x_2 & \le & 5 \\
P: & & 5x_1 & +7x_2 & \le & 70 \\
 & & & x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}$$

با توجه به شکل ملاحظه می‌گردد که تمامی نقاط BD بهینه مسأله‌ی P می‌باشد و نقطه‌ی D یک جواب رأسی تبه‌گن است. دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود. برای نوشتن دوآل ابتدا قیدها را در عدد (۱-) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Min} & Z = & -3x_1 & & & \\
\text{s. t.} & & -x_1 & & \ge & 7 \\
 & & & -x_2 & \ge & -5 \\
 & & -5x_1 & -7x_2 & \ge & -70 \\
 & & & x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max} & W = & -7w_1 & -5w_2 & -70w_3 & \\
\text{s. t.} & & -w_1 & & -5w_3 & \le -3 \\
 & & & -w_2 & -7w_3 & \le 0 \\
 & & & w_1, w_2, w_3 \ge 0 & &
\end{array}$$

صورت استاندارد پرایمال چنین است:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & Z = & -۳x_۱ & & & & & \\
\text{s.t.} & & x_۱ & & +x_۳ & & & = ۷ \\
& & & x_۲ & & +x_۴ & & = ۵ \\
& & ۵x_۱ & +۷x_۲ & & & +x_۵ & \leq ۷۰
\end{array}
$$

$$x_j \geq ۰ \quad j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

x_B	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	RHS
$x_۳$	$\boxed{۱}$	۰	۱	۰	۰	۷
$x_۴$	۰	۱	۰	۱	۰	۵
$x_۵$	۵	۷	۰	۰	۱	۷۰
$z_i - c_j$	۳	۰	۰	۰	۰	$z^* = ۰$

x_B	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	RHS
$x_۱$	۱	۰	۱	۰	۰	۷
$x_۴$	۰	$\boxed{۱}$	۰	۱	۰	۵
$x_۵$	۰	۷	-۱	۰	۱	۳۵
$z_i - c_j$	۰	۰	-۳	۰	۰	$z^* = -۲۱$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	
$x_۱$	۱	۰	۱	۰	۰	۷
$x_۲$	۰	۱	۰	۱	۰	۵
$x_۵$	۰	۰	-۱	$\boxed{-۷}$	۱	۰
$z_j - c_j$	۰	۰	-۳	۰	۰	$z^* = -۲۱$

جواب بهینه‌ی مسأله $x^* = (۷, ۵, ۰, ۰, ۰)$ می‌باشد که یک جواب تبه‌گن است، که پایه متناظر آن $B_۱ = [a_۱, a_۲, a_۵]$ اکنون برای این پایه داریم :

$$w^* = (w_۱^*, w_۲^*, w_۳^*) = C_B B_۱^{-۱} = (-۳, ۰, ۰) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۷ & ۱ \end{pmatrix} = (-۳, ۰, ۰)$$

برای پایه $B_۲$، $x_۴$ را وارد می‌کنیم، داریم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	۱	۰	۱	۰	۰	۷
x_2	۰	۱	$-\frac{1}{7}$	۰	$\frac{1}{7}$	۵
x_4	۰	۰	$\boxed{\frac{1}{7}}$	۱	$-\frac{1}{7}$	۰
$z_i - c_j$	۰	۰	-۳	۰	۰	$z^* = -21$

$$B_2 = [a_1, a_2, a_4](w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (-3, 0, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = (-3, 0, 0)$$

به سادگی دیده می‌شود که $B_3 = [a_1, a_2, a_3]$.

واز اینجا نیز $wB = C_B$،

$$w^* = (-3, 0, 0)$$

ملاحظه می‌گردد:

$$(-3, 0, 0) = c_{B_1}B_1^{-1} = c_{B_2}B_2^{-1} = c_{B_3}B_3^{-1}$$

و اما از روی شکل نیز مطالب به سادگی دیده می‌شود:

$$w_1 a_1 = c$$

$$a_1 = (1, 0)$$

$$c = (-3, 0)$$

$$w_1^* a_1 = c \Rightarrow w_1^* = -3$$

$$w_3^* = 0 \ , \ w_2^* = 0$$

ملاحظه می‌گردد که x^* تبه‌گن می‌باشد ولی بهینه دوآل همان:

$$w^* = (-3, 0, 0)$$

است (که البته تبه‌گن است)یعنی دوآل بهینه چندگانه ندارد. پس خاصیت فوق متقارن نیست و به‌شکل زیر در جمع‌بندی بیان می‌گردد:

الف. اگر دوآل بهینه چندگانه داشته باشد جواب بهینه پرایمال تبه‌گن است.

ب. اگر پرایمال جواب بهینه تبه‌گنی داشته باشد. نمی‌توان نتیجه گرفت که دوآل بهینه چندگانه دارد. اکنون از معادله ۲-۱۸ می‌توان **مشتق جهت‌دار یک‌طرفی** (مشتق سمت راست و مشتق سمت چپ) $z^*(b_i)$ را نسبت به b_iتعریف نمود. **مشتق سمت راست** که آن را با $\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i}$ نشان می‌دهیم میزان تغییرات در z^* در رابطه با افزایش در b_i را نشان می‌دهد، یعنی :

$$\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \text{Max}\{w_i^j \text{ است } b_i \text{ یک نقطه رأسی بهینه دوآل در } w^j\} \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

عیناً **مشتق سمت چپ** که آن را به $\frac{\partial^- z^*}{\partial b_i}$ نشان می‌دهیم، مقدار منفی تغییرات در z^* را وقتی b_i کاهش پیدا می‌کند نشان می‌دهد. مانند بالا با ملحوظ داشتن معادله ۲-۱۸ داریم :

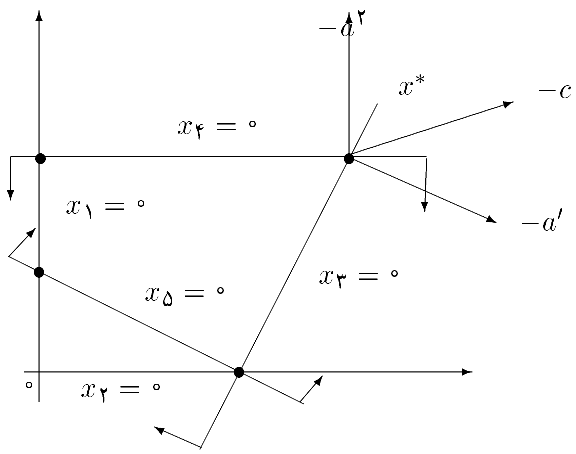
$$\frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = \text{Min}\{w_i^j \text{ است } b_i \text{ یک نقطه رأسی بهینه دوآل در } w^j\} \qquad (۲\text{-}۲۱)$$

از معادلات ۲-۲۰ و ۲-۲۱ به‌ترتیب قیمت‌های سایه سمت راست و سمت چپ متناظر iامین مؤلفه‌ی بردار سمت راست حاصل می‌گردد. توجه کنید که اگر x^* غیرتبه‌گن باشد در این صورت نقطه‌ی رأسی بهینه‌ی دوآل منحصر به w^* خواهد بود و از آن خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = w_i^*$$

مانند آن‌چه در معادله‌ی ۲-۱۸ ذکر گردید.

۲-۹-۲۰ مثال.



شکل (۸-۲)

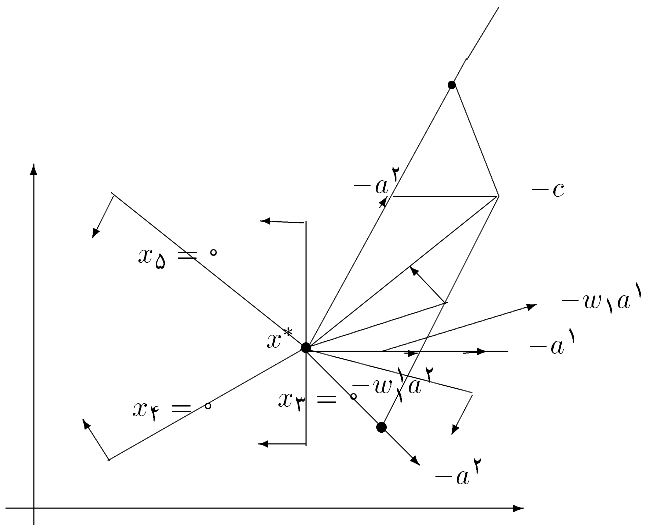
در شکل فوق $m = 3$ و $n = 2$، x_3 و x_4 و x_5 متغیرهای کمکی می‌باشند که متناظر ۳ قید مسأله هستند. a^1 و a^2 و a^3 گرادیان‌های این ۳ قید می‌باشند. توجه کنید چون ناحیه شدنی نیم‌فضا $Ax \geq b$ (یعنی $a^i x - b_i \geq 0$ $i = 1, 2, 3$) پس $-a^1$ و $-a^2$ و$-a^3$ به سمت خارج می‌باشند. توجه کنید که هر پایه دوآل دو متغیر اساسی دارد. در این شکل مسأله جواب بهینه منحصربه‌فرد x^* دارد. پس دو قید از قیدهای دوآل به‌صورت تساوی می‌باشند.

با توجه به شکل می‌توان نوشت $w_1(-a_1) + w_2(-a_2)$ با $w_1 a_1 + w a_2 = c$ که در آن w_1 و w_2 هر دو مثبت می‌باشند و به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌گردند. واین بدین معنی است که یک نقطه رأسی منحصربه‌فرد در ناحیه شدنی دوآل وجود دارد که $w^* = c_B B^{-1}$ (w_1 و w_2 متغیرهای اساسی و w_3 و w_4 و w_5 متغیرهای غیراساسی می‌باشند و w_4 و w_5 دو متغیر کمکی در قیدهای دوآل می‌باشند.) چون ماکزیمم در معادله‌ی ۲-۱۸ منحصربه‌فرد است، بنابراین داریم $\frac{\partial z^*}{\partial b_1} = w_1^* > 0$ و $\frac{\partial z^*}{\partial b_2} = w_2^* > 0$ و $\frac{\partial z^*}{\partial b_3} = 0$ قابل توجه می‌باشد که در جدول متناظر x^* داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -(z_3 - c_3) = w_3$$

توجه نمائید که وقتی در امتداد یالی که در آن $x_4 = 0$ حرکت می‌کنیم در جهتی که x_3 افزایش می‌یابد، b_1 به طور حاشیه‌ای افزایش پیدا می‌کند. (چرا؟) واضح است که در این حرکت

مقدار بهینه تابع مقصود تغییر می‌نماید. (کم می‌شود یا زیاد؟) حال شکل (۹-۵) را به‌صورت زیر درنظر بگیرید.



شکل (۹-۲)

x^* جواب بهینه‌ی منحصربه‌فرد مسأله است و تبه‌گن می‌باشد و دو پایه بهینه متناظر این نقطه وجود دارند که عبارتند از $B_1 = [a_1, a_2, a_4]$ و $B_2 = [a_1, a_2, a_3]$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید پایه $[a_1, a_2, a_5]$ دوآل شدنی نمی‌باشد (چرا؟) (توجه کنید که در نقطه‌ی بهینه همه‌ی $z_j - c_j \leq 0$ نیستند (کدامیک؟) علت این امر چیست؟ در جدول سیمپلکس چه اتفاقی می‌افتد وقتی با مسأله‌ای به‌صورت فوق روبرو می‌شویم؟) هر یک از پایه‌های B_1 وB_2 یک نقطه‌ی رأسی بهینه دوآل به‌دست می‌دهند. برای پایه‌ی B_1 داریم $W^{*1} = (w_1^1, w_2^1, w_3^1)$ که در آن $w_1^1 > 0$ و $w_2 > 0$ و $w_3^1 > 0$ که داریم :

$$-w_1^1 a^1 - w_3^1 a^3 = -c$$

و برای پایه‌ی B_2 داریم:

$$-w_2^2 a^2 - w_3^2 a_3 = c$$

که در حقیقت ملاحظه می‌گردد که : $B_۲ \searrow \underbrace{w^{*^۲} = (w_۱^۲, w_۲^۲, w_۳^۲)}_{w_۳^۱ < w_۳^۲}$ که در آن $w_۳^۲ > ۰$ و $w_۲^۲ > ۰$ و $w_۱^۲ > ۰$، پس:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^+ z^+}{\partial b_۱} = w_۱^۱ > ۰ & \frac{\partial^- z}{\partial b_۱} = ۰ = w_۱^۲ \\ \frac{\partial^+ z}{\partial b_۲} = w_۲^۲ > ۰ & \frac{\partial z^-}{\partial b_۲} = ۰ = w_۲^۱ \\ \frac{\partial^+ z}{\partial b_۳} = w_۳^۲ > ۰ & \frac{\partial^- z}{\partial b_۳} = w_۳^۱ > ۰ \end{array}$$

از آن‌چه گذشت خلاصه مطالب فوق چنین خواهد بود:

۱) اگر x^* جواب بهینه غیرتبهگن برای مسأله‌ی پرایمال باشد، در این‌صورت اگر مؤلفه‌ی i ام b یعنی b_i به‌صورتی تغییر کند که پرایمال شدنی بماند، در این‌صورت بهینه دوآل منحصر به‌فرد خواهد بود.

$$w^* = c_B B^{-۱} = (w_۱^*, \ldots, w_m^*)$$

و

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^* \qquad i = ۱, \ldots, m$$

۲) اگر دوآل جواب چندگانه داشته باشد، در این‌صورت جواب بهینه پرایمال تبهگن می‌باشد و چندین پایه متناظر نقطه‌ی بهینه پرایمال خواهد بود، مثلاً $B_t, \ldots, B_۱$ که جواب بهینه‌ی دوآل متناظر آن عبارت خواهد بود از

$$w_r^* = (w_۱^{*r}, \ldots, w_m^{*r}) = C_{B_r} B_r^{-۱} \qquad r = ۱, \ldots, t$$

$$\text{مهم} \begin{cases} \frac{\partial^+ z}{\partial b_i} = \underset{۱ \le r \le t}{\operatorname{Max}} \{w_i^{*r}\} & i = ۱, \ldots, m \\ \frac{\partial^- z}{\partial b_i} = \underset{۱ \le r \le t}{\operatorname{Min}} \{w_i^{*r}\} & i = ۱, \ldots, m \end{cases}$$

۲-۱۰ لم فارکاس

لم فارکاس که کاربردهای فراوانی در مسائل بهینه‌سازی دارد در این‌جا ذکر می‌گردد. توصیه اکید آن است که خوانندگان هم از نظر جبری و هم از نظر هندسی دقت بیشتری نمایند. قضایای دیگری با استفاده از لم فارکاس اثبات می‌شود که از آن‌ها در این فصل استفاده خواهد شد.

لم فارکاس به‌ما می‌گوید که فقط یکی از دستگاه‌های ذیل دارای جواب می‌باشد.

$$I\begin{cases} Ax \geq 0 \\ Cx < 0 \end{cases} \qquad II\begin{cases} wA = c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $c \in R^n$.

برهان. در دستگاه اولی (I) متغیرها $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و در دستگاه دوم (II) متغیرها $w = (w_1, \ldots, w_m)$ می‌باشند.

لم فوق به ما می‌گوید که اگر xی موجود باشد که $Ax \geq 0$ و $cx < 0$ آن‌گاه دستگاه $wA = c$ و $w \geq 0$ جواب ندارد و اگر wی موجود باشد که $wA = c$ و $w \geq 0$. آن‌گاه xی یافت نمی‌شود که $Ax \geq 0$ و $cx < 0$. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یکی از آن‌ها جواب داشته باشد دیگری دارای جواب نیست. فرض کنیم $wA = c$ ، $w \geq 0$ دارای جواب است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $Ax \geq 0$، $cx < 0$ دارای جواب نیست.

اثبات به برهان خلف می‌باشد. فرض کنیم دستگاه $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ دارای جواب است یعنی x°ی است که :

$$Ax^\circ \geq 0 \quad , \quad cx^\circ < 0 \qquad (a)$$

چون $wA = c$ و $w \geq 0$ طبق فرض دارای جواب، یعنی w°ی وجود دارد که:

$$w^\circ A = c \qquad w^\circ \geq 0 \qquad (b)$$

طرفین (a) را در w° و طرفین (b) را در x° ضرب می‌کنیم، داریم:

$$w^\circ Ax^\circ \geq 0$$
$$w^\circ Ax^\circ = cx^\circ < 0$$

از آن نتیجه می‌شود که $0 \leq cx^\circ < 0$ و این تناقض است و با این تناقض برهان تمام است (چرا تناقض است؟ با استفاده از اصول میدان مرتب به دقت جواب دهید).

حال فرض کنیم که دستگاه I دارای جواب نیست. ثابت می‌کنیم دستگاه II دارای جواب است.

مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$P: \qquad \text{Min} \quad Z = cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq 0$$

توجه کنید که $x^* = 0$ جواب بهینه‌ی مسأله‌ی فوق می‌باشد. مسأله‌ی P را به‌صورت استاندارد برمی‌گردانیم؛ یعنی قرار می‌دهیم $x = x' - x''$ و $x' \geq 0$ و $x'' \geq 0$ خواهیم داشت:

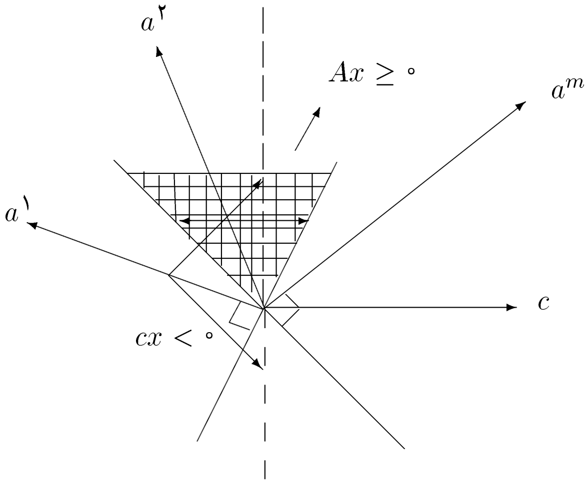
$$P': \qquad \text{Min} \quad Z = cx' - cx''$$
$$\text{s.t.} \quad Ax' - Ax'' - Ix_s = 0$$
$$x', x'', x_s \geq 0$$

$x''^* = x'^* = 0, 0 = x_s^*$ جواب مسأله‌ی P' می‌باشد. با شروع از یک جواب اساسی شدنی اولیه، با به‌کار بردن روش‌های جلوگیری از به‌دور افتادن، پایه‌ی بهینه‌ای برای مسأله‌ی P' می‌توان یافت که برای آن «$z_j - c_j \leq 0$» برای تمامی متغیرهای غیراساسی. فرض کنیم این پایه B باشد، قرار می‌دهیم «$w = c_B B^{-1}$» چون به‌ازاء هر j، $wa_j - c_j = z_j - c_j \leq 0$ پس $wA - c \leq 0, -wA + c \leq 0$ و $-w \leq 0$ پس :

$$wA = c \quad , \quad w \geq 0$$

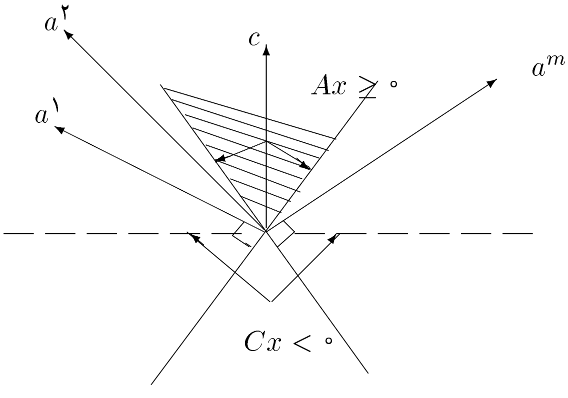
و حکم ثابت است.

لم فارکاس را از نظر هندسی تعبیر می‌نمائیم. این مطلب در شکل‌های (۲-۱۰) و (۲-۱۱)نشان داده شده اند. در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده که وقتی دستگاه I دارای جواب باشد و c در Pos سطرهای A نباشد $wA = c$ و $w \geq 0$ دارای جواب نخواهد بود و در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده که اگر c در Pos سطرهای A باشد، دستگاه $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ نمی‌تواند جواب داشته باشد.



شکل (۲-۱۰)

دراین شکل قسمت هاشور دوبل خورده $Ax \geq 0$ و $cx < 0$ می‌باشد و c در Pos سطرهای A نیست.



شکل(۲-۱۱)

در این شکل $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ دارای جواب نیست و c در Pos سطرهای A است.

۲-۱۱ صورت‌هائی دیگری از لم فارکاس[1]

شق‌های دیگری از لم فارکاس موجود است، که کاربردهای فراوانی دارد. دو صورت از آن را ذیلاً می‌آوریم و بقیه‌ی صورت‌ها در مرجع [] موجود است.

1) Alternate Forms of Farkas Lemma

صورت اول. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب است:

$$I\begin{cases} Ay \leq 0 \\ y \leq 0 \\ cy > 0 \end{cases} \qquad II\begin{cases} wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

برهان. دستگاه II را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$wA + Iv = c$$

$$w, v \geq 0$$

با توجه به لم فارکاس داریم :

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \geq 0 \qquad cx < 0$$

یعنی $Ax \geq 0$، $Ix \geq 0$ و $cx < 0$ با قرار دادن $y = -x$ داریم :

$$\begin{cases} Ay \leq 0 \\ y \leq 0 \\ cy > 0 \end{cases}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

صورت دوم. تنها یکی از دو دستگاه زیر جواب دارد:

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \\ cx < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} wA \leq c \\ w\ \text{آزاد} \end{cases}$$

اثبات به‌عنوان تمرین به‌عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود.

اکنون با استفاده از لم فارکاس قضیه قوی دوآلیتی را به‌صورتی دیگر اثبات می‌کنیم و شرایطی برای بهینگی به‌دست می‌آوریم که تحت عنوان شرایط کاروش - کهن - تاکر[1] نامیده

1) Karush-Kuhn-Tuckar (K.K.T)

می‌شود.

۲-۱۲ شرایط بهینگی کاروش - کهن - تاکر برای قیدهای نامساوی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

که در آن c و b بردار nتایی و mتایی (به‌ترتیب) می‌باشند و A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$.

فرض کنید $\bar{x}$ نقطه‌ی بهینه مسأله فوق‌الذکر است. اگر $S = \{x \mid Ax \geq b \ \& \ x \geq \circ\}$ ناحیه‌ی شدنی مسأله باشد، ثابت می‌کنیم در نقطه $\bar{x}$ جهت بهبوددهنده وجود ندارد. یعنی دستگاه $Gd \geq \circ$ و $cd < \circ$ دارای جواب نمی‌باشد؛ که در آن G گرادیان تمامی ابرصفحه‌های مار بر $\bar{x}$ می‌باشد.

به برهان خلف فرض کنیم دستگاه:

$$\begin{aligned} & Gd \geq \circ \\ & cd < \circ \end{aligned}$$

دارای جواب باشد. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & x = \bar{x} + \lambda d \\ & Gx = G\bar{x} + \lambda Gd = g + \lambda Gd \geq g \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} G \\ \bar{G} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b \\ \circ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix}$$

و $G\bar{x} = g \quad , \quad \bar{G}\bar{x} > \bar{g}$ قرارمی‌دهیم:

$$f(x) = \bar{G}x - \bar{g}$$

تابع $f(x)$ در $\bar{x}$ اکیداً مثبت است. پس به‌ازاء هر x از حومه‌ی $\bar{x}$ مانند $N_\delta(\bar{x})$، $f(x) \geq 0$.
یعنی $x + \varepsilon d \in S$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید)
که در آن $0 < \varepsilon < \delta$ و $d \neq 0$ یکی از جواب های $Gd \geq 0$ و $cd < 0$ می‌باشد پس:

$$c(\bar{x} + \varepsilon d) = c\bar{x} + \varepsilon cd < c\bar{x}$$

و این تناقض است زیرا $\bar{x}$ طبق فرض بهینه بود. پس دستگاه:

$$I) \begin{cases} Gd \geq 0 \\ cd < 0 \end{cases}$$

دارای جواب نیست. یعنی در $\bar{x}$ جهت بهبوددهنده وجود ندارد. از این‌رو دستگاه (طبق لم فارکاس):

$$I \begin{cases} uG = c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

دارای جواب است. G ماتریس گرادیان ابرصفحه‌های مار بر $\bar{x}$ است. فرض کنیم:

$$I = \{i \mid a^i\bar{x} = b_i\}$$

که a^i سطر iام A است و

$$J = \{j \mid e_j\bar{x} = 0\}$$

در حقیقت I اندیس قیدهایی از $Ax \geq b$ و J اندیس قیدها از $Ix \geq 0$ می‌باشند که در $\bar{x}$ تنگ می‌باشند.

پس دستگاه $uG = c$ و $u \geq 0$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i\in I} w_i a^i + \sum_{j\in T} v_j e_j = c \qquad (۲۲-۲)$$

$$w_i \geq 0 \quad i \in I \qquad v_j \geq 0 \quad j \in J \qquad (۲۳-۲)$$

که در آن:

$$\begin{cases} w_i = u_i & i \in I \\ v_j = u_j & j \in J \end{cases}$$

شرایط سه‌گانه زیر یعنی :

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq b \quad , \quad \bar{x} \geq 0 \\ \sum\limits_{i\in I} w_i a^i + \sum\limits_{j\in J} v_j e_j = c \\ w_i \geq 0 \quad i \in I \quad v_j \geq 0 \quad j \in J \end{cases}$$

را شرایط **K.K.T** برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی فوق‌الذکر گویند. تا به‌حال ثابت نمودیم که اگر $\bar{x}$ بهینه‌ی مسأله فوق باشد، شرایط فوق‌الذکر سه‌گانه لازم است برقرار باشد.

از نظر هندسی، معادلات ۲-۲۲ و ۲-۲۳ بیان می‌کند که در نقطه بهینگی، گرادیان تابع مقصود، یعنی C در داخل Pos گرادیان ابرصفحه‌های مار بر این نقطه قرار می‌گیرد، یعنی C را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی نامنفی از گرادیان ابرصفحه‌های مار بر $\bar{x}$ نوشت.

اینک ثابت می‌کنیم که شرایط سه‌گانه فوق‌الذکر برای بهینگی $\bar{x}$ کافی می‌باشد. برای این منظور فرض می‌کنیم x° جواب شدنی مسأله باشد و I و J همان هستند که قبلاً تعریف

شده‌اند. طرفین ۲-۲۲ را در $x^\circ - \bar{x}$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
c(x^\circ - \bar{x}) &= \sum_{i\in I} w_i a^i (x^\circ - \bar{x}) + \sum_{j\in J} e_j v_j (x^\circ - \bar{x}) \\
cx^\circ - c\bar{x} &= \sum_{i\in I} (w_i a^i x^\circ - w_i a^i \bar{x}) + \sum_{j\in J} e_j v_j x^\circ - \sum_{j\in J} e_j v_j \\
&= \sum_{i\in I} w_i (a^i x^\circ - b_i) + \sum_{j\in J} v_j e_j x^\circ - \circ
\end{aligned}$$

زیرا $(j \in J) e_j \bar{x} = \circ$. اما به‌ازاء هر $(i \in I)$ $a^i x^\circ - b_i \geq \circ$ و هر $j \in J$ $e_j \ x^\circ \geq \circ$

پس :

$$cx^\circ - c\bar{x} \geq \circ$$

یعنی :

$$\forall x^\circ (x \in S \longrightarrow c\bar{x} \leq cx)$$

پس $\bar{x}$ بهینه است.

حال ثابت می‌کنیم که معادلات ۲-۲۲ و ۲-۲۳ به مفهوم شدنی بودن دوآل و شرایط مکمل زائد می‌باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم :

$$w_i = \begin{cases} w_i & i \in I \\ \circ & i \in \{1, \dots, m\} - I \end{cases} \qquad v_j = \begin{cases} v_j & j \in J \\ \circ & j \in \{1, \dots, n\} - J \end{cases}$$

در نتیجه معالات ۲-۲۲ و ۲-۲۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\sum_{i=I}^{m} w_i a^i + \sum_{j=1}^{n} e_j v_j = c$$

$w_i(a^i \bar{x} - b_i) = \circ \quad , \quad v_j \bar{x}_j = \circ \qquad$ بازای هر j و i

$$w_i \geq \circ \qquad i = 1, \dots, m$$

$$v_j \geq \qquad j = 1, \dots, n \tag{۲-۲۴}$$

پس ۲-۲۴ را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم :

$$wA + Iv = c$$

$$w(A\bar{x} - b) = 0 \ , \ v\bar{x} = 0$$

پس اگر $\bar{x}$ بخواهد جواب بهینه باشد بایستی سه شرط ذیل برقرار باشد:

PF: (۱ $x \geq 0$ $Ax = b$ یعنی پرایمال شدنی می‌باشد(۱)
DF: (۲ $w, v \geq 0$ $wA + v = c$ یعنی دوآل شدنی (۲)
CS: (۳ $vx = 0$ $w(Ax - b) = 0$ یعنی شرایط مکمل زائد برقرار باشد(۳)

بالعکس اگر PF[1]، DF[2]، CS [3] در نقطه‌ای برقرار باشد آن نقطه بهینه است.

اینک توضیح می‌دهیم که شرایط K.K.T معادل همان قضیه‌ی قوی دوآلیتی است و اگر فرض کنیم x^* بهینه P باشد، w^* و v^*ی هست که :

$$\begin{array}{ll} Ax^* \geq b \& x^* \geq 0 & :\text{PF} \\ w^*A + Iv^* = c \quad w^* \geq 0 \ , \ v^* \geq 0 & :\text{DF} \\ w^*(Ax^* - b) = 0 \quad x^*v^* = 0 & :\text{CS} \end{array}$$

اما با توجه به اینکه:

$$w^*Ax = w^*b$$

$$w^*Ax^* + Iv^*x^* = c^x$$

داریم:

$$w^*Ax^* = cx^*$$

یعنی $cx^* = w^*b$ و این بدان معنی است که مسأله‌ی D شدنی است و بهینه دارد و مقدار بهینه P و D مساوی هستند. (با استفاده از قضیه‌ی دوآلیتی).

شرایط بهینگی کاروش - کوهن -تاکر یکی از ابزار بسیار مهم بررسی نمودن آن است که آیا جواب داده شده بهین می‌باشد. اینک ثابت می‌کنیم در جدول سیمپلکس پرایمال همواره

1) Primal Feasible 2) Dual Feasible 3) Complementazity Slackness

شرط PF و CS برقرار است و الگاریتم به دنبال پایه‌ای است که DF برقرار باشد و در جدول نهایی هر سه شرط PF و DF و CS برقرار می‌باشد. برای بررسی مطلب بیان شده، جدول سیمپلکس (پرایمال) متناظر پایه B که نشان دهنده‌ی مسأله به‌صورت استاندارد کانونی می‌باشد را درنظر بگیرید. جدول متناظر BFS می‌باشد.

	$x_1\, x_2 \ldots x_m$	$x_{m+1} \quad \ldots \quad x_j \quad \ldots \quad x_n$	RHS
x_1	$1 \;\; 0 \ldots \;\; 0$	$\bar{a}_{1m+1} \quad \ldots \quad \bar{a}_{1j} \quad \ldots \quad \bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
x_2	$0 \;\; 1 \ldots \;\; 0$	$\bar{a}_{2m+1} \quad \ldots \quad \bar{a}_{2j} \quad \ldots \quad \bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots \;\; \vdots \quad\;\; \vdots$	$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots$	$\vdots$
x_m	$0 \;\; 0 \ldots \;\; 1$	$\bar{a}_{mm+1} \quad \ldots \quad \bar{a}_{mj} \quad \ldots \quad \bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$
$z_j - c_j$	$0 \;\; 0 \ldots \;\; 0$	$z_{m+1} - c_{m+1} \ldots z_j - c_j \ldots z_n - c_n$	$z^\circ = c_B B^{-1} b$

۱) اولاً چون جدول متناظر یکی از مراحل سیمپلکس می‌باشد (با نامگذاری مجدد متغیرها فرض بر آن شده که متغیرهای اساسی $x_1, \ldots, x_m$ و متغیرهای غیراساسی $x_{m+1}, \ldots, x_n$ می‌باشند) پس $\bar{b}_i \geq 0$ برای $i = 1, \ldots, m$ یعنی پرایمال شدنی می‌باشد.

۲) شرایط CS نیز برقرار است. بایستی برای این منظور ثابت کنیم:

$$w^i(a^i x^\circ - b_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{۲-۲۵}$$

$$v_j x_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{۲-۲۶}$$

چون x° جواب شدنی است. پس معادلات ۲-۲۵ همواره برقرار است. برای اثبات ۲-۲۶ آن را به‌صورت زیر داریم:

$$v_j x_j = (wa_j - c_j)x_j$$

برای $j = 1, \ldots, m \quad , \quad (wa_j - c_j)x_j = 0$ زیرا:

$$wa_j - c_j = z_j - c_j$$

برای متغیرهای اساسی برابر با صفر می‌باشند. برای متغیرهای غیراساسی یعنی $j = m + ۱, \ldots, n$، $x_j = ۰$ پس در هر صورت:

$$z_j - c_j = (wa_j - c_j)x_j = ۰ \quad j = ۱, \ldots, n$$

یعنی در جدول سیمپلکس CS برقرار است.

در نتیجه در پرایمال سیمپلکس به دنبال پیدا نمودن پایه‌ای می‌باشیم که شدنی دوآل باشد یعنی به‌ازاء هر j $wa_j - c_j \leq ۰$ که در حقیقت پیدا نمودن پایه‌ای است که $w = c_B B^{-۱}$ و $wA - c \leq ۰$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید).

شرایط لازم و کافی K.K.T برای بهینگی در مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با استفاده از لم فارکاس اثبات گردید. اینک چند قضیه‌ی دیگر که مورد استفاده فراوان دارد ذیلاً بیان و ثابت می‌کنیم.

۲-۱۲-۲۱ قضیه موتزکینز[1](قضیه‌ای ازشقوق)[2] فرض کنیم A، C و D ماتریس‌هایی از مرتبه‌های $m_۱ \times n$، $m_۲ \times n$ و $m_۳ \times n$ (به ترتیب) باشند، که در آن $m_۱ \geq ۱$. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب می‌باشد:

$$I) \begin{cases} Ax > ۰ \\ cx \geq ۰ \\ Dx = ۰ \end{cases} \qquad (۲-۲۷)$$

$$II) \begin{cases} wA + \mu C + \gamma D = ۰ \\ w \geq ۰ \quad w \neq ۰ \quad \mu \geq ۰ \end{cases} \qquad (۲-۲۸)$$

واضح است که اگر (w, μ, γ) در ۲-۲۸ صدق کند، آنگاه $(\alpha w, \alpha\mu, \alpha\gamma)$ برای هر $\alpha > ۰$ در آن دستگاه صدق خواهد کرد. با به‌کار بردن این حقیقت، می‌توان wها را نرمال نمود، یعنی

2) Motzkin's Theorem 2) Theorem of Alternatives

فرض کرد که $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ ، $w_i \geq 0 \, (i = 1, \dots, m)$ و همین‌طور به‌جای $\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$ که در آن $\gamma^+ \geq 0$ و $\gamma^- \geq 0$ پس ۲-۲۸ با توجه به مطالب بالا به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A^t w^t + c^t \mu^t + D^t \gamma^{+t} - D^t \gamma^{-t} & = 0 \\ 1 w^t & = 1 \end{cases} \qquad (w^t, \mu^t, \gamma^{+t}, \gamma^{-t}) \geq 0$$

(a)

یا:

$$A = \begin{bmatrix} A^t & C^t & D^t & -D^t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به لم فارکاس:

$$I) \begin{cases} AX = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad II) \begin{cases} wA \leq 0 \\ wb > 0 \end{cases}$$

(a) صورت I دستگاه می‌باشد. صورت II چنین خواهد بود:

$$(-x^t, \alpha)(A) \leq 0 \qquad (-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$(-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} A^t & C^t & D^t & -D^t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$(-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

نتیجه می‌شود:

$$-x^t A^t + \alpha \leq 0 \Longrightarrow Ax \geq \alpha > 0 \Longrightarrow Ax > 0$$

$$-x^t c^t \leq 0 \qquad c^t x^t \geq 0 \Longrightarrow cx \geq 0$$

$$\begin{cases} -x^t D^t \leq 0 \\ x^t D^t \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow D^t x^t = 0 \Longrightarrow Dx = 0 \ , \ \alpha > 0$$

و این همان ۲-۲۷ می‌باشد و حکم ثابت است.

۲-۱۲-۲۲ قضیه تاکر[1](قضیه‌ای ازشقوق) فرض کنید A و C و D به‌ترتیب ماتریس‌هایی از مرتبه‌های $m_1 \times n$ و $m_2 \times n$ و $m_3 \times n$ که در آن $m_1 \geq 1$. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب شدنی است و دیگری جواب ندارد.

$$I) \begin{cases} Ax \geq 0, Ax \neq 0 \\ cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \qquad II) \begin{cases} wA + \mu C + vD = 0 \\ w > 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

مانند قضیه قبل اثبات می‌شود(اثبات به عهده خواننده است).

۲-۱۳ پایداری مدل‌های برنامه‌ریزی خطی[2]

برای بیان مطلب، موضوعاتی که موردنیاز می‌باشد ذکر می‌کنیم.

۲-۱۳-۲۳ تعریف. دنباله تابعی است بر N به‌صورت:

$$f : N \longrightarrow R$$

$f(n) = u_n$ نشان می‌دهیم و به‌صورت $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نویسیم. گوئیم $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$ اگر

$$\forall \varepsilon\ \exists N_0\ \forall n(n \geq N_0 \Rightarrow |U_n - \alpha| < \varepsilon)$$

در این‌صورت گوئیم دنباله $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

برای مطالعه بیشتر در زمینه همگرائی سری‌ها، فشردگی، نقاط حدی به منابع [۱۹،۲۰] مراجعه شود.

در مطالعه پایداری مدل‌های بهینه‌سازی، دو نوع پایداری موردنظر می‌باشد.

اولی عبارت است از پایداری عددی الگاریتم موردنظر که جهت حل مسأله به‌کار گرفته می‌شود. الگاریتمی که برای حل مسأله به‌کار می‌رود، در خلال روند محاسبات، مرتکب خطای

1) Tucker's Theorem 2) Stability of the Linear Programming Model

ناشی از گرد نمودن می‌گردد و ممکن است در اثر همین امر، جواب نهائی به‌دست آمده، از مقدار واقعی جواب بسیار دور باشد. الگاریتمی را پایدار گویند، که خطای ناشی از انباشته شدن در خلال انجام عملیات از یک مقدار مشخصی که قبلاً تعیین شده است کمتر باشد.

مسأله‌ی پایداری الگاریتم‌های LPها به‌طور خلاصه قبلاً مورد بررسی قرار گرفت و علاقه‌مندان به مطالعه بیشتر در این زمینه به مرجع [] مراجعه نمایند.

مفهوم دومی در پایداری خود مدل‌ها می‌باشد و آن عبارت است از این‌که تحت تغییرات بسیار کوچکی در مقادیر داده‌ها، چه تغییراتی و چه مقدار در مدل اثر می‌گذارد. در بسیاری از مسائل علمی بهینه‌سازی مقادیر اجزاء داده‌ها، از ملاحظات علمی تقریب زده شده است و خیلی دقیق نمی باشد و بایستی در رابطه با آن‌ها خطائی ملحوظ گردد. حتی اگر مقادیر داده‌ها به دقت اندازه‌گیری شده باشد، ممکن است با تغییرات زمان عوض شود (نمونه آن قیمت نفت و طلا و... در بازار جهانی است). اگر مدل جواب بهینه‌ای با داده‌های ثابت به‌دست بدهد ولی با تغییرات بسیار کوچک مدل نشدنی گردد یا تغییرات زیادی در جواب بهینه حاصل شود در این‌صورت گویند **مدل موردنظر ناپایدار می‌باشد**. یک مدل بهینه‌سازی را پایدار گویند، اگر تغییرات بسیار کوچک ولی دلخواه در مقادیر داده‌ها در مدل باعث تغییرات بسیار کوچک در مقدار بهینه تابع مقصود گردد و تغییرات بسیار کوچکی در جواب بهینه بدهد. ذیلاً فقط در رابطه با پایداری مدل‌های مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی بحث خواهد شد و پایداری مدل‌های بهینه‌سازی در حالت غیرخطی در جلد دیگر این سری از کتاب‌ها بررسی می‌شود.

قبل از این‌که مطلب را در حالت کلی موردبحث قرار دهیم، ابتدا چند مثال جهت روشن شدن موضوع ارائه می‌دهیم:

۲-۱۳-۲۴ مثال. دو دستگاه از معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱$$

و دستگاه:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ = ۲ \end{cases} \tag{۲-۲۹}$$

در ۲-۲۹ یکی از قیدها زائد می‌باشد. در حقیقت ۲-۱۳-۲۴ و ۲-۲۹ معادل هستند. با تغییرات بسیارکوچک مانند ε در سمت راست یکی از ۲-۲۹ با ثابت نگه‌داشتن بقیه‌ی داده‌ها، ۲-۲۹ نشدنی می‌شود. به عنوان مثال دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱ + \varepsilon \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ = ۲ \end{cases}$$

که برای هر مقدار $\varepsilon \neq ۰$ ناسازگار می‌باشد. بنابراین دستگاه ۲-۲۹ ناپایدار است. درحالی‌که ۲-۱۳-۲۴ پایدار می‌باشد و هر تغییر داده‌های آن باعث همان مقدار تغییر در جواب‌های دستگاه می‌گردد. ملاحظه می‌گردد دو دستگاه معادل به مفهوم ریاضی یکی پایدار و دیگری ناپایدار می‌باشد.

مثال دیگری درنظر بگیرید. این مثال از پروفسور د.گیل[۱] می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \text{Max} \quad & x \\ & x \leq ۱ \\ & \alpha x \leq ۰ \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

$x \in R'$ که در آن α یک عدد حقیقی نامنفی است. جواب بهینه‌ی آن بازاء تمامی مقادیر $\alpha > ۰$، $x^* = ۰$ که در نتیجه مقدار بهینه‌ی تابع مقصود $f(\alpha) = ۰$ ولی برای $\alpha = ۰$ $f^*(۰) = ۱$ یعنی مقدار بهینه‌ی آن برابر با ۱ است.

اما در حومه‌ای از $\alpha = ۰$، یک تغییر بسیار ناچیز باعث می‌گردد که مقدار بهینه‌ی تابع

1) Professor D.Gale

مقصود یک‌باره از عدد یک به صفر تبدیل گردد. از این رو این مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ناپایدار می‌باشد(در حومه‌ای از $\alpha = ۰$).

مثال دیگری از پروفسور اس.ام.رابینسون[1] درنظر بگیرید. توجه شود که روش شهودی فوق برای تبیین مطلب می‌باشد. بسیاری از صاحب‌نظران **روش شهودی** را قبول ندارند و **روش مجرد** را مفیدتر می‌دانند.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & z = & ۳x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & +۳x_۴ & \\
\text{s.t.} & & x_۱ & +\frac{۴}{۳}x_۲ & +۲x_۳ & & = \frac{۳}{۲} \\
 & & & x_۲ & +۳x_۳ & & = \frac{۳}{۲} \\
 & & x_۱ & +x_۲ & +x_۳+ & x_۴ & = ۱ \\
 & & x_j & \geq ۰ & j = ۱, & ۲,۳,۴ &
\end{array}$$

$x^* = (۰, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴}, ۰)^t$ جواب بهینه‌ی مسأله می‌باشد و $w^* = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۲})$ جواب بهینه‌ی دوآل مسأله است و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود برابر با یک است. با تغییر ضریب $a_{۱۲}$، در ماتریس تکنولوژی از $\frac{۴}{۳}$ به $(\frac{۴}{۳} - \varepsilon)$ برای $\varepsilon > ۰$ ولی بسیار کوچک، مسأله برمی‌گردد به مسأله‌ی، آشوب شده و برای این مسأله $x^\circ = (\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, ۰)^t$ جواب بهینه است و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود برابر با ۲ می‌گردد و جواب بهینه‌ی دوآل از عبارت خواهد بود از:

$$w^* = (۰, -\frac{۲}{۳}, ۳) + (\frac{۱}{\varepsilon})(\frac{۴}{۳}, -\frac{۴}{۹}, \frac{۴}{۳})$$

و مقدار بهینه دوآل نیز برابر با ۲ خواهد شد. بنابراین LP فوق ناپایدار است.

در مطالعه پایداری یک مدل برنامه‌ریزی خطی که متعلق به دسته‌ی خاصی از مدل‌ها می‌باشد، ممکن است ضروری به نظر برسد، که آشوب مقادیر در مقادیر اجزاء داده‌ها، به‌صورتی انجام شود که در خاصیت موردنظر صدق نماید. بنابراین مدل آشوب شده متعلق به همان دسته خواهد بود. به عنوان مثال مسأله‌ی حمل و نقل متوازن [2]را درنظر بگیرید(مسأله‌ی حمل ونقل متوازن است اگر مجموع عرضه مساوی مجموع تقاضا باشد) چون این مدل یک قید زائد دارد (به‌صورت معادله) از دیدگاه یک LP مدل ناپایداری است. به‌هرحال در دسته‌ی مدل‌های متوازن، ضرایب ماتریس تکنولوژی هرگز تغییر نمی‌کند و مقادیر عرضه و تقاضا یعنی

1) S.M.Robinson 2) Balanced Transpartation Problem

b_j،a_i به‌ازاء هر i و هر j همواره مثبت می‌باشند و $\sum a_i = \sum b_j$. وقتی پایداری مدل‌های متوازن حمل و نقل مورد مطالعه قرار می‌گیرد؛ (تحت آشوب‌هایی در c_{ij}ها یا a_i و b_i ها با حفظ متوازن ماندن مسأله)، ملاحظه می‌گردد که مسأله علیرغم مطالب فوق‌الذکر کاملاً پایدار است. بنابراین در مطالعه‌ی پایداری مدل خاصی با ویژگی خاص، همواره ضرورت دارد، شرایطی را که داده‌ها در مدل صادق هستند به حساب آورده شود، و آشوب‌هایی ملحوظ گردد که ویژگی مدل را به هم نزند.

در این قسمت پایداری دو دسته از مدل‌های LP مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. یکی از این دستجات؛ مدل‌های LP به‌صورت متقارن می‌باشد. و دسته‌ی دیگر مدل‌های کلی LP می‌باشد که در آن‌ها ممکن است بعضی از قیود به‌صورت تساوی یا نامساوی بوده و بعضی متغیرها آزاد باشند.

۲-۱۴ پایداری در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به‌صورت متقارن[1]

قبل از اینکه وارد بحث فوق شویم مطلبی را که مورد نیاز می‌باشد، بررسی می‌نماییم. ثابت کردیم که شرایط K.K.T برای بهینگی عبارتند از PF، DF و CS که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} PF: &\quad Ax \geq b \;\&\; x \geq 0 \\ DF: &\quad wA + v = c \;\&\; w, v \geq 0 \\ CS: &\quad w(Ax - b) = 0 \;\&\; vx = 0 \end{aligned}$$

مسائلی که در آن تابع مقصود، مشروط به قیدهایی می‌نیمم می‌گردد که این قیدها، به‌صورت معادله می‌باشند را می‌توان با تکنیک ضرایب لاگرانژ حل نمود. وقتی قیدها به‌صورت نامساوی هستند، ضرایب لاگرانژ متناظر آن‌ها بایستی در محدودیت علامتی و شرایط مکمل زاید صدق

1) Stability in the Linear Programming in Symmitric Form

نماید. که این شرایط برای مسأله‌ی، زیر بایستی برقرار باشد، به‌صورتی که بیان می‌گردد

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

برای **تابع لاگرانژ**:

$$L(x,w,v) = cx - w(Ax-b) + -vx$$

به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} =& c - wA - v = 0 \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \\ & w(Ax-b) = 0 \\ & vx = 0 \\ & v \geq 0 \qquad w \geq 0 \end{aligned}$$

بیان می‌گردد که همان شرایط K.K.T می‌باشد.

برای مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} P: \qquad \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و دوآل آن یعنی:

$$\begin{array}{lll} D: & \text{Max} & W = wb \\ & & wA \leq c \\ & & w \geq \circ \end{array}$$

با تابع لاگرانژ:

$$L(x, w, v) = cx - w(Ax - b) - vx$$

نقطه (x^*, w^*, v^*) را نقطه زینی[1] تابع $L(x, w, v)$ گویند اگر $w^* \geq \circ$ و $v^* \geq \circ$ و

$$L(x, w^*, v^*) \geq L(x^*, w^*, v^*) \geq L(x^*, w, v)$$

برای هر $w \geq \circ$ و $v \geq \circ$ و هر x برقرار باشد.

۲-۱۴-۲۵ قضیه. نقطه‌ی (x^*, w^*, v^*) **نقطه‌ی زینی** $L(x, w, v)$ است اگر و فقط اگر x^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی P و w^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی D باشند که در آن $v^* = c - w^*A$.

برهان. فرض کنیم x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D باشند در این‌صورت:

$$L(x^*, w^*, v^*) = cx^* - w^*(Ax^* - b) - v^*x^*$$

با توجه به این‌که $v^*x^* = \circ$ و $w^*(Ax^* - b) = \circ$ داریم:

$$L(x^*, w^*, v^*) = cx^*$$

1) Saddle Point

بازاء هر x از ناحیه شدنی

$$L(x,w^*,v^*) = cx - w^*(Ax-b) - v^*x$$
$$= cx - w^*(Ax-b) - (c-w^*A)x = cx - w^*Ax + w^*b - cx + w^*Ax$$
$$= w^*b$$
$$L(x^*,w,v) = cx^* - w(Ax^*-b) - vx^* \leq cx^*$$

اما طبق فرض $cx^* = w^*b$

پس $L(x,w^*,v^*) \geq L(x^*,w^*,v^*) \geq L(x^*,w,v)$. حال فرض می‌کنیم که (x^*,w^*,v^*) نقطه‌ی زینی باشد. ثابت می‌کنیم x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D است. بازاء هر x داریم:

$$L(x,w^*,v^*) \geq L(x^*,w^*,v^*)$$

$$cx - w^*(Ax-b) - v^*x \geq cx^* - w^*(Ax^*-b) - v^*x$$

یا
$$cx - w^*Ax + w^*b - v^*x \geq cx^* - w^*Ax^* + w^*b - v^*x^*$$

$$(c - w^*A - v^*)x \geq (c - w^*A - v^*)x^* \qquad (a')$$

بازاء هر x سمت راست a' مقدار ثابتی است. بایستی $c - w^*A - v^* = 0$ در غیراین‌صورت jی یافت می‌شود که:

$$c_j - w^*a_j - v_j^* < 0$$

که در این‌صورت با انتخاب بردار $x > 0$ تا به اندازه کافی (از نظر قدرمطلق مؤلفه بزرگ) نامساوی بهم می‌خورد. عیناً اگر مؤلفه‌ی مثبت باشد نامساوی با انتخاب مناسب x برقرار نخواهد بود. پس مسأله‌ی دوآل شدنی است. عیناً می‌توان ثابت نمود پرایمال شدنی است و شرایط CS برقرار است.

توجه کنید که در مسأله‌ی P و D حالت تقارنی به‌صورت زیر وجود دارد تمامی قیدها به‌صورت نامساوی هستند (هم در P و هم در D) و متغیرها در هر دو نامنفی هستند، به خاطر

همین است که صورت P را صورت متقارن LP گویند. حال بحث اصلی را شروع می‌نمائیم. مسأله LP را به‌صورت متقارن یعنی:

$$P: \qquad \text{Min} \quad cx$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

که در آن A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ می‌باشد را درنظر می‌گیریم، و پایداری آن را در حالتی‌که A و b و c آشوب می‌شوند مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض براین است که تحت این تغییرات نامنفی بودن متغیرها عوض نمی‌شود. تمامی داده‌ها برای راحتی در ماتریسی به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \begin{pmatrix} A & \vdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $(m+1)(n+1)$، عضوی که در سطر $m+1$ و ستون $n+1$ قرار گرفته همواره صفر می‌باشد. جز این عضو، تمامی اعضای باقیمانده از داده‌ها می‌باشند. حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\psi(A, x, w) = cx - w(Ax - b) = cx + wb - wAx$$

بردار $\bar{x} \in R^n$ و $\bar{w} \in R^m$ تواماً در شرایط نقطه زینی متناظر پرایمال - دوآل LPsهای P و D صدق می‌کند اگر $\bar{x} \geq 0$ و $\bar{w} \geq 0$ و

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w}) \qquad (۲-۳۰)$$

بازاء هر $x \geq 0$ ، $\pi \geq 0$.

توجه کنید در نوشتن **تابع لاگرانژین** در قسمت قبلی نامنفی بودن روی x، به عنوان قید ملحوظ گردید و با ضریب بردار در تابع گنجانده شده است. از این رو نامساوی در شرط

نقطه‌ی پایداری که قبلاً ذکر شد بایستی بازاء هر $x \in R$ برقرار باشد. در این جا شرط نامنفی بودن x در تابع لاگرانژین گنجانده نشده است، بنابراین نامساوی در شرایط نقاط زینی که در این‌جا ذکر گردید بازاء هر $x \geq 0$ برقرار می‌باشد.

حال قضیه‌ی زیر را که جواب‌های بهینه P و D را با نقاط زینی $\psi(A,x,w)$ برقرار می‌نماید بیان و اثبات می‌کنیم. این قضیه بعداً در نتایج پایداری مدل‌های مسائل برنامه‌ریزی خطی متقارن به‌کار برده می‌شود.

۲-۱۴-۲۶ قضیه. اگر $\bar{x} \in R^m$ و $\bar{w} \in R^m$ آن‌گاه $\bar{x}$ بهینه‌ی P و $\bar{w}$ بهینه‌ی D می‌باشند اگر و فقط اگر $(\bar{x},\bar{w})$ تواماً در شرایط نقاط زینی ۲-۳۰ صدق نمایند.

توجه کنید که در این قسمت P همان **مسأله متقارن LP** و D دوآل متناظر آن می‌باشد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\bar{x}$ بهینه‌ی P و $\bar{w}$ بهینه‌ی D باشد. آن‌گاه $(\bar{x},\bar{w})$ یک نقطه‌ی زینی $\psi(A,x,w)$ می‌باشد. با توجه به **شرایط مکمل زائد** و **قضیه‌ی قوی دوآلیتی** داریم:

$$\bar{w}(A\bar{x}-b)=0 \qquad (۲-۳۱)$$

$$c\bar{x}=\bar{w}b \qquad (۲-۳۲)$$

حال برای هر $w \geq 0$ داریم:

$$\psi(A,\bar{x},w)=c\bar{x}-w(A\bar{x}-b)\leq c\bar{x} \qquad (*)$$

زیرا $A\bar{x}-b \geq 0$ (به خاطر شدنی بودن پرایمال در $\bar{x}$) و با توجه به **۲-۳۱** داریم:

$$c\bar{x}=\psi(A,\bar{x},\bar{w}) \qquad (**)$$

و برای هر $x \geq 0$، داریم:

$$\psi(A,x,\bar{w})=cx-\bar{w}(Ax-b)=(c-\bar{w}A)x+\bar{w}b$$

(زیرا $0 \leq c - \bar{w}A \leq 0$ بخاطر شدنی بودن دوآل در $\bar{w}$) $\bar{\pi}b = c\bar{x} \geq \bar{w}b = c\bar{x}$ به‌خاطر ۲-۳۱ اما:

$$c\bar{x} = c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) = \psi(A, \bar{x}, \bar{w})$$

پس:

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w})$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر ۲-۳۰ برقرار باشد، آنگاه $\bar{x}$ بهینه‌ی P و $\bar{w}$ بهینه‌ی D می‌باشند. با توجه به:

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w})$$

بازاء هر $0 \leq x \leq \pi$ داریم:

$$c\bar{x} - w(A\bar{x} - b) \leq c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \qquad (a)$$

و

$$c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \leq cx - \bar{w}(Ax - b) \qquad (b)$$

از (a) نتیجه می‌شود:

$$w(A\bar{x} - b) \geq \bar{w}(A\bar{x} - b) \qquad \text{بازاء هر } w \geq 0 \qquad (c)$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$a^i\bar{x} - b_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

با توجه به این‌که سمت راست (c) مقدار ثابتی است با ملحوظ داشتن $w \leq 0$ و انتخاب مؤلفه‌ی متناظر به‌اندازه کافی بزرگ در مؤلفه‌ی موردنظر عدد منفی بسیار کوچکی به‌دست می‌آید که نمی‌تواند از مؤلفه‌ی متناظر آن در سمت راست بزرگ‌تر باشد، پس ناچاراً $A\bar{x} - b \geq 0$ و چون رابطه برای $x \geq 0$ برقرار است از $\bar{x} \geq 0$ پس $\bar{x}$، جواب شدنی پرایمال می‌باشد. اینک ثابت می‌کنیم $\bar{w}$ جواب شدنی دوآل است.

از (b) داریم بازاء هر $x \geq \circ$

$$(c - \bar{w}A)\bar{x} \leq (c - \bar{w}A)x \qquad (t)$$

بردار سمت چپ بردار ثابتی است، (t) بازاء هر $x \leq \circ$ برقرار می‌باشد. با بحثی مشابه بحث بالا نتیجه می‌شود که:

بازاء هر j، $c_j - \bar{w}a_j \geq \circ$ ، یعنی $\bar{w}$ جواب شدنی دوآل می‌باشد.

اینک ثابت می‌کنیم که شرط CS نیز برقرار است. برای اثبات در ۲-۳۰ به‌جای $w = \circ$ قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$c\bar{x} \leq c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b)$$

یعنی $\bar{w}(A\bar{x} - b) \leq \circ$ چون $\bar{w} \geq \circ$ و $(A\bar{x} - b) \geq \circ$ داریم:

$$\bar{w}(A\bar{x} - b) \geq \circ$$

پس:

$$\bar{w}(A\bar{x} - b) = \circ$$

عیناً اگر در ۲-۳۰ قرار دهیم $x = \circ$ داریم:

$$c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \leq \bar{w}b$$

یعنی پس:

$$(c - \bar{w}A)\bar{x} + \bar{w}b \leq \bar{w}b$$

یعنی، $(c - \bar{w}A)\bar{x} \leq \circ$ از طرفی $c - \bar{w}A \geq \circ$ و $\bar{x} \geq \circ$ پس $(c - \bar{w}A)\bar{x} \geq \circ$

پس $(c - \bar{w}A)\bar{x} = \circ$ یعنی CS برقرار است و حکم ثابت است.

فرض کنیم S_p ناحیه‌ی شدنی P (پرایمال) و S_D ناحیه‌ی شدنی دوآل D و S_P^* و S_D^* به‌ترتیب مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی P و D باشند. قضیه زیر را که شرط لازم و کافی برای محدود بودن S_P^* و S_D^* می‌باشد را بیان و ثابت می‌کنیم.

۲-۱۴-۲۷ قضیه.

۱) S_P^* غیرخالی و محدود می‌باشد اگر و فقط اگر $S_P \neq \circ$ و هیچ $d \neq \circ$ی یافت نشود که:

$$Ad \geq \circ \quad cd \leq \circ \quad d \geq \circ \tag{۲-۳۳}$$

۲) S_D^* غیرخالی و محدود است اگر و فقط اگر S_D غیرخالی بوده و $\mu \neq \circ$ی یافت نشود که:

$$\mu A \leq \circ \quad \mu b \geq \circ, \mu \geq \circ \tag{۲-۳۴}$$

برهان.

۱) فرض کنیم $S_P^* \neq \phi$ و محدود باشد. طبق قضیه‌ی قوی دوآلیتی بایستی هم (P) و هم (D) شدنی باشند. بنابراین:

$$A^t w^t + Iv = c \qquad w \geq \circ \quad u \geq \circ$$

دارای جواب است. طبق لم فارکاس:

$$Ad \geq \circ \quad cd < \circ, y \geq \circ \tag{۲-۳۵}$$

دارای جواب نیست.

حال فرض کنیم که $\bar{x}$ جواب بهینه‌ی پرایمال باشد. پس S_P^* مجموعه‌ی تمام جواب‌های شدنی $Ax \geq b$ و $x \geq \circ$ می‌باشد که $cx = c\bar{x}$. مطلب فوق معادل این است که مجموعه‌ی جواب‌های دستگاه:

$$\begin{aligned} Ax - Is &= b \\ cx \qquad &= c\bar{x} \\ x \geq \circ \quad s &\geq \circ \end{aligned} \tag{۲-۳۶}$$

غیرخالی و محدود می‌باشد. پس دستگاه:

$$\begin{aligned} Ay - It &= 0 \\ cy \qquad &= 0 \\ y, t &\geq 0 \end{aligned}$$

جوابی جز $(y,t) = (0,0)$ ندارد (چرا؟) و این امر مستلزم آن است که:

$$Ad \geq 0 \qquad cd = 0 \qquad d \geq 0 \neq 0 \tag{۲-۳۷}$$

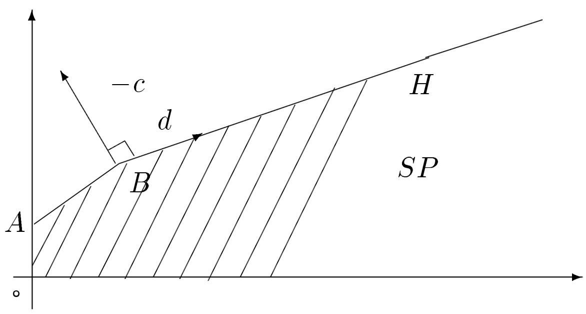
دارای جواب نیست.

۲-۳۷ و ۲-۳۵ توأماً مستلزم ۲-۳۳ می‌باشند. تعبیر هندسی قضیه قبل چیست؟

برای تعبیر هندسی قضیه شکل (۱۲-۲) ملاحظه گردد. در این شکل همان‌طوری‌که در فصول قبل گفته شد. شرط:

$$Ad \geq 0 \qquad d \geq 0, d \neq 0$$

شرط داشتن جهت دورشونده برای مجموعه SD می‌باشد.(کتاب اول ملاحظه گردد)



شکل(۱۲-۲)

در این شکل d جهت دورشونده S_P است و $cd = 0$ و ملاحظه می‌گردد که S_P^* نامحدود می‌باشد.

شرایط ذیل که در بالا اثبات شد (شرط ۲-۳۴ عیناً اثبات می‌شود) یعنی شرایط:

الف. $d \neq \circ$ $\quad d \geq \circ \quad cd \leq \circ \quad Ad \geq \circ$ دارای جواب نیست.

ب. $\mu \neq \circ \quad \mu \geq \circ \quad \mu b \geq \circ \quad \mu A \leq \circ$ دارای جواب نیست. به عنوان **شرایط منظمی**[1] برای قیدهای در پرایمال - دوآل P و D گویند.

۲) اگر S_P^* و S_D^* هر دو غیرخالی باشند و محدود آن‌گاه شرایط الف و ب یعنی شرایط ۲-۳۳و ۲-۳۴ برقرار می‌باشد.

بالعکس فرض کنیم شرایط ۲-۳۳ و ۲-۳۴ برقرار باشد. شرط ۲-۳۳ مستلزم شرط ۲-۳۵ می‌باشد، یعنی:

$$Ad \geq \circ \quad cd < \circ \quad y \geq \circ$$

یعنی:

$$wA + Iv = c$$
$$w \geq \circ \quad v \geq \circ$$

پس دوآل شدنی است. عیناً می‌توان ثابت کرد ۲-۳۴ مستلزم شدنی بودن پرایمال خواهد بود (ثابت کنید). پس طبق قضیه قوی دوآلیتی $S_P^* \neq \phi$ و $S_D^* \neq \phi$. عیناً می‌توان ثابت کرد که هر دو محدود می‌باشند (ثابت کنید).

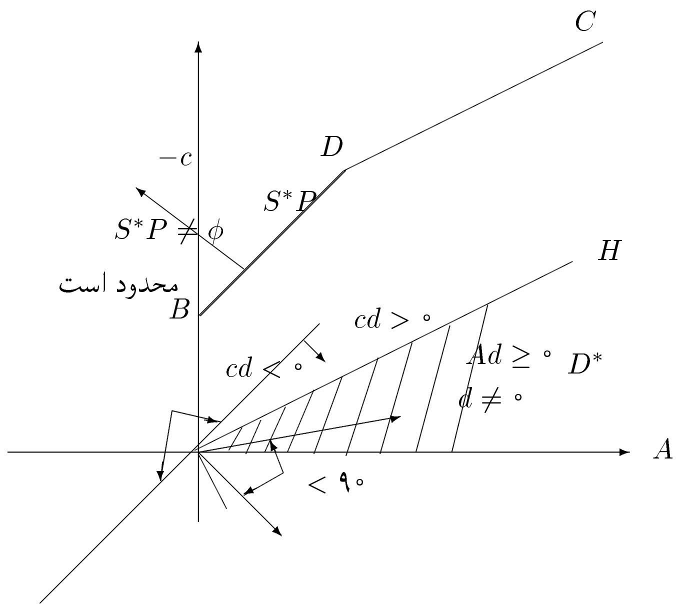
به بیان دیگر شرایط منظمی برای مسائل پرایمال - دوآل به‌صورت زیر می‌باشد:

(۲-۳۸) بازاء هر d که $\quad Ad \geq \circ, d \geq \circ \quad$ آنگاه $\quad cd > \circ$

(۲-۳۹) بازاء هر μ که $\quad \mu \geq \circ,\ \mu A \geq \circ \quad$ آنگاه $\quad \mu b < \circ$

واضح است که ۲-۳۸ معادل ۲-۳۳ و ۲-۳۹ معادل ۲-۳۴ می‌باشد. ۲-۳۸ و ۲-۳۹ را از نظر هندسی تعبیر می‌نمائیم. توجه داشته باشید که درک این تعبیر هندسی اساس کارها در بقیه‌ی قسمت کار است.

1) Regularity Conditions



شکل (۲-۱۳) ناحیه شدنی $AOBDC$ می‌باشد.

در این شکل ناحیه‌ی هاشورزده شده تمامی جهت‌های دورشونده ناحیه شدنی $S_P = \{x|AX \geq b, x \geq \circ\}$ می‌باشند. همان‌طوری‌که گفته شد اگر $AOBDC = S_P$ شرط لازم و کافی برای آن‌که $d \neq \circ$ جهت دورشونده ناحیه‌ی S_P باشد آن است که $Ad \geq \circ$ و $d \geq \circ$ قسمتی که $cd < \circ$ در شکل با علامت نشان داده شده از شکل ملاحظه می‌گردد که $d \in D^*$ $cd > \circ$. (روی شکل تعمق بیشتری بنمائید و تمامی جزئیات را بنویسید). توجه نمائید در شکل فوق دستگاه $d \neq \circ$ و $Ad \geq \circ$ و $d \geq \circ$ و $cd \geq \circ$ دارای جواب نیست یعنی $D^* \cap \{d|cd \leq \circ\} = \phi$ در نتیجه $S_P^* \neq \phi$ و محدود است.

با این مقدمات به بحث اصلی می‌پردازیم.

فرض کنیم A^* یک ماتریس $m \times n$ و b^* یک بردار $m \times ۱$ و C^* یک بردار $n \times ۱$. مسأله‌ی آشوب شده زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P^*: \quad & \text{Min} \quad (c+\lambda c^*)x \\ & \text{s.t.} \quad (A+\lambda A^*)x \geq (b+\lambda b^*) \\ & \qquad\quad x \geq \circ \end{aligned} \qquad (۴\circ\text{-}۲)$$

و دوآل آن:

$$D^*: \qquad \text{Max} \quad (b+\lambda b^*)$$
$$w(A+\lambda A^*) \geq (b+\lambda b^*)$$
$$w \geq \circ \qquad (۲-۴۱)$$

ماتریس

$$A^* = \begin{pmatrix} A^* & \vdots & b^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c^* & \vdots & \circ \end{pmatrix}$$

را ماتریس آشوب متناظر مسأله‌ی آشوب شده می‌نامیم.

مقدار بهینه‌ی تابع آشوب شده را به $f(\lambda, A^*)$ نشان می‌دهیم. در این‌جا شرایطی را برقرار می‌نمائیم که تحت آن شرایط؛ برای هر امکان انتخاب ماتریس آشوب A^* وجود داشته باشد، عددی مانند $\alpha > \circ$ به‌طوری‌که بازاء هر $\circ \leq \lambda \leq \alpha$ ۲-۴۰ جواب بهینه شدنی داشته باشد؛ (یعنی $f(\lambda, A^*)$ موجود و متناهی باشد)؛ و $f(\lambda, A^*)$ پیوسته از راست گردد و

$$f'(\circ, A^*) = \lim_{\lambda \to \circ^+} \frac{f(\lambda, A^*) - f(\circ, A^*)}{\lambda}$$

موجود باشد. این حد یعنی $f'(\circ, A^*)$ را مقدار حاشیه‌ای P نسبت به آشوب A^* می‌نامند.

فرض کنیم S_{P^*} و $S^*_{P^*}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی جواب‌های شدنی P^* و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی P^* باشند. عیناً S_{D^*} و $S^*_{D^*}$ به‌ترتیب مجموعه‌ی جواب‌های شدنی D^* و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه D^* باشند.

۲-۱۴-۲۸ قضیه. برای هر امکان انتخاب ماتریس آشوب A^*، اگر عددی مانند $\alpha > \circ$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که بازاء هر $\circ \leq \lambda \leq \alpha$، مسائل آشوب شده P^* و D^* یعنی مسائل ۲-۴۰ و ۲-۴۱ دارای جواب شدنی باشند، آنگاه شرایط منظمی برقرار می‌باشد، یعنی ۲-۳۳ و ۲-۳۴.

برهان. فرض کنید $(۱, ۱, \ldots, ۱) = e_r \in R^r$. مسأله‌ی آشوب شده‌ای را درنظر بگیرید که $A^* = ۰$ و $b^* = ۰$ و $c^* = -e_n^t$. برای این انتخاب از ماتریس آشوب، طبق فرض قضیه عددی مانند $\tilde{\alpha}$ وجود دارد، به‌طوری‌که P^* یعنی ۲-۴۰ و D^* یعنی ۲-۴۱ دارای به‌ترتیب جواب بهینه‌ی $\tilde{x}(\lambda)$ و $\tilde{w}(\lambda)$ می‌باشند. (بازاء هر $۰ \le \lambda \le \tilde{\alpha}$)

طبق آن‌چه اثبات شد داریم:

$$\begin{aligned}&(c - \tilde{\alpha}e_n^t)\tilde{x}(\tilde{\alpha}) - \tilde{w}(\tilde{\alpha})(A\tilde{x}(\tilde{\alpha} - b)) \le \\ &(c - \tilde{\alpha}e_n)x - \tilde{w}(\tilde{\alpha})(Ax - b) \qquad \text{بازاء هر } x \ge ۰ \qquad (۲\text{-}۴۲)\end{aligned}$$

اگر yای وجود داشته باشد که $Ay \ge ۰$ و $y \ge ۰$ و $y \neq ۰$ با قرار دادن:

$$x = \tilde{x}(\tilde{\alpha}) + y$$

با قرار دادن x در ۲-۴۲ به‌دست می‌آید:

$$۰ \le (c - \tilde{\alpha}e_n^t)y - T\tilde{w}(\tilde{\alpha})Ay$$

چون $y \ge ۰$و $y \neq ۰$ و $\tilde{\alpha} > ۰$ و $\alpha e_n^t y > ۰$ **هم‌چنین چون** $\tilde{w}(\tilde{\alpha}) \ge ۰$ و $Ay \ge ۰$، ۲-۱۴-۲۸ مستلزم آن است که:

$$cy > ۰$$

و این بدان معنی است برقرار می‌باشد. از این‌رو ۲-۳۰ برقرار می‌باشد.

اگر قرار دهیم $A^* = ۰$ و $b^* = e_m$ و $c^* = ۰$ عیناً می‌توان ثابت کرد (ثابت کنید که رابطه ۲-۳۱ برقرار می‌باشد).

۲-۱۴-۲۹ قضیه. اگر شرایط منظمی ۲-۳۰ و ۲-۳۱ برقرار باشد آن‌گاه برای هر انتخاب ماتریس آشوب A^*، عددی مانند $\alpha > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که بازاء هر λ $۰ \le \lambda \le \alpha$ مسائل آشوب شده P^* و D^* جواب بهینه شدنی دارد.

برهان. فرض کنید چنین نباشد. پس یک ماتریس آشوبی مانند A^* وجود دارد، به‌طوری‌که بازاء هرعدد مثبت α_1 به هر اندازه کوچک عدد مثبتی دیگری مانند $\alpha_h < \alpha_1$. که برای آن حداقل یکی از مسائل آشوب شده پرایمال یا دوآل نشدنی می‌باشند. برای $\lambda = \alpha_h$، A^* را طوری انتخاب کنید که در این شرط صدق کند و آن را از این به بعد ثابت بگیرید. فرض کنید مسأله‌ی آشوب شده پرایمال نشدنی باشد، یعنی وقتی $\lambda = \alpha_h$، دستگاه:

$$(A + \alpha_h A^*)x - I_m s = b + \alpha_h b^*, x \geq 0, s \geq 0$$

دارای جواب شدنی (x, s) نمی‌باشد. طبق لم فارکاس این مستلزم آن است که برداری مانند$\mu(\alpha_h)$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_h)(A + \alpha_h A^*) &\leq 0 \\ \mu(\alpha_h)(b + \alpha_h b^*) &> 0 \\ \mu(\alpha_h) &\geq 0 \end{aligned} \qquad (۲-۴۳)$$

واضح است که $\mu(\alpha_h) \neq 0$. می‌توان با تقسیم بر نرم اقلیدسی (در صورت ضرورت) فرض کرد که $\| \mu(\alpha_h) \| = 1$ به‌جای پرایمال آشوب شده، اگر دوآل آشوب شده آن نشدنی باشد (وقتی $\lambda = \alpha_h$) با به‌کار بردن همان بحث‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (A + \alpha_h A^*)y(\alpha_h) &\geq 0 \\ \| y(\alpha_h) \| = 1 \qquad y(\alpha_h) &\geq 0 \\ (c + \alpha_h c^*)y(\alpha_h) &< 0 \end{aligned} \qquad (۲-۴۴)$$

با به‌کار بردن این بحث کراراً، یک دنباله نزولی یکنوا از اعداد مثبت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ که متقارب به صفر می‌باشند به‌دست می‌آید که دارای خاصیت زیر می‌باشند:

برای $h = 1, 2, \dots$ یا دستگاه ۲-۴۳ دارای جوابی مانند $\mu(\alpha_h)$ با $\| \mu(\alpha_h) \| = 1$ یا ۲-۴۴ جوابی مانند $y(\alpha_h)$ دارد یا هر دو دارای جواب می‌باشند. چون برای $h = 1, 2, \dots$ ۲-۴۳ یا ۲-۴۴ یا هر دو دارای جواب می‌باشند، این امکان موجود است که از دنباله $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

یک زیر دنباله‌ای مانند $\{\alpha_{g_i}\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب نمائیم، به‌طوری‌که برای $h = g_1, g_2, \ldots$ یکی از دو دستگاه ۲-۴۳ یا ۲-۴۴ مثلاً ۲-۴۳ همواره جواب داشته باشد و ۱ =|| $\mu(\alpha_{g_h})$ ||
حال دنباله‌ی $\{\mu(\alpha g)_r\}_{r=1}^{\infty}$را درنظر بگیرید که: ۱ =|| $\underset{r=1,\ldots}{\mu(\alpha g_r)}$ || تمامی این بردارها روی کره‌ای به مرکز مبداء و به شعاع واحد قرار دارند. چون کره‌ای به شعاع واحد در R^m مجموعه‌ی فشرده است. از هر دنباله نامتناهی آن یک زیردنباله نامتناهی می‌توان انتخاب نمود که متقارب به نقطه حدی باشد. با به‌کار بردن این خاصیت یک زیر دنباله مانند:

$$\mu(\alpha^1), \mu(\alpha^2), \ldots$$

انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که:

$$\lim_{r\to\infty} \mu(\alpha^r) = \hat{\mu} \qquad (\text{روی مرز کره است } \hat{\mu})$$

چون $\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}, \ldots, \alpha_{g_n}, \ldots$ یکنوا نزولی هستند و به سمت صفر میل می‌نمایند، پس هر زیر دنباله از آن مانند:

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \ldots$$

نیز یکنوا نزولی است و به سمت صفر میل می‌کند پس $\hat{\mu}$ نیز در خاصیت:

$$\hat{\mu}A \leq 0 \qquad \hat{\mu}b \geq 0 \qquad \hat{\mu} \geq 0 \qquad \mu \neq 0$$

صدق می‌نماید. که با ۲-۳۱ در تناقض می‌باشد.

اگر زیردنباله اولیه:

$$\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}, \ldots, \alpha_{g_n}, \ldots$$

به‌صورتی باشند که وقتی $h = g_1, \ldots, \ldots$ دستگاه ۲-۴۴ جواب داشته باشد، با به‌کار بردن بحثی مشابه آن‌چه گذشت $\hat{y}$ی به‌دست می‌آید که با ۲-۳۱ در تناقض خواهد بود. بنابراین اگر ۲-۳۰ و ۲-۳۱ برقرار باشد، برای هر A^*، همواره عدد مثبتی مانند α موجود است که S_{p^*} و $S^*_{P^*}$ بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$ غیرتهی است واین مستلزم آن است که P^* و D^* هر دو جواب بهینه داشته باشند.

۲-۱۴-۳۰ قضیه. اگر شرایط منظمی ۲-۳۰ و ۲-۳۱ برقرار باشد، آن‌گاه برای هر انتخاب از ماتریس آشوب A^* عددی مانند $\alpha' > 0$ موجود است به‌طوری‌که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha'$ مسائل P^* و D^* هر دو دارای جواب بهینه هستند و $f(\lambda, A^*)$ وقتی λ در این بازه تغییر می‌کند محدود می‌باشد.

برهان. ماتریس آشوب A^* را انتخاب کنید و آن را ثابت نگهدارید. طبق قضیه‌ی قبل عدد مثبتی مانند α موجود است، به‌طوری‌که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$، هر دو مسأله‌ی P^* و D^*، جواب بهینه می‌باشند، و $f(\lambda, A^*)$ موجود و در بازه‌ی $\lambda \in [0, \alpha]$ متناهی می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم که عددی مانند $\alpha' < \alpha$ موجود است که $\alpha' \leq \alpha$، به‌طوری‌که برای λ حالتی‌که $0 \leq \lambda \leq \alpha'$؛ $f(\lambda, A^*)$ محدود می‌باشد. با به‌کار بردن همان بحث، مانند قضیه‌ی قبل این نتیجه به‌دست می‌آید. اگر بتوان نشان داد که وقتی:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

یک دنباله یکنواخت نزولی از اعداد مثبت که همه‌ی آن‌ها از α کمتر یا مساوی هستند به سمت صفر متقارب باشند، آن‌گاه مقادیر $f(\alpha_h, A^*)$ بازاء هر $h = 1, 2, \ldots$ محدود می‌باشند.
فرض کنید چنین نباشد آن‌گاه بایستی یک دنباله یکنوا نزولی از اعداد مثبت مانند:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

که

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

به‌طوری‌که؛ برای $\alpha_h < \alpha$ و برای هر $h = 1, 2, \ldots$، $(\{f(\alpha_h, A^*)\}, h = 1, 2, \ldots)$ نامحدود می‌باشد.

فرض کنید $\bar{x}(\alpha_h)$ جواب بهینه P^* باشد وقتی $\lambda = \alpha_h$ برای $h = 1, 2, \ldots$ و $\{f(\alpha_h, A^*) | h = 1, 2, \ldots\}$ نامحدود باشد فقط زمانی‌که $\{\bar{x}(\alpha_h) | h = g_1, g_2, \ldots\}$ نامحدود باشد. در چنین حالتی این امکان وجود دارد که یک زیردنباله

$\{\bar{x}(\alpha_h) \mid h = g_1, g_2, \ldots\}$. به صورتی انتخاب گردد $\{\| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \|\}_{r=1}^{\infty}$ یکنوا صعودی و به سمت $+\infty$ میل نماید. تعریف می‌کنیم:

$$y(\alpha_{g_r}) = \frac{\bar{x}(\alpha_{g_r})}{\| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \|} \quad , r = 1, 2, \ldots$$

از این تعریف داریم:

$$(A + \alpha_h A^*)\bar{x}(\alpha_h) \geq b + \alpha_h b^*$$

$$(c + \alpha_h c^*)\bar{x}(\alpha_h) = f(\alpha_h, A^*) \qquad (۲-۴۵)$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$(A + \alpha_{g_r} A^*)y(\alpha_{g_r}) \geq (b + \alpha_{g_r} b^*)/ \| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \| \qquad r = 1, 2, \ldots \quad (۲-۴۶)$$

همین‌طور داریم $y(\alpha_{g_r}) \geq 0$ و $\| y(\alpha_{g_r}) \| = 1$ برای $(r = 1, 2, \ldots)$ پس $y(\alpha_{gr}) \geq 0$ بازاء هر r $(r = 1, 2, \ldots)$ روی کره‌ای به شعاع واحد قرار خواهند گرفت که یک مجموعه‌ی فشرده می‌باشد. بنابراین این امکان وجود دارد که زیردنباله‌ای مانند دنباله‌ی $y(\alpha_{g_r})$ $(r = 1, 2, \ldots)$ انتخاب گردد که آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$y(\alpha^1), y(\alpha^2), \ldots, y(\alpha^n), \ldots$$

و

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y(\alpha^n) = \bar{y}$$

$\bar{y}$ نیز روی کره مذکور قرار می‌گیرد. این مستلزم آن خواهد بود که $\bar{y} \geq 0$ و ۲-۴۶ داریم:

$$(A + \alpha^p A^*)y(\alpha^p) \geq (b + \alpha^p b^*)/ \| \bar{x}(\alpha^p) \| \qquad (۲-۴۷)$$

چون $\{\alpha^p\}_{p=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از $\{\alpha_r\}_{r=1}^{\infty}$ می‌باشد و $\lim_{r \longrightarrow \infty} \alpha_r = 0$ پس:

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \alpha^p = 0$$

بنابراین $A\bar{y} \geq ۰$، زیرا:

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \parallel \bar{x}(\alpha^p) \parallel = \infty$$

چون $\bar{y} \leq ۰$ و $A\bar{y} \geq ۰$ بایستی داشته باشیم $c\bar{y} > ۰$. اما:

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} f(\alpha^p, A^*)/(\parallel \bar{x}(\alpha^p) \parallel) = c\bar{y}$$

(با توجه به ۲-۴۵) از این رو این حد اکیداً مثبت می‌باشد. بنابراین:

$$f(\alpha^p, A^*) > ۰ \qquad \text{بازاء هر } p \tag{۲-۴۸}$$

حال فرض می‌کنیم که $\bar{w}(\alpha^p)$ جواب بهینه مسأله‌ی D^* باشد بنابراین وقتی:

$$\lambda = \alpha^p \qquad p = ۱, ۲, \ldots$$

داریم:

$$\bar{w}(\alpha^p)(A + \alpha^p A^*) \leq (c + \alpha^p c^*) \tag{۲-۴۹}$$

$$\bar{w}(\alpha^p)(b + \alpha^p b^*) = f(\alpha^p, A^*) \tag{۲-۵۰}$$

چون $\{f(\alpha^p, A^*)|p = ۱, ۲, \ldots\}$ نامحدود است، از ۲-۵۰ داریم $\{\bar{w}(\alpha^p)|p = ۱, ۲, \ldots\}$ نیز نامحدود می‌باشد بنابراین امکان انتخاب دنباله‌ای مانند $\{\bar{w}(\alpha_{q_r})\}_{r=۱}^{\infty}$ از دنباله فوق وجود دارد که $\parallel \bar{w}(\alpha_{q_r}) \parallel > ۰$ (بازاء هر r) و این دنباله یکنوا صعودی و حد آن $+\infty$ باشد. فرض کنید:

$$\mu(\alpha_{q_r}) = \bar{w}(\alpha_{q_r}) / \parallel \bar{w}(\alpha_{q_r}) \parallel$$

با به‌کار بردن همان روش قبلی می‌توان زیر دنباله‌ای از $\{\mu(\alpha_{q_r})\}_{r=۱}^{\infty}$ انتخاب نمود که حد این زیردنباله $\bar{\mu}$ باشد که $\bar{\mu}A \leq ۰$ و $\bar{\mu} \geq ۰$ و

$$\bar{\mu}b = \lim_{t \longrightarrow \infty} f(\alpha_t, A^*)/\bar{w}(\alpha_t)$$

و با توجه به این‌که $\bar{\mu}b < ۰$ پس خواهیم داشت:

$$f(\alpha_t, A^*) < ۰$$

و این متناقض با ۲-۴۸ می‌باشد. از این رو $\{f(\alpha_h, A^*)\}_{h=۱}^{\infty}$ محدود می‌باشد.

۲-۱۴-۳۱ قضیه. فرض کنید شرایط منظمی برای P و D برقرار می‌باشد ماتریس آشوب A^* را انتخاب نمائید و آن را ثابت نگهدارید. عددی مانند $\alpha' > ۰$ انتخاب نمائید. (مانند آن‌چه در قضیه‌ی (۲-۱۶-۲۹) گذشت) فرض کنید $\{\alpha_h\}_{h=۱}^{\infty}$ یک دنباله یکنوا نزولی از اعداد مثبت باشد که:

$$\lim_{h \longrightarrow \infty} \alpha_h = ۰$$

که در آن:

$$\alpha \leq \alpha' \qquad h = ۱, ۲, \ldots$$

فرض کنید $\bar{w}(\alpha_h)$ و $\bar{x}(\alpha_h)$ به ترتیب جواب‌های بهینه‌ی D^* و P^* باشند(وقتی $\lambda = \alpha_h$) آن‌گاه دنباله‌های $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=۱}^{\infty}$ و $\{\bar{w}(\alpha_h)\}_{h=۱}^{\infty}$ محدود می‌باشند

برهان. فرض کنید که این دنباله‌ها محدود نباشند (فرض خلف)، مثلاً $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=۱}^{\infty}$ نامحدود باشد. در این حالت امکان انتخاب یک زیردنباله مانند:

$$\{\bar{x}(\alpha_h) | h = g_۱, g_۲, \ldots\}$$

به‌طوری‌که $\| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \|$، $r = ۱, ۲, \ldots$ اکیداً یکنوا اکیداً صعودی است و به سمت $+\infty$ میل می‌نماید، تعریف می‌کنیم:

$$y(\alpha_{g_r}) = \bar{x}(\bar{\alpha}_{g_r}) / (\| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \|)$$

برای $r = ۱, ۲, \ldots$ از دنباله $\{y(\alpha_{g_r})\}_{r=۱}^{\infty}$ می‌توان یک زیردنباله‌ای انتخاب نمود که به سمت حدی مانند $\bar{y}$ میل نماید (مانند قضیه (۲-۱۶-۲۹)) که در شرایط:

$$A\bar{y} \geq ۰ \qquad \bar{y} \geq ۰$$

صدق می‌نماید و داریم:

$$(c + \alpha_{g_r} c^*) y(\alpha_{g_r}) = f(\alpha_{g_r}, A^*) / \| \bar{x}(\alpha_{g_r}) \|$$

طبق قضیه (۲-۱۶-۲۹) $f(\alpha_{g_r}, A^*)$ محدود می‌باشد و خواهیم داشت $c\bar{y} = ۰$ یعنی:

$$A\bar{y} \geq ۰ \quad \bar{y} \geq ۰\ ,\ \bar{y} \neq ۰ \quad c\bar{y} = ۰$$

که تناقض می‌باشد. پس $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=۱}$ محدود است. عیناً می‌توان ثابت کرد که:

$$\{\bar{w}(\alpha_h)\}_{h=۱}^{\infty}$$

محدود می‌باشد.

۲-۱۵ تفسیر اقتصادی منظمی

۲-۱۵-۳۲ شرایطی بر تحلیل فعالیت مدل. تجارت‌خانه‌ای را درنظر بگیرید که n نوع فعالیت دارد و m نوع محصول تولید می‌کند.

فرض کنید:

$c_j =$ هزینه‌ی انجام یک واحد از فعالیت j باشد $(j = ۱, \ldots, n)$

$a_{ij} =$ اگر iامین کالا نه به عنوان خروجی تولید گردد ونه به عنوان ورودی در فعالیت j موردنیاز باشد.

$a_{ij} > ۰$ تعداد iامین کالا تولید شده به عنوان خروجی وقتی فعالیت j یک واحد صورت گرفته است

$a_{ij} < ۰$ تعداد iامین کالای موردنیاز به عنوان ورودی وقتی فعالیت j یک واحد صورت می‌گیرد.

$b_i =$ می‌نیمم مقدار از کالای iام که توسط این کمپانی بایستی تولید گردد.

$$A = [a_{ij}]^{m\times n}$$

$$b = (b_۱, \ldots, b_m)^t$$

$$c = (c_۱, \ldots, c_n)$$

فرض کنید x_j سطح فعالیت j باشد که صورت گرفته است و $x = (x_۱, \ldots, x_n)^t$.

x را می‌توان به عنوان نقشه تولید ملحوظ داشت، تحلیل فعالیت مدل برای تجارت‌خانه، عبارت است از برآورد محصول خواسته شده و با حداقل هزینه‌ی کلی که به صورت مسأله‌ی

زیر فرموله می‌گردد:

$$P: \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq \circ \end{array}$$

(با داده‌های داده شده در A و b و c).

و مسأله فوق عبارت است از انتخاب سطوح نامنفی از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ که محصولات خواسته شده با حداقل هزینه‌ی کلی برآورد نماید. شرایط منظم بودن مسأله‌ی P عبارت است از نبودن μی که در شرایط ذیل صدق نماید:

$$\mu A \leq \circ \qquad \mu b \geq \circ \qquad \mu \geq \circ \qquad \mu \neq \circ$$

با توجه به قضیه تاکر می‌توان نوشت:

$$(-A^t)\mu^t \geq \circ \qquad b^t\mu^t \geq \circ \qquad I\mu \geq \circ \qquad \mu \neq \circ$$

$$I) \begin{cases} I\mu^t \geq \circ \qquad \mu \neq \circ \\ \begin{pmatrix} -A^t \\ b^t \end{pmatrix} \geq \circ \end{cases} \qquad \text{جواب ندارد}$$

$$II) \begin{cases} (x^t, y)\begin{pmatrix} -A^t \\ b^t \end{pmatrix} + wI^t = \circ \\ x^t \geq \circ \quad , \quad w > \circ \end{cases} \qquad \text{دارای جواب است}$$

$$Ax - by + wI = \circ$$

$$w > \circ \qquad x \geq \circ$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $Ax > b$ (چگونه؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید) این شرط فقط وفقط وقتی برقرار است که تجارت‌خانه قادر به تولید صورت کالا، اکیداً بزرگتر از b باشد،

به عبارت دیگر، درخواست تولید بردار b از کالاهای موردنظر، تمام توان تولید کمپانی را به تحلیل نمی‌برد.

شرط منظم بودن:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

آن است که دستگاه زیر دارای جواب نباشد.

$$Ad \geq 0 \qquad d \geq 0 \qquad d \neq 0 \qquad cd < 0$$

یعنی برای هر بردار نیمه‌مثبت d که $Ad \geq 0$ بایستی از نظر اقتصادی $cd > 0$، این بدان معنی است که برای هر نقشه تولید، که صورت وضعیتی از کالاها را تولید می‌کند(یعنی نتیجه مقدار خالص نامنفی به عنوان خروجی از کالاها می‌باشد)، مقدار کالا یا صفر است و یا متناظر هزینه مثبتی می‌باشد.

۲-۱۶ پایداری در مدل کلی برنامه‌ریزی خطی

در این‌جا صورت کلی مدل برنامه‌ریزی خطی را درنظر می‌گیریم، که در آن ممکن است بعضی از قیود صورت تساوی و بعضی صورت نامساوی داشته باشد وبعضی از متغیرهای ساختاری آزاد و برخی نامنفی انتخاب شوند. با توجه به آن‌چه گفته شد به جای هر قید به‌صورت:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

می‌توان دو نامساوی:

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \qquad (۲-۵۱) \end{aligned}$$

را قرار داد. اگر متغیر x_i آزاد باشد می‌توان نوشت:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$
$$x_i^+, x_i^- \geq 0$$

با به‌کار بردن این تبدیلات مدل برنامه‌ریزی خطی کلی به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی متقارن تبدیل می‌گردد. به‌هرحال هر یک از تبدیلات فوق که صورت پذیرد، LP متقارن حاصل همواره ناپایدار خواهد بود حتی اگر مدل اولی پایدار باشد. برای مثال و توضیح فرض کنید که LP حاصل از تغییرات و تبدیلات صورت متقارن P را دارد که، یک زوج قیود از نوع ۲-۵۱ را دارا می‌باشد. فرض کنید $\bar{\mu}$ بردار ضرایب متناظر قیدهای این LP باشد که در آن $\bar{\mu}_i$های متناظر این زوج قید هر دو عدد ۱ و بقیه‌ی μ_iها صفر باشند، داریم:

$$\bar{\mu}A = (0, \ldots, 1, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} \vdots \\ -a^i \\ a^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu b = (0, \ldots, 1, 1) \begin{pmatrix} \vdots \\ -b_i \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \qquad , \bar{\mu} \neq 0 \;\; , \bar{\mu} \geq 0$$

یعنی دستگاه:

$$\mu A \leq 0 \qquad \mu b \geq 0 \qquad \mu \geq 0 \qquad \mu \neq 0$$

دارای جواب می‌باشد. یعنی شرط منظم بودن برقرار نمی‌باشد.

حال نشان می‌دهیم در حالتی‌که به‌جای:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$
$$x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$$

در این حالت نیز شرط منظم بودن برقرار نخواهد بود.

کافی است در این‌حالت دوآل مسأله را درنظر بگیریم و استدلالی مشابه استدلال فوق را بیان نمائیم (دقیقاً این مطلب را روی کاغذ بیاورید). البته در این‌حالت شرط منظم بودن دوآل مسأله برقرار نخواهد بود.

برای مطالعه عمیق‌تر در این زمینه به [] مراجعه شود.

۲-۱۷ مسأله‌ی مکمل خطی (LCP)[1]

فرض‌کنید $M = [m_{ij}]$ یک ماتریس مربع از مرتبه‌ی n بوده و $q \in R^n$ بردار ثابت و $z \in R^n$ و $w \in R^n$ دو بردار از متغیرها به‌صورت $Z = (z_۱, \dots, z_n)$ و $W = (w_۱, \dots, w_۲)$ باشند؛ آن‌گاه مسأله‌ی مکمل خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} w = q + Mz \\ z^t w = ۰ \\ w, z \geq ۰ \end{cases} \qquad (۲-۵۲)$$

در این‌جا زوج $(i = ۱, \dots, n)$ (w_i, z_i) را زوج مکمل گویند. بحث در رابطه با مسأله‌ی L.C.P بسیار مفصل است و مقالات بسیار زیادی در رابطه با آن به چاپ رسیده است. ما در اینجا درصدد وارد شدن به مسأله نیستیم و فقط می‌خواهیم ثابت کنیم که حل هر LP و دوآل آن منجر به حل یک مسأله‌ی L.C.P می‌گردد. در جلدهای آینده این سری از کتاب‌ها یک جلد مختص این مسأله نوشته خواهد شد. در حالتی که M دارای ساختارهای متفاوتی باشد، الگاریتم‌های خاصی جهت حل آن ارائه شده‌است. علاقه‌مندان می‌توانند به منابع [۷،

1) The Linear Complomentary Problem

۸] مراجعه نمایند. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی متقارن به‌صورت زیر درنظر بگیرید.

$$P: \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & Z = cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

دوآل آن چنین است:

$$P: \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & W = wb \\ \text{s.t.} & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

مسائل P و D را به‌صورت استاندارد برمی‌گردانیم؛ داریم:

$$P': \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & Z = cx + 0u \\ & Ax - Iu = b \\ & x, u \geq 0 \end{array}$$

و

$$D': \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & W = wb + 0v \\ & wA + vI = c \\ & w, v \geq 0 \end{array}$$

فرض‌کنید (x°, u°) بهینه‌ی P' و (w°, v°) بهینه D' باشند. طبق شرایط K.K.T داریم:

$$P.F \begin{cases} Ax^\circ - Iu^\circ = b \\ x^\circ, u^\circ \geq 0 \end{cases} \qquad D.F \begin{cases} w^\circ A + v^\circ I = c \\ w^\circ, v^\circ \geq 0 \end{cases}$$

و

$$C.S \begin{cases} w^\circ(Ax^\circ - b) = 0 \\ (c - w^\circ A)x^\circ = 0 \end{cases}$$

دستگاه‌های فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$u = -b + Ax$$

$$v = c \qquad A^t w$$

$$wu = 0 \quad , \quad vx = 0$$

یا

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

$$(w, v) \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \; (w, v) \geq 0 \qquad (u, v) \geq 0$$

با قرار دادن $W = (w, v)$ و $Z = (u, v)$ و $q = (-b, c)^t$ مسأله‌ی زیر حاصل می‌گردد؛ که یک مسأله L.C.P است و از حل آن جواب هر دو مسأله P' و D' به‌دست می‌آید:

$$w = q + Mz$$

$$z^t w = 0$$

$$w, z \geq 0$$

۲-۱۸ بازی‌های دو نفره با جمع صفر[1]

دو بازیکن A و B را درنظر بگیرید که رقیب همدیگر می‌باشند و کاملاً به‌کار خود مسلط می‌باشند. ماتریسی مانند $A = [a_{ij}]^{m \times n}$ را درنظر بگیرید که ماتریسی بده-بستان (pay-off) نامیده

1) Two-Person Zero-Sum Games

می‌شود به‌صورت زیر:

		بازیکن B					
		۱	۲	$\dots$	j	$\dots$	n
	۱				$\vdots$		
	۲				$\vdots$		
	$\vdots$				$\vdots$		
بازیکن A	i	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	$\dots$
	$\vdots$				$\vdots$		
	m				$\vdots$		

اگر بازیکن A استراتژی i و بازیکن B استراتژی j را انتخاب نماید مقدار a_{ij} مبلغ بازی خواهد بود. اگر $a_{ij} > ۰$ بازیکن A برده و اگر $a_{ij} < ۰$ بازیکن A باخته است. با توجه به‌این‌که هر دو بازیکن به کارخود آگاهی کامل دارند چه استراتژی A و چه استراتژی B انتخاب نماید که برد A ماکزیمم و باخت B می‌نیمم گردد (فرض آن است که اول A بازی می‌کند و بعد B.) مطلب را با یک مثال عددی توضیح می‌دهیم.

۲-۱۸-۳۳ مثال. دو بازیکن A و B را درنظر بگیرید که جدول پرداختی آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

		بازیکن B			
		۱	۲	۳	$\min\limits_{j} a_{ij}$
	۱	۱	۲	۳	۱
بازیکن A	۲	۴	۵	۶	۴
	۳	۷	۸	۹	۷
	$\operatorname{Max}\limits_{i} a_{ij}$	۷	۸	۹	

بازیکن A به این صورت استدلال می‌کند. اگر استراتژی ۱ را انتخاب کنم حداقل یک واحد برنده می‌شوم و اگر ۲ را انتخاب نمایم حداقل ۴ واحد و اگر ۳ را انتخاب نمایم حداقل ۷ واحد برنده می‌گردم.

بازیکن B چنین استدلال می‌نماید. اگر استراتژی ۱ را انتخاب نمایم حداکثر ۷ واحد می‌بازم و اگر ۲ را انتخاب نمایم حداکثر ۸ واحد می‌بازم و اگر ۳ را انتخاب کنم حداکثر ۹ واحد می‌بازم.

پس A استراتژی را انتخاب می‌نماید که حداقل برد را ماکزیمم کند یعنی:

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}(\underset{j}{\mathrm{Min}} a_{ij}) = ۷$$

و B استراتژی را انتخاب می‌نماید که حداکثر باخت او را می‌نیمم کند:

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}(\underset{i}{\mathrm{Max}} a_{ij}) = ۷$$

در این‌جا ملاحظه می‌گردد:

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}(\underset{j}{\mathrm{Min}} a_{ij}) = \underset{j}{\mathrm{Min}}(\underset{i}{\mathrm{Max}} a_{ij}) = ۷$$

حال مثال دیگری را درنظر بگیرید:

جدول پرداختی بازیکن‌های A و B به‌صورت زیر می‌باشند:

		۱	۲	۳	۴	$\underset{j}{min} a_{ij}$
	۱	۵	-۱۰	۹	۰	-۱۰
A	۲	۶	۷	۸	۱	۱
	۳	۸	۷	۱۵	۲	۲
	۴	۳	۴	-۱	۴	-۱
	$\underset{i}{\mathrm{Max}} a_{ij}$	۸	۷	۱۵	۴	۲

در این:

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\underset{i}{\mathrm{Max}}\ a_{ij} = ۴$$

و

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\underset{j}{\mathrm{Min}} a_{ij} = ۲$$

که

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\underset{i}{\mathrm{Max}}(a_{ij}) \neq \underset{i}{\mathrm{Max}}(\underset{j}{\mathrm{Min}}\ a_{ij})$$

گویند در این بازی نقطه زینی ندارد و برای بازیکن‌ها استراتژی محض[1] موجود نیست. از این‌رو به دنبال استراتژی مختلط[2] می‌رویم. حال در حالت کلی بازیکن A را با m استراتژی و بازیکن B را با n استراتژی درنظر می‌گیریم که ماتریس پرداختی $A = [a_{ij}]^m \times n$ می‌باشد، به‌صورت زیر:

بازیکن B

		۱	۲	$\dots$	j	$\dots$	n
	۱				$\vdots$		
	۲				$\vdots$		
	$\vdots$				$\vdots$		
بازیکن A	i	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	$\dots$
	$\vdots$				$\vdots$		
	m				$\vdots$		

فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n)$ بردار احتمال انتخاب بازیکن B و $y = (y_1, \dots, y_m)$ بردار احتمال انتخاب بازیکن A باشد؛ بدین معنی که x_j احتمال انتخاب استراتژی j از طرف بازیکن B و y_iاحتمال انتخاب استراتژی i از طرف بازیکن A باشد. واضح است که:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

و

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \qquad y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

بازیکن A بدین‌صورت استدلال می‌کند. اگر بازیکن B استراتژی j را انتخاب کند با انتخاب برد از y امید بردی به‌صورت زیر دارم:

$$E_j^A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \qquad j = 1, \dots, n$$

پس بایستی من $y_1, \dots, y_m$ را طوری انتخاب نمایم که:

$$\underset{1 \leq j \leq n}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}\right) = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Min}} (E_j)$$

1) Pure Strategy 2) Mixed Strategy

را ماکزیمم نمایم:

یعنی yها بایستی طوری انتخاب شود که:

$$\text{Max} \underset{1 \le j \le n}{\text{Min}} (\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij})$$

بازیکن B نیز به‌همان صورت استدلال می‌نماید. او می‌گوید که اگر بازیکن A استراتژی i را انتخاب نماید با انتخاب بردار x امید باختی به‌صورت:

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \qquad i = 1, \ldots, m$$

پس بایستی x را طوری انتخاب نمایم که ماکزیمم $e_i (i = 1, \ldots, m)$ می‌نیمم گردد یعنی:

$$\text{Min} \underset{1 \le i \le m}{\text{Max}} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

اگر قرار دهیم:

$$\underset{1 \le j < n}{\text{Min}} (\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}) = h$$

و

$$\underset{1 \le i < m}{\text{Max}} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j) = g$$

پس مسأله‌ی بازیکن A عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & h \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge h \qquad j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\
& y_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

و مسأله‌ی بازیکن B عبارت خواهد بود از:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & g & \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq g & i = 1,\ldots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \\ & x_j \geq 0 & j = 1,\ldots,n \end{array}$$

می‌توان همواره فرض نمود که $g > 0$ و h (چرا؟ به دقت این مطلب را ثابت کنید. چون اساس کار در آینده است) پس با تقسیم نامساوی‌ها و مساوی‌های مربوط به g و h دو مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \text{Max}\, h = \text{Min}\frac{1}{h} = \text{Min}\sum_{i=1}^{m}\frac{y_i}{h} & \\ \quad \text{s. t.} & \sum a_{ij}\frac{y_i}{g} \geq 1 \\ \text{بازیکن } A & \sum \frac{y_i}{g} = \frac{1}{h} \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min}\, g = \text{Max}\frac{1}{g} = \text{Max}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{g} & \\ \quad \text{s. t.} & \sum a_{ij}\frac{x_j}{g} \leq 1 \\ & \sum \frac{x_j}{g} = \frac{1}{g} \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

با قرار دادن:

$$(j = 1,\ldots,n) \quad x_j/g = X_j$$

$$(i = 1,\ldots,m) \quad y_i/h = Y_j$$

دو مسأله زیر به‌دست می‌آید که دوآل یکدیگر می‌باشند.

برای بازیکن A :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{m} Y_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} Y_i a_{ij} \geq 1 \qquad j = 1, \ldots, m \\ & Y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

برای بازیکن B داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^{n} X_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq 1 \qquad i = 1, \ldots, m \\ & X_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که با حل یک مسأله L.C.P استراتژی مختلط دو بازیکن A و B جهت رسیدن به نقطه زینی، یعنی نقطه‌ای که A حداکثر برد ممکن و B حداقل باخت ممکن را دارد و احتمال در اینجا به معنی تعداد تکرار نسبت به کل تکرار بازی می‌باشد.

۲-۱۸-۳۴ مثال. یک بازی دو نفره با جمع صفر با ماتریس پرداختی زیر را درنظر بگیرید:

		B ۱	B ۲	B ۳	می‌نیمم سطری
A	۱	۳	-۱	-۳	-۳
A	۲	-۳	۳	-۱	-۳
A	۳	-۴	-۳	۳	-۴
	ماکزیمم سطری	۳	۳	۳	

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}(\underset{j}{\mathrm{Min}} a_{ij}) = -۳ \neq \underset{j}{\mathrm{Min}}(\underset{i}{\mathrm{Max}} a_{ij}) = ۳$$

پس بازی نقطه زینی با استراتژی محض ندارد. از این‌رو از استراتژی مختلط جهت به‌دست آوردن آن استفاده می‌گردد. با توجه بدان‌چه گفته شد، مسأله عبارت است از حل LP زیر:

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{Max} & X_۱ & +X_۲ & +X_۳ & & \\ \mathrm{s.t.} & ۸X_۱ & +۴X_۲ & +۲X_۳ & \leq & ۱ \\ & ۲X_۱ & +۸X_۲ & +۴X_۳ & \leq & ۱ \\ & X_۱ & +۲X_۲ & +۸X_۳ & \leq & ۱ \end{array}$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰$$

توجه. برای سهولت امر به اعضای جدول پرداختی عدد ۵ اضافه شده است (علت این امر قبل به عنوان تمرین داده است که از حل آن استراتژی بهینه به‌صورت زیر به دست می‌آید دقیقاً مسأله را حل نمائید) برای B :

$$x_۱^* = \frac{۱۴}{۴۵}, x_۲^* = \frac{۱۱}{۴۵}, x_۳^* = \frac{۲۰}{۴۵}$$

و برای A :

$$y_۱^* = \frac{۲۰}{۴۵}, y_۲^* = \frac{۱۱}{۴۵}, y_۳^* = \frac{۱۴}{۴۵}$$

و

$$z^* = w^* = \frac{۴۵}{۱۹۶}$$

۲-۱۹ خلاصه فصل دوم

در این فصل فرم استاندارد دوآلیتی برای مسأله‌ی

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Min} & Z(x) = cx \\ \mathrm{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq ۰ \end{array} \qquad (۲\text{-}۵۳)$$

به‌صورت:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W(w) = wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq \circ \end{aligned}$$

تعریف شد و اثبات شد که دوآل یک LP، خود آن می‌باشد.

در این فصل صورت مختلط دوآلیتی بیان شد و بیان گردید که ضرورتی ندارد برای نوشتن دوآل یک مسأله آن را به‌صورت کانونی برگردانیم (یادآور می‌شویم که ۲-۵۲ صورت کانونی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد)

تفسیر اقتصادی دوآل از بعد اقتصادی، از منظر مدیریتی و جبری بیان گردید که توصیه می‌گردد در این بخش در مطالعه‌ی مطالب تعمق بیشتری صورت گیرد.

در قضیه ضعیف دوآلیتی که بیان‌کننده رابطه‌ی بین پرایمال و دوآل می‌باشد مطالب زیر ثابت کنید:

۱) اگر x° جواب شدنی پرایمال و w° جواب شدنی دوآل باشد در این‌صورت:

$$cx^\circ \geq w^\circ b$$

۲) اگر $\bar{w}$ و $\bar{x}$ به‌ترتیب جواب‌های شدنی برای دوآل و پرایمال باشند، به‌طوری‌که

$$c\bar{x} = \bar{w}b$$

در این‌صورت $\bar{w}$ بهینه‌ی دوآل و $\bar{x}$ بهینه‌ی پرایمال می‌باشد (این مطلب تحت عنوان اصل راهنما بیان شد.) و از دو قضیه‌ی بالا نتایج زیر حاصل گردید.

الف. اگر دوآل نامحدود باشد، پرایمال نشدنی است ولی نشدنی بودن پرایمال، نامحدود بودن دوآل را نتیجه نمی‌دهد. ثابت شد که اگر x^* بهینه‌ی پرایمال و w^* بهینه دوآل باشد داریم:

$$\begin{cases} w^*(Ax^* - b) = \circ \\ (c - w^*A)x^* = \circ \end{cases}$$

این مطلب تحت عنوان شرایط مکمل زاید بیان گردید (توجه کنید که اصل راهنما نتیجه همین مطلب است. چرا؟)

در تفسیر اقتصادی دوآل گفتیم که اگر یکی از مؤلفه‌های بردار b، مثلاً b_i تغییر کند در صورتی‌که $f^*(b)$ مقدار بهینه تابع باشد، f^* تابعی از b_i خواهد بود. اگر f^* در b_i مشتق‌پذیر باشد

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \frac{\partial f^*}{\partial b_i} = w^*i = c_B B_i^{-1}$$

که w_i^* میزان تغییرات مقدار بهینه‌ی تابع مقصود بازاء یک واحد از افزایش b_i می‌باشد (یعنی وقتی b_i تبدیل می‌شود به $b_i + 1$) که رابطه بین مقدار بهینه تابع مقصود قدیم و جدید برحسب این‌که b_i به $b_i + 1$ یا $b_i - 1$ تبدیل شود به‌صورت $Z^*_{\text{جدید}} = Z^*_{\text{قدیم}} \pm w_i$ می‌باشد. w^* را به عنوان بردار قیمت سایه برای منابع سمت راست یعنی b گویند.

در حالتی‌که $f^*(b_i)$ در نقطه b_i مشتق‌پذیر نباشد، در این‌صورت از مشتق چپ و راست استفاده می‌گردد و قیمت سایه به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{قیمت سایه راست} = \frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \text{Max}\{w_i^j \quad \text{است } b_i \text{ یک نقطه‌ی رأسی بهینه دوآل در } w^j\}$$
$$\text{قیمت سایه چپ} = \frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = \text{Min}\{w_i^j \quad \text{است } b_i \text{ یک نقطه‌ی رأسی بهینه دوآل در } w^j\}$$

در این فصل لم فارکاس بیان گردید.

لم فارکاس در حقیقت ستون فقرات بسیاری از مسائلی است که از این به‌بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد و آن عبارت است از این‌که فقط یکی از دو دستگاه ذیل دارای جواب است.

$$I)\begin{cases} Ax \geq 0 \\ cx < 0 \end{cases} \qquad II)\begin{cases} wA = c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

با استفاده از لم فارکاس شرایط K.K.T که یک شرط لازم و کافی برای بهینگی برای LP می‌باشد به‌صورت زیر به‌دست آمد:

نقطه‌ی x° برای پرایمال و w° برای دوآل بهینه است اگر و فقط اگر:

$$۱)\ Ax_{\circ} \geq b \ \ , \ \ x \geq \circ \qquad PF(\text{پرایمال شدنی})$$

$$۲)\ w_{\circ}A \leq c \ \ , \ \ w_{\circ} \geq \circ \qquad DF(\text{دوآل شدنی})$$

$$۳)\ (c - wA)x_{\circ} = \circ \ \ , \ \ w_{\circ}(Ax_{\circ} - b) = \circ \ \text{شرایط مکمل زاید}$$

ثابت کنید که در اجرای سیمپلکس پرایمال شرایط ۱ و ۳ و در اجرای سیمپلکس دوآل شرایط ۲ و۳ برقرار است. بااستفاده از شرایط فوق قضیه‌ی موتزکینز به‌دست آمد، به‌صورت زیر:

فقط یکی از دو دستگاه زیر دارای جواب است

$$I)\ \begin{cases} Ax > \circ \\ cx \geq \circ \\ Dx = \circ \end{cases} \qquad II)\ \begin{cases} wA + \mu c + \gamma D = \circ \\ w \geq \circ \ , \ w \neq \circ \ , \ \mu \geq \circ \ , \ \gamma \ \text{آزاد} \end{cases}$$

و قضیه‌ی ذیل که معروف به قضیه‌ی تاکر است به‌صورت زیر بیان و ثابت شد.

فقط یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب است

$$I)\ \begin{cases} Ax \geq \circ \ , \ x \neq \circ \\ cx \geq \circ \\ Dx = \circ \end{cases} \qquad II)\ \begin{cases} wA + \mu c + \gamma D = \circ \\ w > \circ \\ \mu \geq \circ \end{cases}$$

در این فصل در رابطه با پایداری مدل‌ها صحبت شد. گفتیم که یک مدل بهینه‌سازی پایدار است اگر تغییرات بسیارکوچک ولی دلخواه در مقادیر داده‌ها در مدل باعث تغییرات بسیار کوچک در مقدار بهینه تابع گردد.

در رابطه با مطلب فوق چند مثال ارائه گردید که توصیه می‌شود در درک عمیق آن‌ها نهایت سعی خود را بنمائید.

در مورد خاص پایداری؛ به مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به‌صورت متقارن اشاره‌ای گردید.

دسته‌ی دیگری از مدل‌ها که پایداری آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد LPهایی است که بعضی از قیود به‌صورت تساوی یا نامساوی می‌باشد. در رابطه با مسأله‌ی LP و دوآل آن تابع لاگرانژ را به‌صورت زیر تعریف نمودیم:

$$L(x,w,v)=cx-w(Ax-b)-vx$$

و گفتیم که نقطه‌ی (x^*,w^*,v^*) یک نقطه‌ی زینی برای تابع $L(x^*,w,v)$ است اگر؛ $w^*\geq \circ$ و $v^*\geq \circ$ و

$$L(x,w^*,v^*)\leq L(x^*,w^*,v^*)\leq L(x^*,w,v)$$

برای هر $w\geq \circ$ و $v\geq \circ$ و هر x.

در این فصل مسأله‌ی مکمل خطی (LCP) به‌صورت زیر بیان گردید:

$$\begin{cases} w=q+MZ \\ w,z\geq \circ \\ w^tz=\circ \end{cases}$$

ثابت شد که مسأله‌ی LP و دوآل آن، مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم، و مسأله بازی دو نفره با جمع صفر را حل می‌نماید.

روش lemke و روش Principle Pivoting برای حل این مسأله بیان شده است.

۲-۲۰ تمرینات

۱) دوآل هر یک از مسائل زیر را بنویسید. بررسی نمائید که دوآل دوآل این مسائل خود مسائل هستند.هم‌چنین مسائل را به‌صورت استاندارد تبدیل نمائید و بررسی نمائید که دوآل مسائلی به‌صورت استاندارد، معادل دوآل مسأله‌ی اصلی است. در هر صورت

مراحل استدلال و استفاده از موارد مورد استفاده را دقیقاً توضیح دهید.

$$
\begin{array}{ll}
a)\ \text{Max} & Z = 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 \\
& -2 \le x_1 \le 8 \\
& 4 \le x_2 \le 14 \\
& -12 \le x_3 \le -8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
b)\text{Max} & Z(x) = & & -17x_2 & & +83x_4 & -5x_5 & & & \\
& & -x_1 & -13x_2 & +45x_3 & & +16x_5 & -7x_6 & & \ge 107 \\
& & & & 3x_3 & -18x_4 & & & +3x_7 & \le 81 \\
& & 4x_1 & & -5x_3 & & & +x_6 & & = -1
\end{array}
$$

$$-10 \le x_1 \le -2$$

$$-3 \le x_2 \le 17$$

$$16 \le x_3, x_4 \le 0$$

$$x_6, x_7 \ge 0$$

x_5 آزاد

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
c)\ \text{Min} & Z = & 3x_1 & -7x_2 & & +6x_4 & +5x_5 & -x_6 & \\
& & 5x_1 & +8x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +11x_6 & = 200
\end{array}
$$

$$5 \le x_j \le 20 \qquad j = 1, \ldots, 6$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
d)\ \text{Min} & Z = & -2x_1 & +13x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +5x_5 & +5x_6 & +10x_7 & \\
\text{s.t.} & & x_1 & -x_2 & & +4x_4 & -x_5 & +x_6 & -4x_7 & = 5 \\
& & x_1 & -x_2 & & +7x_4 & -2x_5 & +3x_6 & -3x_7 & \ge -1 \\
& & & 5x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & -x_6 & -2x_7 & \le 5 \\
& & & 3x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & -x_7 & = 2
\end{array}
$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, 7)$$

۲) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad Z(x) = cx$$
$$l_i \leq a^i x \leq k_i \quad i = ۱, \dots, m$$

که در آن

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

دوآل مسأله‌ی فوق را بنویسید. شرایط مکمل زاید را برای مسأله به دست آورید. چه شرطی بایستی روی ماتریس A گذاشته شود تا مسأله شدنی گردد. (به عبارت دیگر چه شرایطی بایستی روی A گذاشته شود تا مسأله شدنی گردد.)

۳) LP زیر را درنظر بگیرید که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$. دوآل مسأله را بنویسید. با به‌کار بردن قضیه‌ی دوآلیتی و دوآل این مسأله ثابت کنید که اگر مسأله شدنی باشد، آن‌گاه می‌نیمم مقدار $z(x)$ در این مسأله متناهی است اگر و فقط اگر c را بتوان به‌صورت ترکیب خطی از سطرهای A نوشت. با به‌کار بردن این ثابت کنید که $z(x)$ یا در تمام نقاط ناحیه شدنی مقدار ثابت k را انتخاب می‌نماید، یا از پائین نامحدود می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

۴) مسأله زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

دوآل فاز اول مسأله را با به‌کار بردن کامل متغیرهای تصنعی بنویسید. دوآل فاز اول و شرایط مکمل زاید را برای بهینگی جفت مسائل پرایمال - دوآل بنویسید.

۵) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx - b^t y \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & -A^t y \geq -c^t \\ & x \geq ۰, y \geq ۰ \end{aligned}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ از مرتبه‌ی $m \times n$ و $b \in R^m$ و $c \in R^n$.

ثابت کنید که LP فوق یا نشدنی است یا بهینه متناهی دارد و مقدار بهینه تابع مقصود برابر با صفر است.

۶) مسأله زیر را درنظر بگیرید که مدل متناظر یک مسأله‌ی حمل و نقل است.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = ۱, \ldots, n \\ & \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = ۱, \ldots, m \\ & x_{ij} \geq ۰ \qquad i = ۱, \ldots, m \quad j = ۱, \ldots, n \end{aligned}$$

دوآل مسأله را بنویسید. با به‌کار بردن داده‌های زیر و با استفاده از شرایط مکمل زاید جواب بهینه مسأله را به‌دست آورید.

$$c = \begin{pmatrix} ۷ & ۲ & -۲ & ۸ \\ ۱۹ & ۵ & -۲ & ۱۲ \\ ۵ & \frac{۷}{۲} & -۹ & ۳ \end{pmatrix} \qquad b = (b_۱, b_۲, b_۳, b_۴) = (۲, ۳, ۲, ۳)$$

$$a = (a_۱, a_۲, a_۳) = (۳, ۳, ۴)$$

۷) LP زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Min} & Z(x) = & -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & +5x_5 & & & \\
& & x_1 & & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & +2x_6 & & = 3 \\
& & x_1 & +x_2 & & -x_4 & -3x_5 & +3x_6 & +x_7 & = 7 \\
& & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & +5x_5 & -2x_6 & & \leq -4
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 7$$

بررسی نمائید که آیا نقطه‌ی $x^\circ = (3, 4, 0, 0, 0, 0, 0)^t$ بهینه مسأله می‌باشد (با به‌کار بردن شرایط مکمل زاید). با به‌کار بردن شرط مسأله خواص مشخصه مجموعه جواب‌های بهینه را معین نمائید. با توجه به این‌که:

$$a_5 = -a_1 - 2a_2$$

این مطلب مستلزم چه شکلی از مجموعه‌ی جواب‌های مسأله می‌باشد.

۸) LP زیر را درنظر بگیرید. دوآل مسأله را بنویسید. اگر $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله باشد، ثابت کنید عدد حقیقی مانند $\bar{\pi}$ وجود دارد، به‌طوری‌که بازاء هر j $\bar{\pi}a_j \leq c_j$ مستلزم آن است که:

$$\bar{x}_j = l_j \ , \ \bar{\pi}a_j > c_j$$

و این مستلزم آن است که:

$$\bar{x_j} = k_j \ , \ l_j < \bar{x}_j < k_j$$

و این مستلزم $\bar{\pi}a_j = c_j$ است.

۹) مسائل زیر را درنظر بگیرید:

$$P: \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & Z = cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$D: \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & W = wb \\ \text{s.t.} & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

به سوالات زیر با توضیحات کامل جواب دهید.

الف. اگر P یک جواب اساسی نشدنی داشته باشد که مقدار تابع مقصود متناظر آن از مقدار بهینه کمتر باشد، آنگاه جواب اساسی مکمل دوآل آن شدنی است (مطلب راست یا دروغ است؟ چرا؟)

ب. اگر P بهینه چندگانه داشته باشد و اگر w^* یک جواب بهینه دوآل باشد، آنگاه بایستی w^* تبه‌گن باشد(راست یا دروغ است؟)

ج. فرض کنید z^* مقدار بهینه مشترک P و D باشد و فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب اساسی نشدنی برای P باشد که جواب اساسی مکمل متناظر دوآل آن شدنی باشد. ممکن است مقدار تابع مقصود این دو برابر با z^* باشد.

د. اگر P نامحدود باشد. آیا ممکن است با تغییر b، بهینه آن را متناهی نمائیم؟

۱۰) جدول زیر نشان‌دهنده‌ی جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی است. در این جدول x_4 و x_5 در قیدهای اول و دوم به‌ترتیب متغیرهای کمکی می‌باشند (در مسأله‌ی اصلی). قیدها از نوع $\leq$ می‌باشند.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	-۲	۰	-۳	-۲	-۴۰
x_3	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{5}{2}$
x_1	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

الف. مسأله‌ی اصلی را بنویسید.

ب. دوآل مسأله‌ی اصلی چیست؟

ج. جواب بهینه‌ی دوآل را از جدول فوق به‌دست آورید.

۱۱) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الف. دوآل مسأله را بنویسید.

ب. با روش سیمپلکس مسأله را حل کنید و نشان دهید که مقادیر متغیرهای دوآل به‌دست آمده از جدول در قیدهای دوآل صدق نمی‌کنند.(مگر در جدول بهینه)

۱۲) مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را با روش ترسیمی حل کنید:

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 3x_1 & +3x_2 & +21x_3 & & \\ \text{s. t.} & 6x_1 & +9x_2 & +25x_3 & \leq 25 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +25x_3 & \leq 20 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

۱۳) LP زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 \leq 0 \\ & -1 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

الف. مسأله را با روش ترسیمی در فضای (x_1, x_2) حل نمائید.

ب. تمامی BFSهای بهینه را به‌دست آورید.

۱۴) کمپانی سازنده صندلی‌های گردان، دونوع صندلی تولید می‌کند. دو نوع متخصص در ساختن این صندلی‌ها دخیل هستند که آن‌ها را متخصص I و II می‌نامیم. صندلی‌های نوع اول $\frac{۳}{۲}$ ساعت از متخصص نوع I و یک ساعت از متخصص نوع II لازم دارد، و سود حاصله ۲۰\$ می‌باشد. صندلی‌های نوع دوم $\frac{۱}{۲}$ ساعت از متخصصین نوع اول و $\frac{۱}{۲}$ ساعت از متخصصین نوع دوم کار می‌برد و سود حاصله ۱۲\$ می‌باشد. کمپانی ۱۰۰ ساعت متخصص نوع اول و ۸۰ ساعت متخصص نوع دوم در اختیار دارد. کمپانی در رابطه با دستمزد ساعتی آن‌ها درحال مذاکره می‌باشد. چه دستمزدی برای این افراد پیشنهاد می‌نمائید؟

۱۵) نشان دهید اگر مسأله:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

جواب بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b' \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

نمی‌توانند نامحدود باشند. (مهم نیست که بردار b' چگونه باشد)

۱۶) مستقیماً نشان دهید که اگر مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

جواب شدنی نداشته باشد و اگر دوآل آن جواب شدنی داشته باشد، آن‌گاه دوآل نامحدود می‌باشد (لم فارکاس را به‌کار برید. اگر دستگاه $Ax \geq b$ و $x \geq \circ$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دستگاه $wA \leq \circ$ و $w \geq \circ$ و $wb > \circ$ دارای جواب است).

۱۷) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

فرض کنیم $z_j - c_j$ و $\bar{a}_{ij}$ و $\bar{b}_i$ اعضای به‌روز شده جدول سیمپلکس باشد (در یک تکرار از روش سیمپلکس). نشان دهید که آیا عبارات زیر راست یا دروغ می‌باشند. در هر صورت استدلال کامل بیاورید.

الف. $\bar{a}_{ij} = -\frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j}$

ب. $z_j - c_j = \frac{-\partial z}{\partial x_j}$

ج. شدنی بودن دوآل به‌معنی بهینگی پرایمال می‌باشد.

د. انجام دادن عملیات سطری در یک دستگاه نامعادلات (نامساوی‌ها) دستگاه معادل به‌دست می‌دهد.

ه. افزودن متغیر تصنعی به پرایمال باعث می‌گردد که متغیرهای آزاد دوآل محدود گردند.

و. حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با روش سیمپلکس، ضرورتاً یک روش جستجوی گرادیان می‌باشد.

ز. یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که به وسیله فاز دوگانه روش سیمپلکس حل گردد با روش M -بزرگ سیمپلکس نیز قابل حل می‌باشد و بالعکس.

ح. وقتی هم پرایمال و هم دوآل نشدنی باشند، یک رخنه دوآلیتی موجود است (رخنه دوآلیتی یعنی اختلاف بین دو تابع مقصود.)

و. برگرداندن مسأله‌ی می‌نیمم به ماکزیمم نمودن باعث می‌گردد که علامت متغیرهای دوآل عوض شود.

ذ. یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای نامنفی را می‌توان به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمود، بدون افزودن هیچ قید به‌صورتی که تمامی متغیرهای مسأله‌ی حاصل شده آزاد باشند.

۱۸) با به‌کار بردن قضیه‌ی اصلی دوآلیتی، لم فارکاس را ثابت کنید.

(**راهنمایی**: مسائل زیر را درنظر بگیرید.)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = 0x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \ \text{آزاد} \end{aligned}$$

۱۹) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت استاندارد و دوآل آن را درنظر بگیرید:

الف. چه اتفاقی برای جواب دوآل می‌افتد؛ اگر قید kام، λ برابر گردد.

ب. چه اتفاقی برای جواب دوآل پیش می‌آید اگر مضربی از یک قید پرایمال به قید دیگری از پرایمال افزوده گردد.

ج. چه اتفاقی برای جواب‌های دوآل و پرایمال پیش می‌آید اگر مضربی از یک ستون پرایمال به ستون دیگر پرایمال افزوده گردد.

۲۰) مسائل زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & W = wb \\ \text{s.t.} & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

فرض کنید، مجموعه‌ی جواب‌های حداقل یکی از دو مسائل فوق غیرخالی است. ثابت کنید که مجموعه‌ی جواب‌های حداقل یکی از مسائل یا هر دو غیرخالی می‌باشند یا نامحدود هستند.

۲۱) فرض کنید $S \subseteq R^n$ یک چندوجهی و S_p مجموعه‌ی نقاط رأسی آن باشد. ثابت کنید دو نقطه $x^1, x^2 \in S$ (x^1 و x^2 رأسی هستند) دو نقطه مجاور رأسی S می‌باشند، اگر و فقط اگر یک ابرصفحه‌ی جداکننده دو مجموعه $\{x_1, x_2\}$ و $S - \{x_1, x_2\}$ از هم جدا کند. با یک مثال نقض نشان دهید که این نتیجه ممکن است در حالتی‌که S نامحدود باشد صادق نباشد.

۲۲) پس از معرفی متغیرهای کمکی مسأله P و D مسائل به‌صورت زیر درمی‌آید:

پرایمال

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z(x) = cx \\ & Ax - v = b \\ & x \geq 0 \,,\; v \geq 0 \end{array} \qquad (*)$$

دوآل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ & wA + u = c \\ & w \geq \circ \quad u \geq \circ \qquad\qquad (**) \end{aligned}$$

فرض کنیم:

$$S_P = \{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mid \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \text{شدنی برای * هستند}\}$$

و

$$S_D = \{(w, u) \mid \quad (w, u)\text{شدنی برای ** باشند}\}$$

در این مسأله زوج‌های مکمل عبارتند از (x_j, u_j) $(j = ۱, \ldots, n)$ و (w_i, v_i) $(i = ۱, \ldots, m)$. فرض می‌کنیم $S_P \neq \phi$ و $S_D \neq \phi$ نتایج زیر را به دقت اثبات نمائید:

۱ـ در جواب بهینه اگر یکی از متغیرهای زوج‌های فوق‌الذکر اکیداً مثبت باشد دیگری صفر می‌باشد وبالعکس.

۲ـ یک متغیر از این زوج‌ها در مجموعه‌ی جواب‌ها از بالا نامحدود است اگر و فقط اگر متغیر متناظر آ ن در مجموعه جواب‌ها از پایین محدود باشد.

۳ـ یک متغیر از این زوج‌ها در مجموعه جواب‌ها از بالا نامحدود است اگر و فقط اگر متغیر مکمل آن در تمامی جواب‌های شدنی صفر باشد.

۴ـ یک متغیر از این زوج‌ها در جوابی شدنی اکیداً مثبت خواهد بود اگر و فقط اگر متغیر مکمل آن در مجموعه جواب‌ها از بالا محدود باشد.

۲۳) ثابت کنید اگر k ماتریس متقارن اوریب (یعنی $k = -k^t$) آن‌گاه دستگاه:

$$kx \geq \circ \qquad x \geq \circ$$

دارای جوابی مانند $\bar{x}$ می‌باشد که $k\bar{x} + \bar{x} > 0$.

۲۴) با به‌کار بردن نتیجه‌ی دستگاه قبلی برای دستگاه:

$$\begin{aligned} Ax - rb &\geq 0 \qquad x \geq 0 \\ -wA + rc &\geq 0 \qquad w \geq 0 \\ wb - cx &\geq 0 \qquad r \geq 0 \end{aligned}$$

الف. نتیجه را برای اخذ قضیه‌ی اساسی دوآلیتی به‌کارگیرید.

ب. قضیه‌ی مکمل زاید قوی را از آن نتیجه بگیرید.

ج. تعبیر هندسی قضیه‌ی مکمل زاید قوی چیست؟

د. چه موقع جواب مکمل زاید قوی در نقاط رأسی اتفاق نمی‌افتد؟

(این مسأله بسیار مهم است. به دقت هر چهار قسمت آن را حل و روی کاغذ بیاورید.)

۲۵) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \in X \end{aligned}$$

که در آن X یک چندوجهی می‌باشد (معمولاً قیود سازای X قیدهایی هستند که به‌راحتی قابل دستکاری می‌باشند) متناظر مسأله‌ی پرایمال فوق مسأله‌ی دوآل لاگرانژ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(w) \\ \text{s.t.} \quad & w \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن:

$$f(w) = wb + \underset{x \in X}{\text{Min}} \{(c - wA)x\}$$

الف. ثابت کنید اگر $x_{\circ}$ جواب شدنی پرایمال باشد یعنی $Ax_{\circ} \geq b$ و $x_{\circ} \in X$ و $w_{\circ}$ یک جواب برای دوآل لاگرانژ باشد، یعنی $w_{\circ} \geq \circ$؛ داریم:

$$cx_{\circ} \geq f(w_{\circ})$$

ب. فرض کنید $x \neq \phi$ و محدود باشد و مسأله پرایمال جواب بهینه‌ی متناهی دارد، نشان دهید که:

$$\begin{array}{lcl} \text{Min } cx & = & \text{Max } f(w) \\ Ax \geq b & & w \geq \circ \\ x \geq \circ & & \end{array}$$

۲۶) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_{۱} + x_{۲} \\ \text{s.t.} & ۳x_{۱} + x_{۲} \geq ۶ \\ & -x_{۱} + x_{۲} \leq ۲ \\ & x_{۱} + x_{۲} \leq ۸ \\ & x_{۱}, x_{۲} \geq \circ \end{array}$$

فرض کنید:

$$X = \{x \mid -x_{۱} + x_{۲} \leq ۲ \ , \ x_{۱} + x_{۲} \leq ۸ \ , \ x_{۱}, x_{۲} \geq \circ\}$$

۱ـ دوآل لاگرانژ مسأله‌ی فوق را به‌دست آورید.

۲ـ نشان دهید:

$$f(w) = ۶w + \text{Min}\{\circ \ , \ ۴ - ۲w \ , \ ۱۳ - ۱۴w \ , \ ۸ - ۲۴w\}$$

۳ـ $f(w)$ را رسم کنید و جواب بهینه هر دو مسأله را به‌دست آورید.

۲۷) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ \text{s. t.} & & -x_2 & +x_3 & \geq -1 \\ & x_1 & & -x_3 & \geq -1 \\ & -x_1 & +x_2 & & \geq -1 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

نشان دهید که دوآل مسأله‌ی فوق، خود مسأله می‌گردد.[1] فرض کنید A ماتریس مربع باشد، شرایطی را روی A و b و c به‌دست آورید که دوآل مسأله فوق، خود مسأله باشد.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s. t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

۲۸) فرض کنید A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ است. ثابت کنید که (I) یک جواب غیرصفر دارد یا (II) دارای جواب غیرصفر است ولی هر دو نمی‌توانند جواب داشته باشند.

$$I) \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad II) \begin{cases} wA < 0 \end{cases}$$

۲۹) A و b و c به‌ترتیب از مرتبه‌ی $m \times n$ و $m \times 1$ و $1 \times n$ می‌باشند. ثابت کنید که LP زیر یا نشدنی است یا جواب بهینه‌ای دارد که مقدار بهینه تابع مقصود صفر می‌باشد.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx - wb \\ \text{s. t.} & Ax \geq b \\ & -wA \geq -c \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{array}$$

1) Self-Dual

۳۰) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید که در آن $b_i > ۰$ بازاء هر i و $c_j \geq ۰$، $j = m+۱, \ldots, n$ دوآل مسأله را بنویسید و ثابت کنید دوآل جواب بهینه‌ی منحصربه‌فرد دارد و این جواب را به‌دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=m+۱}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & x_i + \sum_{j=m+۱}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = ۱, \ldots, m \\ & x_j \geq ۰ \qquad j = ۱, \ldots, n \end{aligned}$$

۳۱) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

که در آن $\text{rank}(A) = m < n$ و A از مرتبه‌ی $m \times n$ می‌باشد. فرض کنید که این مسأله دارای جواب بهینه‌ی غیرتبه‌گن می‌باشد. با به‌کار بردن نتایج مسأله‌ی قبل ثابت کنید که دوآل این مسأله بهینه‌ی منحصربه‌فرد دارد. (توجه: استفاده از نتایج مسأله‌ی قبل ضروری است.)

۳۲) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

که در آن $m = n$ و $c = b^t$ و $A = A^t$. نشان دهید اگر $x_۰$ی موجود باشد، به‌طوری‌که $Ax_۰ = b$ و $x_۰ \geq ۰$ در این‌صورت $x_۰$ بهینه مسأله است.

(راهنمایی: از دوآلیتی استفاده نمایید.)

۳۳) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z \\ \text{s.t.} \quad & z - cx = 0 \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

الف .دوآل مسأله را بنویسید.

ب. در بهینگی مقدار متغیر z چقدر خواهد بود. (توضیح دهید)

۳۴) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید B پایه‌ای است که نه پرایمال شدنی است و نه دوآل شدنی است. نشان دهید که چگونه می‌توان با شروع از B مسأله را حل نمود.

۳۵) ثابت کنید اگر مسأله‌ی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دارای جواب شدنی نباشد و دوآل مسأله جواب شدنی داشته باشد، در این‌صورت، دوآل نامحدود است.

۳۶) ثابت کنید اگر یک جواب اساسی شدنی مانند x_0 که متناظر پایه‌ی B می‌باشد، بهینه باشد، B پایه بهینه هر LP است که b سمت راست قیود آن‌ها در $\text{pos}(B)$ باشد.

۳۷) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

که در آن l و u بردارهای متناهی باشند.

الف. دوآل مسأله را بنویسید.

ب. نشان دهید که دوآل همواره شدنی است.

ج. اگر مسأله‌ی پرایمال دارای جواب شدنی باشد چه نتیجه‌ای از این مطلب می‌گیرید؟

۳۸) مسائل زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \\ \text{Max} & wb \\ \text{s.t.} & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

اگر

$$S_P = \{x \mid Ax \geq b \ , \ x \geq 0\}$$
$$S_D = \{w \mid wA \leq c \ , \ w \geq 0\}$$

آن‌گاه اگر S_P یا S_D غیرخالی باشد؛ ثابت کنید که مجموعه‌ی جواب‌های شدنی حداقل یکی از دو مسأله هم غیرخالی است و هم نامحدود است.

۳۹) فرض کنیم $S, K \subseteq R^n$ مجموعه‌ی نقاط رأسی K باشد. ثابت کنید که $x^1, x^2 \in S$ دو نقطه‌ی رأسی مجاور K هستند؛ اگر و فقط اگر یک ابرصفحه‌ی جداکننده‌ی دو مجموعه‌ی $\{x_1, x_2\}$ و $S - \{x^1, x^2\}$ را از هم جدا کند. در حالتی‌که K نامحدود باشد، مثال نقض ارائه دهید که این مطلب صادق نباشد.

۴۰) فرض کنید $w = (w_1, \ldots, w_n) > 0$ بردار داده شده‌ای باشد (برداری با n مؤلفه از وزن‌های مثبت). برای هر بردار $y \in R^n$ یعنی $y = (y_1, \ldots, y_n)$، $\mathrm{L(y)}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(y) = \mathrm{Max}\{w_i\,|y_i| \;\mid\; i = 1, \ldots, n\}$$

(یعنی ماکزیمم حاصلضرب w_i در قدرمطلق y_i). بردار

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$$

برداری مانند $x = (x_1, \ldots, x_n)$ را طوری بیابید که می‌نیمم کند $L(a - x)$ را مشروط بر این‌که $x_i - x_{i-1} \leq 0 \quad i = 1, \ldots, n-1$ مسأله را به‌صورت LP فرموله نمائید.

۴۱) با به‌کار بردن تئوری دوآلیتی مسأله برنامه‌ریزی خطی ثابت کنید که نتایج ذیل عاید می‌گردد:

$$\bar{x}_i = \mathrm{Max}\{a_j - (\alpha/w_j) \mid j \leq i\}$$
$$\hat{x}_i = \mathrm{Min}\{a_j + (\alpha/w_j) \mid j \geq i\}$$

فرض کنید:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$
$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$$

ثابت کنید $\bar{x}$ و $\hat{x}$ هر دو جواب‌های بهینه این مسأله می‌باشند. به‌علاوه ثابت کنید که اگر $x = (x_۱, \dots, x_n)$ در شرایط $i = ۱, \dots, n-۱ \quad x_i \le x_{i+۱}$ صدق کند، آن‌گاه x جواب بهینه مسأله است اگر و فقط اگر $\bar{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i \quad (i = ۱, \dots, n)$.

۴۲) فرض کنید دستگاه زیر دارای جواب نیست. دستگاهی بسازید که دارای جواب باشد.

$$Ax = ۰ \quad , \quad x \ge ۰ \quad , \quad cx > ۰$$

۴۳) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ و $c = (۱, ۴)$. کدامیک از دو دستگاه زیر دارای جواب است.

$$I) \begin{cases} Ax \le ۰ \\ cx < ۰ \end{cases} \qquad II) \begin{cases} wA = c \\ w \ge ۰ \end{cases}$$

مسأله را به طریق ترسیمی توضیح دهید.

۴۴) برای هر یک از مسائل زیر شرایط K.K.T را بنویسید.

$$\begin{array}{llll} a) & \text{Max} & cx & \\ & \text{s.t.} & Ax & \le b \\ & & x & \ge ۰ \end{array} \qquad \begin{array}{llll} d) & \text{Min} & cx & \\ & \text{s.t.} & A_۱x & = b_۱ \\ & & A_۲x & \ge b_۲ \\ & & x & \ge ۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & \text{Max} & cx & \\ & \text{s.t.} & Ax & \ge b \\ & & x & \ge ۰ \end{array} \qquad \begin{array}{llll} e) & \text{Min} & cx & \\ & \text{s.t.} & Ax & = b \\ & & l \le & x \le u \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c) & \text{Min} & cx & \\ & \text{s.t.} & Ax & \le b \\ & & x & \ge ۰ \end{array}$$

۴۵) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x جواب بهینه است. بعلاوه فرض کنید:

$$\begin{aligned} x_j > 0 \quad & j = 1, \dots, p \\ x_j = 0 \quad & j = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

نشان دهید دستگاه $Ad = 0$ و $d_{p+1}, \dots, d_n \geq 0$ و $cd < 0$ در R^n دارای جواب نیست. با به‌کار بردن لم فارکاس شرایط K.K.T برای این مسأله بهینه می‌باشد. هم‌چنین که هر جوابی در این شرایط K.K.T برای این مسأله بهینه می‌باشد.

۴۶) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با معرفی متغیر کمکی داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & cx \\ & Ax + Ix_s = b \\ & x, x_s \geq 0 \end{aligned}$$

شرایط بهینگی K.K.T را برای هر دو مسأله بنویسید. معادل بودن آن‌ها را نشان دهید و نشان دهید که ضرایب لاگرانژ متناظر قیود $x_s \geq 0$ مساوی ضرایب لاگرانژ قید $Ax + x_s = b$ و $Ax \leq b$ می‌باشد.

۴۷) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{Max} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{s.t.} & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\
 & & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

با شروع از مبداء، مسأله را با روش سیمپلکس حل نمائید و نشان دهید که جواب در شرایط K.K.T صدق می‌نماید. در هر مرحله منابعی که از شرط بهینگی عدول می‌نماید را مشخص کنید. هر مرحله را از نظر هندسی تفسیر نمائید.

۴۸) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & cx \\
\text{s.t.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

می‌دانیم x جواب بهینه‌ی مسأله است، اگر و فقط اگر بردارهایی مانند w و v موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$
\begin{aligned}
c - wA - v &= 0 \\
v &\geq 0 \\
vx &= 0
\end{aligned}
$$

آیا امکان دارد x بهینه باشد، اگر $v_i \geq 0$ بازاء هر $i \neq j$ و $v_j < 0$ و $x_j = 0$؟ به عبارت دیگر، آیا امکان دارد، جواب بهینه‌ای موجود باشد که یکی از ضرایب لاگرانژ متناظر یک قید نامنفی، منفی باشد؟ توضیح دهید چرا می‌تواند این‌طور باشد یا چرا نمی‌تواند چنین باشد. مطلب را با یک مثال عددی توضیح دهید.

۴۹) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مسأله باشد و A به‌صورت: $A = \begin{bmatrix} A_۱ \\ A_۲ \end{bmatrix}$ افراز شده باشد و b را نیز به‌صورت $\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}$ افراز نموده باشیم، به‌طوری‌که $A_۱x^* = b_۱$ و $A_۲x^* > b_۲$.
نشان دهید که x^* جواب بهینه‌ی مسائل زیر نیز می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & A_۱x \geq b_۱ \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & A_۱x = b_۱ \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

۵۰) یک کاغذ دو نوع محصول تولید می‌نماید که سود آن‌ها به‌ترتیب ۱۰$ و ۱۵$ می‌باشد. هر واحد از محصول اول ۴ ساعت وقت کارگر و ۳ ساعت وقت ماشین را می‌گیرد. هر واحد از محصول دوم ۷ ساعت وقت کارگر و ۶ ساعت وقت ماشین را صرف می‌کند. تعداد ساعات کاری درکارخانه کلاً ۳۰۰ ساعت و ماشین ۵۰۰ ساعت می‌باشد. جواب بهینه را به‌دست آورید و شرایط K.K.T را بررسی کنید. جواب بهینه را از نظر هندسی تفسیر نمائید؛ هم‌چنین تفسیر اقتصادی آن را توضیح دهید.

۵۱) شرایط K.K.T برای مسأله برنامه‌ریزی خطی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

را به یک دستگاه از نامعادلات خطی تبدیل نمائید. آیا هیچ امتیازی این تبدیل دارد؟

۵۲) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب شدنی x داده شده است. مسأله را فرموله نمائید که یک جهت شدنی که بهترین بهبود را در تابع مقصود در یک قدم به‌دست بدهد (اگر وجود داشته باشد) ارتباط این مسأله و مسأله‌ی اصلی چیست؟

۵۳) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنیم x^* جواب بهینه‌ی منحصربه‌فرد مسأله باشد (که در این‌صورت x^* نقطه رأسی است. چرا؟) نشان دهید که دومین نقطه‌ی رأسی بهترین بایستی، نقطه‌ی رأسی مجاور x^* باشد. چه اتفاق می‌افتد اگر منحصربه‌فرد بودن حذف گردد؟

۵۴) ناحیه‌ی S را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$S = \{x \mid Ax = b \ , \ x \geq \circ\} \neq \phi$$

$$\mathrm{rank}(A) = m < n \qquad A = [a_{ij}]^{m \times n} \quad (\text{محدود است } S)$$

فرض کنید $x_\circ$ یک نقطه‌ی رأسی S و $x_k, \ldots, x_۱$ نقاط رأسی مجاور $x_\circ$ باشد. فرض کنید x نقطه‌ای از S باشد. نشان دهید که x را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x = x_\circ + \sum_{j=۱}^{k} \mu_j (x_j - x_\circ) \qquad \mu_j \geq \circ \qquad j = ۱, \ldots, k$$

نتیجه را از نظر هندسی تفسیر نمائید.

۵۵) در مسأله‌ی فوق فرض کنید S نامحدود است. ثابت کنید با همان مفروضات اگر $x \in S$ در این‌صورت:

$$x = x_\circ + \sum_{j=۱}^{k} (x_j - x_\circ)\mu_j + \sum_{j=۱}^{l} \lambda_j d_j$$

$$\mu_j, \lambda_j \geq \circ \qquad \text{بازاء هر } j$$

که در آن $\{d_۱, \ldots, d_l\}$ مجموعه جهت‌های رأسی مجاور دورشونده می‌باشند.

فرق این مطلب با قضیه‌ی نمایش چیست؟

۵۶) نشان دهید در یک چندوجهی محدود دریک نقطه‌ی رأسی تابع مقصود کمترین مقدار خود را دارد اگر و فقط اگر مقدار تابع مقصود در آن نقطه کمتر یا مساوی در هر نقطه از نقاط رأسی مجاور آن باشد. آیا می‌توان مطلب را برای حالتی که چندوجهی نامحدود است تعمیم داد.

مراجع

[1] E. M. L. Beale, "An Alternative Method for Linear Programming,"523 -Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 50, 4 (1954), 513 .

[2] Dual -G. B. Dantzig, L. R. Ford, jr. and D. R. Fulkerson, "A Primal 181 in reference [1. 83]-Algorithm for Linear Programs, "pp. 171

[3] H. w. Kuhn, "The Hungarian Method for the Assignment Problem,"Naval Research Logistics Quarterly,2,1 and 2 (1955),83-97.

[4] C. E. Lemke, "The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, "Naval Re-search Logistics Quarterly, 1(1954), 36-47.

[5] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

[6] H. w. Kuhn, "Nonlinear Programming: A Historical View, "in Nonlinear Programming: Proceedings of the Joint SIAM-AMS Symposium on Applied Mathematics, R. w. Cottle and C. E. Lemke (Eds.), (New York City, March 1975), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1976.

[7] C. E. Lemke, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming, "Management Science 11 (1965), 681-689.

[8] C. E. Lemke and J. T.Howson, “Equilibrium Points of Bimatrix Games, ”’SIAM Journal of Applied Mathematics 12 (1964), 413-423.

[9] O. L. Mangasarian, “Uniqueness of Solutions in Linear Programming, ’Linear Algebra and Its Linear Programming, ”Linear Algebra and Its Applications 25 (1979), 151-162.

[10] J. May and R. L.Smith, “Random Polytopos: Their Definition, Generation, and Aggregate Properties, ”Mathematical Programming 24, 1(September 1982), 39-54.

[11] R. R. Meyer, “Continuity Properties of Linear Programs, ”Computer Science Technical Re-port 373, University of Wisconsin, Madison, November 1979.

[12] H. D. “Marginal Values in Matrix Games and Linear Programs, ”in Linear Equalities and Related Systems, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1959, pp. 183-194.

[13] M. Morishima, The Economic Theory of Modern Society, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1976.

[14] G. Owen, Game Theory, Saunders, Phildelphia, 1968.

[15] M. S. Ramanujan and E. S. Thomas, Intermediate Analysis, Macmillan, New York, 1970.

[16] S. M. Robinson, “Bounds for Error in the Solution Set of a Perturbed Linear Program, ”Linear Algebra and Its Applications 6

(1963). 69-81.

[17] S. M. Robinson, “Stability Theory for Systems of Inequalities, Part I: Linear Systems, “SIAM Journal Numerical Analysis 12 (1975), 754-769.

[18] S. M. Robinson, “A Characterization of Stability in Linear Programming, ”Operations Research 25, 3 (May-June 1977), 435-447.

[19] H. L. Royden, Real Analysis, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

[20] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

[21] P. Sengupta and D. Solow, “A Finite Descent Theory for Linear Programming, Piecewise Linear Convex Minimization, and the Linear Complementarity Problem, ”Technical Report, Department of Operations Research, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, June 1981.

[22] R. L. Smith, “An Elementary Proof of the Duality Theory of Linear Programming, ”Journal of Optimization Theory and Applications 12, 2(August 1973), 129-135.

[23] J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

[24] J. Von Neumann, “Discussion of a maximization problem, ”manuscript from the Institute for Advanced Study, 1947.

[25] H. M. Wagner, “Linear Programming Techniques for Regression Analysis, ”Journal of the American Statistical Association 54 (1959), 206.

[26] A. c. Williams, “Marginal Values in linear Programming, ”Journal oj SIAM 11, 1 (March 1963), 82-94.

[27] A. C. Williams, “Complementarity Theorems for Linear Programming, ”SIAM Review 12, 1 (January 1970), 135-137.

[28] P. Wolfe, “Errors in the Solution of Linear Programming Problems, ”in Error in Digital Computation, vol. II, L. B. Rau (Ed.), Wiley, New York, 1965, pp. 271-284.

[29] E. Beale, P. Huges, and R. Small, “Experiences in Using a Decomposition Progrm, ”Computer Journal 8 (1965), 13-18.

[30] G. B. Dantzig and P. Wolfe, “The Decomposition Principle for Linear Programd, ”Operations Research 8 (1960), 101-111.

[31] J. K. Ho and E. Loute, “An Advanced Implementation of the Dantzig-Wolfe Decomposition Algorithm for Linear Programming, ”Mathematical Programming 20 (May 1981), 303-326.

[32] D. M. Himmelblau (Ed.), “Decomposition of Large-Scale Problems, ”in Procedings of a NATO Advanced Study Indtitute, North-Holland, Amesterdam, The Netherland, 1973.

[33] M. R. Rao and S. Zionts, "Allocation of Transportation Units to Alternative Trips-A Column Generation Scheme with Out-of-Kilter Sub-problems,"Operations Research 16 (1968), 52-63.

[34] M. Akgul, "A Note on Shadow in Linear Programming, "Technical Report, Department of Math Sciences, University of Delaware, Newark, Del. 1982.

[35] D. C. Aucamp and D. I. Steinberg, "The Computation of Shadow Prices in Linear Programming, "Journal of the Operational Research Society 33 (1982), 557-565.

[36] F. E. Clark, "Remark on the Constraint Sets in Linear Programming, "American Mathematical Monthly 68 (1961), 351-352.

[37] R. W. Cottle and G. B. Dantzig. "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming, "Linear Algebra and Its Applications 1 (1968), 103-125.

[38] G. B. Dantzig and A. Orden, "Nots on Linear Programming: Part II. Duality Theorems, "Rand Research Memorandum RM-1265, The Rand Corporation, Santa Monica, Calif., October 30, 1953.

[39] B. C. Eaves and R. M. Freund, "Optimal Scaling of Balls and Polyhedra, "Mathematical Programming 23 (1982), 138-147.

[40] D. Gale, H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, "Linear Programming and the Theory of Games, "in T. C. Koopmans (Ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, Wiley, New York, 1951.

[41] A. J. Goldman and A. W. Tucker, "Theory of Linear Programming", in Linear Inequaliteis and Related Systems, H. W. kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Princeton University Press, Princetin, N. J., 1959.

[42] N. B. Haaser and J. A. Sullivan, Real Analysis, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1971.

[43] D. Hausmann, Adjacency on Polytops in combinatorial Optimizatin, Oelgeschlager, Gunn & Hain, Cambridge, Mass., 1980.

[44] A. J. Hoffman, "On Approximate Solutions of System of Linear Inequalities, "Journal Re-search National Bureau of Standards 49 (1952). 263-265.

[45] W. Karush, "Minima of Functions of Several variables with Inequalities as Side Conditions, "M. S. dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, December 1939.

[46] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming, "in Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statics and Probability, J. Neyman (Ed.), University of California Press, Berkeley, (1951), 481-492.

[47] A. Shefi, "Reduction of Linear Inequality Constraints and Determination of all Feasible Extreme Points, "Ph. D. dissertation, Department of Engineering -Economic Systems, Stanford University, Stanford, Calif., October 1969.

[48] D. W. Walkup and R. J. -B. Wets, "Lifting Projections of Con-

vex Polyhedra, "Pacific Journal of Mathematics 28, 2, 1969, pp. 465-475.

[49] R. J. -B. Wats and C. Witzgall,"Towards an Algebraic Characterization of Convex Polyhedral Cones, Numerische Mathematik 12, 1968, pp. 134-138.

فصل سوم

انواع روش‌های سیمپلکس

پس از ابداع روش سیمپلکس توسط پروفسور **جرج - دانتزیگ**، در سال ۱۹۴۷ و به‌موازات آن پیشرفت تکنولوژی در زمینه کامپیوترهای ارقامی؛ در جهت رسیدن به هدف‌های استراتژیک در به‌کار بردن و ابداع الگاریتم‌های بهینه‌سازی بالاخص در زمینه برنامه‌ریزی خطی قدم‌های بسیار بلندی برداشته شد. **هدف‌های استراتژیک** در طراحی یک الگاریتم عبارت بودند از:

الف. حداقل خطای ناشی ازگرد نمودن را داشته باشد.

ب. حداقل زمان **C.P.U**[1] را به‌کارگیرد.

ج. کمترین حافظه[2] را اشغال نماید.

از این‌رو اصلاحات اساسی در روش سیمپلکس اولیه صورت گرفت و به‌موازات آن انواع دیگر روش‌های سیمپلکس ابداع شد. بعضی از این روش‌ها دست‌کاری در روش محاسبات است و بعضی از آن‌ها اصلاح الگاریتم بر مبنای ساختار خاص مسأله صورت گرفته و در برخی با توجه به در دست بودن جواب دوآل طراحی جدیدی انجام شده است. یکی از این روش‌ها که در حقیقت دست‌کاری در روش محاسبات می‌باشد، روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد که در جزئیات آن را توضیح می‌دهیم.

1) Central Processing Unit   2) Cash Memory

۳-۱ سیمپلکس اصلاح شده[1]

در روش سیمپلکس معمولی در هر جدول که عملیات محوری صورت می‌گرفت تمامی اعضای جدول، تمامی اعضای بردار سمت راست، مقدار تابع مقصود و ضرایب نسبی هزینه‌ها به‌روز می‌گردید. یعنی محاسبات ذیل انجام می‌شد:

$a)\quad \bar{b} = B^{-1}b$ یا $B\bar{b} = b$

$b)\quad \bar{c}_j = wa_j - c_j \qquad w = c_B B^{-1}$ یا $wB = c_B$

$c)\quad \bar{a}_j = B^{-1}a_j \qquad B\bar{a}_j = a_j \qquad j \in N_B$ (مجموعه‌ی‌اندیس‌متغیرهای‌غیراساسی)

$d)\quad \bar{z} = c_B B^{-1}b$

در این چهار دسته از محاسبات: (a) اجتناب‌ناپذیر است زیرا $\bar{b}$ مقادیر به‌روز شده متغیرهای اساسی را به ما می‌دهد. محاسبات (b) نیز ضروری است زیرا با داشتن $\bar{c}_j$ها می‌توان بهینه بودن یا بهینه نبودن جواب متناظر جدول را مشخص نمود. محاسبه‌ی (d) لازم است زیرا در جواب بهینه مقدار بهینه‌ی تابع مقصود را به ما می‌دهد. پس باقی می‌ماند محاسبات دسته‌ی (c) در محاسبات این دسته، محاسبه همه‌ی $\bar{a}_j$ها ضرورت ندارد، از این‌رو تنها به‌روز شدن آن ستونی ضروری است که وارد پایه می‌گردد. یعنی اگر (در مسأله می‌نیمم نمودن):

$$z_k - c_k = \underset{j \in NB}{\text{Max}}\{z_j - c_j > 0\}$$

در این‌صورت جهت مشخص نمودن متغیر وارد شونده مجبوریم تست می‌نیمم انجام دهیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta_r = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0\}$$

یعنی داشتن $\bar{a}_k = B^{-1}a_k$ لازم است و به‌روز نمودن بقیه‌ی ستون‌های غیراساسی ضرورتی ندارد. این موضوع اساس کار **سیمپلکس اصلاح شده** می‌باشد.

مجدداً مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

1) Revised Simplex

را درنظر می‌گیریم که در آن $b \geq 0$ و A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m < n$.

دو صورت از روش **سیمپلکس اصلاح شده** موجود می‌باشد. یکی از این صورت از **فرم حاصلضربی عکس ماتریس** پایه استفاده می‌نماید و دیگری صورت صریح عکس ماتریس را به‌کارمی‌برد.

۳-۲ سیمپلکس اصلاح شده با به‌کاربردن صریح عکس ماتریس

با توجه به آن‌چه گفته شد، روشن می‌گردد که روش سیمپلکس را می‌توان با به‌کار بردن جدولی با آرایه‌های بسیارکمتر اجرا نمود. فرض کنید یک جواب اساسی شدنی متناظر پایه B در دست است و عکس آن یعنی B^{-1} مشخص می‌باشد. جدول زیر را با قرار دادن $w = c_B B^{-1}$ می‌توان تشکیل داد.

عکس ماتریس پایه	RHS
w	$c_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

این جدول را جدول سیمپلکس اصلاح شده می‌نامند، که این جدول در جدول سیمپلکس معمولی نیز ظاهر می‌گردد، مشروط براین‌که درشروع کار ماتریس عکس پایه، ضرایب صفر در تابع مقصود داشته باشند. درنظر بگیرید که اگر در شروع $b \geq 0$ و قیدها به‌صورت $\leq$ باشند، مطلب فوق صادق خواهد بود.

حال فرض کنید که الگاریتم سیمپلکس را روی تمامی جدول انجام می‌دهیم، ولی تمامی محاسبات جز جدول فوق را پنهان نگه‌داریم. بنابراین همان‌طوری‌که گفته شد اولین چیزی که در هر مرحله از الگاریتم نیازمندیم، داشتن $z_j - c_j$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی می‌باشد. چون w در دست می‌باشد به سادگی $z_j - c_j$ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

اگر $k \in N_B$ی موجود باشد که $z_k - c_k > 0$، با به‌کاربردن رابطه‌ی:

$$\bar{a}_k = B^{-1} a_k$$

محاسبه می‌گردد و با استفاده از تست می‌نیمم، متغیر خارج‌شونده مشخص می‌گردد. (البته اگر $\bar{a}_k \leq 0$ در این‌صورت مسأله **بهینه‌ی نامتناهی** دارد و الگاریتم متوقف می‌شود) به‌صورت زیر:

عکس پایه	RHS		x_k
w	$c_B\bar{b}$		$z_k - c_k$
	$\bar{b}_1$		$\bar{a}_{1k}$
	$\vdots$		$\vdots$
B^{-1}	$\bar{b}_r$		$\bar{a}_{rk}$
	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{b}_m$		$\bar{a}_m k$

که در آن:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

به علاوه عمل محوری در جدول فوق، به‌روزشده w و B^{-1} و $\bar{b}$ را به ما می‌دهد (چرا؟ دقیقاً مطلب را بیان و تمام جزئیات را روی کاغذ بیاورید.)

روش سیمپلکس اصلاح شده در تعداد متناهی از مراحل متقارب می‌باشد به شرط آن‌که جهت جلوگیری از به‌دور افتادن از روش‌های ذکر شده در فصل اول استفاده گردد. ذیلاً خلاصه روش اصلاح شده سیمپلکس را در این حالت ذکر می‌کنیم:

خلاصه روش سیمپلکس اصلاح‌شده وقتی عکس ماتریس‌پایه صریحاً داده شده است.

قدم اولیه. یک جواب اساسی شدنی اولیه به‌دست آورید و فرض کنید B متناظر آن و B^{-1} در دست باشد. w را از رابطه‌ی:

$$w = c_B B^{-1}$$

محاسبه نمائید وقرار دهید $\bar{b} = B^{-1} b$ و جدول سیمپلکس اصلاح شده زیر را تشکیل دهید.

عکس پایه	RHS
w	$c_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

قدم اصلی. برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه کنید:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j \qquad (j \in N_B)$$

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

اگر $z_k - c_k \leq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول، جواب بهینه می‌باشد و در غیراین‌صورت قراردهید:

$$\bar{a}_k = B^{-1}a_k$$

اگر $\bar{a}_k \leq 0$ در این‌صورت مسأله بهینه نامتناهی دارد. اگر $\bar{a}_k \nleq 0$ ستون $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ را در سمت راست جدول مذکور قرار دهید که منجر به وجود آمدن جداول ذیل می‌گردد:

عکس پایه	RHS
w	$c_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

x_k
$z_k - c_k$
$\bar{a}_k$

از رابطه ذیل اندیس متغیر و در نتیجه متغیر خارج‌شونده را مشخص نمائید:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0\right\}$$

با انجام عملیات محوری این جدول را به‌روز نمائید. و ستون اضافه شده x_k را کاملاً حذف نمائید و عملیات را تکرار کنید.

با یک مثال عددی روش سیمپلکس اصلاح شده را توضیح می‌دهیم، اضافه می‌نمائیم که تمامی **کدهای کامپیوتری** جهت حل LP از روش سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل‌ضربی عکس ماتریس که بعداً خواهیم آورد استفاده می‌کنند.

۳-۲-۱ مثال. مسأله زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{array}{llrrrrrrl}
\text{Min} & Z = & -x_۱ & -۲x_۲ & +x_۳ & -x_۴ & -۴x_۵ & +۲x_۶ & \\
\text{s. t.} & & x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & +x_۴ & +x_۵ & +x_۶ & \leq ۶ \\
& & ۲x_۱ & -x_۲ & -۲x_۳ & +x_۴ & & & \leq ۴ \\
& & & & x_۳ & +x_۴ & +۲x_۵ & +x_۶ & \leq ۴
\end{array}$$

$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶ \geq ۰$$

با معرفی متغیرهای کمکی $x_۷$ و $x_۸$ و $x_۹$، پایه اولیه عبارت خواهد بود از: $B = [a_۷, a_۸, a_۹] = I_۳$ و $w = c_B B^{-۱} = (۰, ۰, ۰)$ و $\bar{b} = b$.

تکرار اول.

	عکس پایه			RHS
Z	۰	۰	۰	۰
$x_۷$	۱	۰	۰	۶
$x_۸$	۰	۱	۰	۴
$x_۹$	۰	۰	۱	۴

در این‌جا $w = (۰, ۰, ۰)$ با توجه به $z_j - c_j = wa_j - c_j$ داریم:

$$\begin{array}{lll}
z_۱ - c_۱ = ۱ & z_۲ - c_۲ = ۲ & z_۳ - c_۳ = -۱ \\
z_۴ - c_۴ = ۱ & z_۵ - c_۵ = ۴ & \\
& z_۶ - c_۶ = -۲ &
\end{array}$$

بنابر$z_k - c_k = ۴$ و $k = ۵$ پس $x_۵$ وارد پایه می‌گردد.

$$\bar{a}_۵ = B^{-۱} a_۵ = I a_۵ = (۱, ۰, ۲)^t$$

لهذا:

$$\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

و

$$\theta = \text{Min}\left\{\frac{۶}{۱}, \frac{۴}{۲}\right\} = ۲ = \frac{\bar{b}_{۹}}{\bar{a}_{۳۷} > ۰}$$

در نتیجه $\bar{a}_{۳۵} = ۲$ عضو محوری خواهد بود و جداول ذیل را خواهیم داشت:

					$x_۵$
Z	۰	۰	۰		۴
$x_۷$	۱	۰	۰	۶	۱
$x_۸$	۰	۱	۰	۴	۰
$x_۹$	۰	۰	۱	۴	$\boxed{۲}$

پس از انجام عملیات محوری و حذف ستون $x_۵$ داریم:

Z	۰	۰	-۲	-۸
$x_۷$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۴
$x_۸$	۰	۱	۰	۴
$x_۵$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲

تکرار دوم. در این‌جا $w = (۰, ۰, -۲)$ با توجه مجدد $z_j - c_j = wa_j - c_j$ داریم:

$$z_۱ - c_۱ = ۱ \ , \ \ z_۲ - c_۲ = ۲ \ , \ \ z_۳ - c_۳ = -۳$$

$$z_۴ - c_۴ = -۱ \ , \ \ z_۶ - c_۶ = -۴$$

$$z_۹ - c_۹ = -۲$$

پس $k = ۲$ و $x_۲$ متغیر واردشونده خواهد بود و داریم:

$$\bar{a}_۲ = B^{-۱}a_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

با قرار دادن بردار $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ در سمت راست جدول داریم:

					$x_۲$
z	۰	۰	-۲	۸	۲
$x_۷$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۴	$\boxed{۱}$
$x_۸$	۰	۱	۰	۴	-۱
$x_۵$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲	۰

پس از انجام عملیات محوری و حذف ستون $x_۲$ جدول زیر را داریم:

z	-۲	۰	-۱	-۱۶
$x_۲$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۴
$x_۸$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۸
$x_۵$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲

تکرار سوم. در این‌جا $w = (-۲, ۰, -۱)$ می‌باشد. مجدداً با توجه به فرمول محاسبه‌ی $z_j - c_j$ داریم:

$$z_۱ - c_۱ = -۱ \ , \ z_۲ - c_۲ = -۴$$

$$z_۴ - c_۴ = -۲ \ , \ z_۶ - c_۶ = -۵$$

$$z_۹ - c_۹ = -۱$$

چون بازاء هر $j \in N_B$ داریم $z_j - c_j \leq ۰$ پس جواب متناظر جدول، جواب بهینه مسأله می‌باشد، یعنی:

$$x^* = (۰, ۴, ۰, ۰, ۲, ۰, ۰, ۸) \ , \ z^* = -۱۶$$

و بدین‌صورت به پایان عملیات می‌رسیم.

۳-۳ سیمپلکس اصلاح شده با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه به‌صورت فرم حاصلضرب[1]

در این قسمت نوع دیگری از کاربرد روش سیمپلکس اصلاح شده را ذکر می‌کنیم که در آن عکس ماتریس پایه به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی داده می‌شود. قبلاً یادآور

1) Product Form of Inverse

شدیم که اگر ماتریس نامنفرد $B = [a_1, \ldots, a_m]$ در دست باشد و ستون jام آن یعنی a_j با برداری مانند a جایگزین گردد رابطه زیر بین عکس ماتریس‌های فوق برقرار است:

$$B_{New}^{-1} = E_j B^{-1}$$

که در آن B_{New} ماتریس حاصل از B است که به‌جای ستون iام بردار a قرار داده شده است و فرض بر این است که جایگزینی به‌صورتی بوده که B_{New} ماتریس نامنفرد می‌باشد و در آن:

$$E_j = [e_1, \ldots, e_{j-1}, \eta, e_{j+1}, \ldots, e_m]$$

و

$$\eta = (-\frac{\lambda}{\lambda_j}, \ldots, -\frac{\lambda}{\lambda_{j-1}}, \frac{1}{\lambda_j}, -\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}, \ldots, -\frac{\lambda_m}{\lambda_j})$$

و

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = B^{-1} a$$

با استفاده از مطلب فوق می‌توان عکس ماتریس نامنفرد B را به‌صورت زیر نوشت:

$$B = E_m E_{m-1} \ldots E_1 \qquad (۳-۲)$$

که در آن E_k ماتریس یکانی است که به‌جای ستون kام آن بردار η متناظر قرار داده شده است.

معادله‌ی ۳-۲ که عکس ماتریس پایه را به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی بیان می‌کند فرم حاصل‌ضربی عکس ماتریس گویند. با به‌کاربردن این‌صورت، تمامی قدم‌های سیمپلکس را می‌توان بدون انجام عمل محوری، صورت داد. قبل از بیان کامل مطلب، آموزنده است که ضرب یک بردار در یک ماتریس مقدماتی را مورد مطالعه قرار دهیم.

الف. ضرب یک بردار مانند c از سمت چپ در E. فرض کنید E ماتریس مقدماتی با بردار ستونی غیرواحد g در وضعیت r و c برداری به‌صورت $c = (c_1, \ldots, c_m)$ داریم:

$$cE = (c_1, \ldots, c_m)[e_1, e_2 \ldots, e_{r-1}, g, e_r, \ldots, e_m] \qquad (*)$$

که در آن: $g = (g_1, \ldots, g_m)^t$

حاصل، عبارت خواهد بود از:

$$cE = (c_1, \ldots, c_{r-1}, \sum_{i=1}^{m} c_i g_i, c_{r+1}, \ldots, c_m)^t = (c_1, \ldots, c_g, \ldots, c_m) \tag{۳-۳}$$

ب. ضرب برداری مانند a **از سمت راست در** E. یعنی:

$$Ea = [e_1, \ldots, e_{r-1}, g, e_{r+1}, \ldots, e_m]a$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &a = (a_1, \ldots, a_m)^t \\ =&(a_1 + g_1 a_r, a_2 + g_2 a_r, \ldots, g_r a_r, \ldots, a_m + g_m a_r)^t \\ =&(a_1, \ldots, a_{r-1}, 0, a_{r+1}, \ldots, a_m)^t + \\ &a_r(g_1, g_2, \ldots, g_m)^t \end{aligned}$$

به عبارت دیگر:

$$Ea = \hat{a} + a_r g \tag{۴-۳}$$

که در آن $\hat{a}$ بردار حاصل از بردار a است که به‌جای مؤلفه‌ی rام آن عدد صفر قرار داده شده است.

با این مقدمات روش سیمپلکس اصلاح شده را ذکر می‌کنیم. محاسبه‌ی بردار ضرایب سیمپلکس یعنی $w = c_B B^{-1}$ در تکرار tام، w به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$w = c_B B_t^{-1} = c_B.E_{t-1}.E_{t-2}, \ldots, E_2.E_1$$

محاسبه w به‌صورت تکراری چنین محاسبه می‌گردد. ابتدا $(c_B E_{t-1})$ را طبق فرمول **۳-۳** محاسبه می‌کنند و سپس با به‌کار بردن بردار $(c_B E_{t-1})$ $(c_B E_{t-1})E_{t-2}$ را به‌دست می‌آورند

و همین روش را ادامه می‌دهند. این روش BTRAN[1] نامیده می‌شود. پس از محاسبه‌ی w، از فرمول:

$$wa_j - c_j = z_j - c_j$$

برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌گردد. پس از محاسبه $z_j - c_j$ها اگر:

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

منفی یا صفر باشد متوقف می‌گردیم در غیراین‌صورت اگر $z_k - c_k > ۰$، x_k را وارد پایه می‌کنیم با استفاده از روش ذیل متغیر خارج‌شونده را مشخص می‌نمائیم.

محاسبه‌ی ستون $\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{k}$ و $\bar{\mathbf{b}}$. با توجه به‌این‌که متغیر x_k، متغیر واردشونده می‌باشد، ستون $\bar{a}_k$ از رابطه‌ی ذیل محاسبه می‌گردد:

$$\bar{a}_k = B_t^{-۱} a_k = E_{t-۱} E_{t-۲} \ldots E_۲ E_۱ a_k$$

در این‌جا نیز با استفاده از معادله‌ی **۳-۴** ابتدا $(E_۱ a_k)$ و سپس $E_۲(E_۱ a_k)$ محاسبه می‌گردد و همین روش ادامه پیدا می‌کند. این روش به FTRAN[2] معروف می‌باشد. اگر $\bar{a}_k \leq ۰$ متوقف می‌گردیم، زیرا در این‌حالت مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد. در غیراین‌صورت با انجام تست می‌نیمم متغیر واردشونده را مشخص می‌نمائیم. فرض کنید که متغیر خارج‌شونده x_{Br} باشد، ماتریس مقدماتی E_t با بردار ستونی غیرواحد g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g = \left(-\frac{\bar{a}_{۱k}}{\bar{a}_{rk}}, \ldots, \frac{۱}{\bar{a}_{rk}}, \ldots, -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}}\right)^t$$

و

$$E_t = [e_۱, \ldots, g, \ldots, e_m]$$

و بردار سمت راست چنین خواهد بود:

$$B_{t+۱}^{-۱} b = E_t B_t^{-۱} b = E_t (B_t^{-۱} b)$$

1) Backward Transform process(BTRAN) 2) Forward Transformation Process(FTRAN)

۴-۳ به‌روز نمودن عکس پایه[1]

عکس ماتریس پایه با تولید E_t به‌روز می‌گردد. در این‌جا لازم به یادآوری می‌دانیم که عکس ماتریس پایه که به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی داده می‌شود. در هر تکرار یک عامل ضرب به آن افزوده می‌گردد. وقتی این مقدار زیاد شود لازم می‌آید که عکس ماتریس پایه را مجدداً به‌صورت حاصل‌ضرب m ماتریس مقدماتی به‌دست آورد. یک ماتریس مقدماتی را می‌توان به‌صورت $(g,r)^t$ درکامپیوتر حفظ نمود که در آن g بردار غیرواحد و r موقعیت آن در I_m می‌باشد.

۳-۴-۲ مثال. مسأله‌ی زیر را با به‌کاربردن روش سیمپلکس اصلاح شده و با استفاده از صورت حاصل‌ضربی عکس ماتریس پایه حل نمائید:

$$\begin{array}{llrrrl} \text{Min} & z = & -x_۱ & -۲x_۲ & -x_۳ & \\ \text{s.t.} & & x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & \leq ۴ \\ & & -x_۱ & +۲x_۲ & -۲x_۳ & \leq ۶ \\ & & ۲x_۱ & +x_۲ & & \leq ۵ \\ & & \multicolumn{4}{l}{x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰} \end{array}$$

با معرفی متغیرهای کمکی $x_۴$ و $x_۵$ و $x_۶$ پایه اصلی شامل $x_۴$ و $x_۵$ و $x_۶$ خواهد بود.

تکرار اول.

$$\bar{b} = (۴, ۶, ۵)^t$$

$$x_B = (x_{B_۱}, x_{B_۲}, x_{B_۳})^t = (x_۴, x_۵, x_۶)^t = (۴, ۶, ۵)^t$$

$$x_N = (x_۱, x_۲, x_۳)^t = (۰, ۰, ۰)^t$$

$$z = ۰ \qquad w = ۰ = c_B I = (۰, ۰, ۰)$$

1) Updating the Basic Inverse

با توجه به $z_j - c_j = wa_j - c_j$ داریم:

$$z_۱ - c_۱ = ۱$$

$$z_۲ - c_۲ = ۲$$

$$z_۳ - c_۳ = -۱$$

بنابراین $k = ۲$ و $x_۲$ متغیر واردشونده خواهد بود:

$$\bar{a} = B^{-۱}a_۲ = Ia_۲ = (۱, ۲, ۱)^t$$

متغیر خارج‌شونده با استفاده از تست می‌نیمم به‌صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_۱}{\bar{a}_{۱۲}}, \frac{\bar{b}_۲}{\bar{a}_{۲۲}}, \frac{\bar{b}_۳}{\bar{a}_{۳۲}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{۴}{۱}, \frac{۶}{۲}, \frac{۵}{۱}\right\} = ۳$$

پس $x_۵$ متغیر خارج‌شونده می‌باشد. و ماتریس مقدماتی $E_۱$ با بردار غیریکانی g چنین خواهد بود.

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{a}_{۱۲}}{a_{۲۲}} \\ \frac{۱}{\bar{a}_{۲۲}} \\ -\frac{\bar{a}_{۳۲}}{\bar{a}_{۲۲}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

بنابراین $E_۱$ به‌صورت $\begin{bmatrix} g \\ ۲ \end{bmatrix}$ نشان داده می‌شود.

تکرار دوم. $\bar{b}$ را به‌روز می‌کنیم:

$$\bar{b} = E_۱\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} + ۶\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_۱} \\ x_{B_۲} \\ x_{B_۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۴ \\ x_۲ \\ x_۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۵ \\ x_۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$z = 0 - \bar{b}_2(z_2 - c_2) = -6$$

$$w = c_B E_1 = (0, -2, 0)E_1 = (0, -1, 0)$$

$$z_1 - c_1 = 2$$

$$z_3 - c_3 = 1$$

بنابراین $k = 1$ و x_1 متغیر واردشونده خواهد بود.

$$\bar{a}_1 = E_1 a_1 = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

اندیس متغیر خارج‌شونده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}}, \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{31}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{2}{\frac{5}{2}}\right\} = \frac{2}{3}$$

پس $r = 1$ یعنی $x_{B_1} = x_4$. پس x_1 وارد می‌گردد و x_4 خارج می‌شود.

ستون غیریکانی E_2 به‌صورت زیر داده شده است:

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{a}_{11}} \\ -\frac{\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{11}} \\ -\frac{\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و E_2 به‌صورت $\begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}$ ضبط می‌گردد.

(توجه شود که صرفه‌جویی در حفظ داده‌ها تا چه اندازه است).

تکرار سوم. به‌روز نمودن $\bar{b}$ با توجه به آن‌چه گذشت:

$$\bar{b} = E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = -6 - \bar{b}_1(z_1 - c_1) = -\frac{22}{3}$$

$$w = c_B E_2 E_1 = (c_B E_2) E_1 = (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$$

$$z_3 - c_3 = -\frac{5}{3}$$

$$z_5 - c_5 = -\frac{1}{3}$$

بنابراین بازاء هر j، $z_j - c_j \leq 0$ پس جواب بهینه است.

$$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3})$$

$$z^* = -\frac{22}{3}$$

۳-۵ مقایسه بین روش سیمپلکس اصلاح شده و سیمپلکس

در این‌جا به‌نظر می‌رسد که مقایسه‌ای بین این دو صورت گیرد. در سیمپلکس اصلاح شده با جدولی کار می‌کنیم که اندازه آن $(m+1) \times (m+1)$ می‌باشد، در صورتی‌که در سیمپلکس با جدولی در اندازه $(n+1) \times (m+1)$ کار صورت می‌گیرد. اگر n نسبت به m بزرگ باشد (که در مسائل عملی همین‌طور است) در ضبط اطلاعات در حافظه کامپیوتر صرفه‌جویی بسیار زیاد صورت می‌گیرد. تعداد ضرب‌ها (تقسیم به عنوان ضرب درنظر گرفته شده زیرا a/b یعنی $a.\frac{1}{b}$ و تفریق به عنوان جمع زیرا $a - b$ یعنی $(a + (-b))$ و جمع‌ها در جدول زیر آمده است. خوانندگان به عنوان تمرین صحت این ادعا را اثبات نمایند.

مقایسه‌ی روش‌های سیمپلکس و سیمپلکس اصلاح شده

		عمل‌محوری	$z_j - c_j$ها	کل
سیمپلکس	ضرب‌ها	$(m+۱)(n-m+۱)$		$m(n-m)+n+۱$
	جمع‌ها	$m(n-m+۱)$		$m(n-m+۱)$
سیمپلکس اصلاح‌شده	ضرب‌ها	$(m+۱)^۲$	$m(n-m)$	$m(n-m)+(m+۱)^۲$
	جمع‌ها	$(m)(m+۱)$	m(n-m)	$m(n+۱)$

جدول (۳-۱)

از جدول (۳-۱) ملاحظه می‌گردد که تعداد عملیات موردنیاز در خلال تکرار روش سیمپلکس تا حدی کمتر از روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد. توجه نمائید که بهرحال در بیشتر مسائل عملی ماتریس تکنولوژی پراکنده[1] می‌باشد، یعنی چگالی آن d ($d =$ تعداد اعضای غیرصفر تقسیم بر تعداد کل اعضا) کمتر از $\frac{۵}{۱۰۰}$ می‌باشد در روش سیمپلکس اصلاح شده از این موقعیت می‌توان استفاده نمود. بالاخص در محاسبه‌ی $z_j - c_j$. توجه کنید $z_j = wa_j$ و

$$wa_j = \sum_{i=۱}^{m} w_i a_{ij}$$

و می‌توان از اعضای صفر چشم‌پوشی نمود که صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای را دربرخواهد داشت. برای اطلاع بیشتر در این مورد به [] مراجعه شود.

۳-۶ روش سیمپلکس دوآل[2]

روش سیمپلکس دوآل، مسأله‌ی دوآل را مستقیماً در جدول سیمپلکس پرایمال حل می‌نماید. در هر تکرار از یک جواب اساسی شدنی دوآل به جواب اساسی شدنی دیگری از دوآل می‌رویم تا بهینگی حاصل گردد یا نتیجه شود که دوآل نامحدود می‌باشد و پرایمال نشدنی می‌باشد. توجه شود که طبق شرایط K.K.T شرط بهینگی عبارت است از پرایمال شدنی بودن، دوآل شدنی بودن و برقرار بودن شرایط مکمل زاید. اینک به بررسی این مطلب می‌پردازیم که تفسیر

1) Sparce 2) Dual Simplex Method

دوآل شدنی بودن در جدول سیمپلکس چیست؟ مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید B پایه‌ای برای مسأله‌ی فوق باشد که ضرورتاً شدنی نیست

					متغیرهای کمکی			
	z	x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}	RHS
z	1	$z_1 - c_1$	$\dots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\dots$	$z_{n+m} - c_{n+m}$	$c_B \bar{b}$
x_{B_1}	0	$\bar{a}_{11}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}_{1n+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n+m}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$\bar{a}_{m1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{a}_{mn+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn+m}$	$\bar{b}_m$

جدول فوق پرایمال شدنی است اگر $\bar{b}_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$؛ یعنی اگر $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$.
به علاوه جدول بهینه است اگر:

$$z_j - c_j \leq 0 \qquad j = 1, 2, \dots, m + n$$

تعریف می‌کنیم $w = c_B B^{-1}$ برای $j = 1, \dots, n$ داریم:

$$z_j - c_j = w a_j - c_j$$

از این‌رو $z_j - c_j \leq 0$ برای $j = 1, \dots, n$ مستلزم آن است که $w a_j - c_j \leq 0$ $(j = 1, \dots, n)$ که آن هم مستلزم برقراری $wA \leq c$؛ به‌علاوه $a_{n+i} = e_i$ و $c_{n+i} = 0$ $(i = 1, \dots, m)$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} z_{n+i} - c_{n+i} &= w a_{n+i} - c_{n+i} \\ &= w(-e_i) - 0 \\ &= -w_i \end{aligned}$$

به‌علاوه اگر $z_{n+1} - c_{n+i} \leq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ در این‌صورت خواهیم داشت $w_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$، بنابراین $w \geq 0$ حاصل می‌گردد. آن‌چه در بالا ثابت شد به‌طور خلاصه چنین بیان می‌گردد. اگر $z_j - c_j \leq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m + n)$ این مطلب مستلزم آن است که $wA \leq c$ و $w \geq 0$ که در آن $w = c_B B^{-1}$. به عبارت دیگر، شدنی بودن دوآل همان میزان بهینگی است یعنی $z_j - c_j$ (بازاء هر j) در بهینگی داریم:

$$w^* = c_B B^{-1}$$

$$N^* = \text{مقدار بهینه تابع مقصود دوآل} = (c_B B^{-1})b = c_B(B^{-1}b) = c_B\bar{b} = z^*$$

یعنی مقدار بهینه تابع مقصود پرایمال و دوآل مساوی می‌باشند. بنابراین جمع‌بندی مطالب بالا را به‌صورت قضیه‌ی ذیل بیان می‌کنیم:

۳-۶-۳ قضیه. در بهینگی می‌نیمم نمودن مسأله‌ی پرایمال به‌صورت کانونی (یعنی $z_j - c_j \leq 0$ بازاء هر j)، $w^* = c_B B^{-1}$ جواب بهینه‌ی دوآل می‌باشد. به‌علاوه $w_i^* = -(z_{n+i} - c_{n+i}) = -z_{n+i}$ برای $(i = 1, \ldots, m)$. توجه کنید که تحلیل متقارن برای حالت قیدهای تساوی نیز برقرار می‌باشد. برای جدول بهینه که متناظر پایه B می‌باشد با قرار دادن $w^* = c_B B^{-1}$، مجدداً شرایط بهینگی $z_j - c_j \leq 0$ مستلزم $w^* a_j - c_j \leq 0$ برای $j = 1, \ldots, n$ می‌باشد؛ یعنی w^* دوآل شدنی است و داریم:

$$z^* = c_B(B^{-1}b) = (c_B B^{-1})b = w^*$$

یعنی بهینه تابع مقصود پرایمال مساوی مقدار بهینه تابع مقصود دوآل می‌باشد. با این مقدمات به تشریح روش سیمپلکس دوآل می‌پردازیم.

۳-۶-۴ روش سیمپلکس دوآل. مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

در بعضی موارد، پیدا نمودن یک جواب اساسی شدنی برای مسأله بسیار مشکل می‌باشد، مگر این‌که به‌طورکامل از **متغیرهای تصنعی** استفاده نمائیم. در بعضی از حالات پیدا نمودن یک پایه که ضرورتاً پرایمال شدنی نمی‌باشد ولی دوآل شدنی است؛ ممکن می‌باشد (یعنی بازاء هر j $z_j - c_j \leq 0$ برای مسأله‌ی می‌نیمم نمودن). در چنین حالتی بسیار مفید خواهد بود که صورت دیگری از روش سیمپلکس ابداع نمود؛ که با حفظ شدنی بودن دوآل و برقرار بودن شرایط مکمل زاید، مسأله را به سمت پرایمال شدنی ببرد.

برای این منظور جدول زیر را درنظر بگیرید:

	z	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n	RHS
z	1	$z_1 - c_1$	$\dots$	$z_j - c_j$	$\dots$	$z_k - c_k$	$\dots$	$z_n - c_n$	$c_B\bar{b}$
x_{B_1}	0	$\bar{a}_{11}$	$\dots$	$\bar{a}_{1j}$	$\dots$	$\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$\bar{a}_{r1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rj}$	$\dots$	$\boxed{\bar{a}_{rk}}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$\bar{a}_{m1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mj}$	$\dots$	$\bar{a}_{mk}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

فرض کنید در جدول فوق $z_j - c_j \leq 0$ $(j = 1, \dots, n)$ (مسأله از نوع می‌نیمم نمودن می‌باشد) اگر در جدول فوق $\bar{b}_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$ آن‌گاه جدول متناظر یک جواب بهینه می‌باشد (یادآور می‌شویم که در جدول سیمپلکس همواره شرایط مکمل زاید برقرار می‌باشد). اگر چنین نباشد، پس rی است که $\bar{b}_r < 0$. با انتخاب سطر rام به عنوان سطر محوری و ستونی مانند k با $\bar{a}_{rk} < 0$ به عنوان ستون محوری، می‌توان یک مقدار سمت راستی مانند $\bar{b}_r > 0$ به‌دست آورد. در خلال یک دنباله از عملیات محوری این چنین امیدوار هستیم که به جواب بهینه پرایمال برسیم. سوالی که باقی می‌ماند این است که چگونه ستون محوری را انتخاب نمائیم، به‌طوری‌که پس از انجام عمل محوری شدنی بودن دوآل حفظ شود. ثابت می‌کنیم که ستون k با قاعده‌ی می‌نیمم زیر انتخاب گردد، شدنی بودن دوآل پس از انجام **عمل محوری** حفظ خواهد شد.

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \mathrm{Min}\left\{\frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rk}} \;\middle|\; \bar{a}_{rk} < 0\right\} \qquad (۳-۵)$$

توجه کنید که:

$$(z_j - c_j)_{New} = (z_j - c_j) - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k) \qquad (*)$$

در $(*)$ $\bar{a}_{rk} < \circ$ و $z_k - c_k \leq \circ$ پس اگر:

الف. $\bar{a}_{rj} \geq \circ$ خواهیم داشت:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq (z_j - c_j)_{Old} \leq \circ$$

ب. $\bar{a}_{rj} < \circ$ در این‌حالت بایستی:

$$(z_j - c_j) - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k) \leq \circ$$

به عبارت دیگر:

$$(z_j - c_j) \leq \frac{\bar{a}_{rj}}{a_{rk}}(z_k - c_k)$$

یا:

$$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}}$$

یعنی:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\left\{\frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < \circ\right\}$$

و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم. یعنی:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq \circ \qquad \text{بازاء هر } j؛$$

به‌طور خلاصه اگر ستون واردشونده طبق ۳-۴ صورت پذیرد آن‌گاه پایه جدید به‌دست آمده دوآل شدنی خواهد بود، به عبارت دیگر مسأله دوآل شدنی باقی می‌ماند. به‌علاوه مقدار تابع مقصود، برابر با:

$$c_B B^{-1} b - \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}}.\bar{b}_r \geq c_B B^{-1} b \qquad (\text{چرا؟})$$

یعنی مقدار تابع مقصود یا افزایش پیدا می‌کند یا ثابت می‌ماند. یعنی مقدار تابع مقصود بدتر نمی‌گردد.

آن‌چه تا به‌حال گفته شد آن است که روش فوق‌الذکر از یک جواب اساسی شدنی دوآل به یک جواب اساسی شدنی دیگر دوآل می‌رود به‌صورتی‌که مقدار تابع مقصود دوآل بدتر نمی‌گردد. برای تکمیل موضوع مطلبی را درنظر بگیرید که بسیار مهم است. فرض کنید $\bar{b}_r < 0$ به‌عنوان سطر محوری انتخاب گردیده است و تمامی اعضای آن جز $\bar{b}_r < 0$ نامنفی می‌باشند یعنی در معادله:

$$x_{Br} + \sum_{j \in N_B} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r < 0 \qquad (۳-۶)$$

در این معادله $x_{Br} \geq 0$ و تمامی $a_{rj} \geq 0$ و $x_j \geq 0$ یعنی سمت چپ معادله ≥ 0 می‌باشد ولی سمت راست آن منفی است به‌عبارتی هیچ $x_j \geq 0$ یافت نمی‌شود که در این معادله صدق نماید. یعنی قیود ناسازگارند یعنی پرایمال نشدنی است. چون فرض بر این بود که دوآل شدنی است، نتیجه می‌شود که دوآل نامحدود می‌باشد. (به عنوان تمرین دوآل را یک مسأله مستقل درنظر بگیرید و جهت شدنی دورشونده‌ای برای آن به‌دست آورید که $bd > 0$).

۳-۶-۵ خلاصه روش سیمپلکس دوآل (برای مسأله از نوع می‌نیمم نمودن).

قدم اولیه. یک پایه مانند B برای پرایمال پیدا نمائید که بازاء هر j، $z_j - c_j \leq 0$ (روش پیدا نمودن چنین پایه‌ای درهمین فصل گفته خواهد شد.)

قدم اصلی.

۱) اگر $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول، جواب بهینه است. در غیراین‌صورت سطری مانند r انتخاب نمائید که $\bar{b}_r < 0$ روش انتخاب معمولاً به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{b}_r = \text{Min}\left\{\bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0\right\}$$

۲) اگر $\bar{a}_{rj} \geq 0$ (بازاء هر j) متوقف شوید، دوآل نامحدود است و پرایمال نشدنی است.

درغیراین‌صورت ستون kام به عنوان ستون محوری طبق فرمول زیر انتخاب نمائید:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \mathrm{Min}\left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \mid a_{rj} < ۰ \right\}$$

۳) با ملحوظ داشتن عضو محوری $\bar{a}_{rk}$، عملیات محوری انجام دهید و به (۱) در قدم اصلی برگردید.

روش فوق‌الذکر را با مثالی روشن می‌نمائیم.

۳-۶-۶ مثال. مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس دوآل حل نمائید:

$$\begin{aligned} \mathrm{Min} \quad & z = ۲x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ \\ \mathrm{s.t.} \quad & x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \geq ۳ \\ & ۲x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ \geq ۴ \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

با معرفی متغیر $x_۴$ و $x_۵$ مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{array}{llllllll} \mathrm{Min} & z = & ۲x_۱ & +۳x_۲ & +۴x_۳ & & & \\ & & x_۱ & +۲x_۲ & +x_۳ & -x_۴ & & = ۳ \\ & & ۲x_۱ & -x_۲ & +۳x_۳ & & -x_۵ & = ۴ \\ & & \multicolumn{6}{l}{x_j \geq ۰ \quad j = ۱,۲,۳,۴,۵} \end{array}$$

قیدهای تساوی در عدد (۱-) ضرب می‌کنیم تا در ماتریس تکنولوژی ماتریس I ظاهرگردد.

$$\begin{array}{llllllll} \mathrm{Min} & z = & ۲x_۱ & +۳x_۲ & +۴x_۳ & & & \\ & & -x_۱ & -۲x_۲ & -x_۳ & +x_۴ & & = -۳ \\ & & -۲x_۱ & +x_۲ & -۳x_۳ & & +x_۵ & = -۴ \\ & & \multicolumn{6}{l}{x_j \geq ۰ \quad j = ۱,۲,۳,۴,۵} \end{array}$$

جدول سیمپلکس اولیه چنین خواهد بود:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	$\boxed{-2}$	1	-3	0	1	-4

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	-4	-1	0	-1	4
x_4	0	0	$\boxed{-\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

چون $\bar{b} \geq 0$ و بازاء هر j، $z_j - c_j \leq 0$، جواب‌های پرایمال و دوآل در دست می‌باشد که عبارتند از:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0)$$
$$w^* = (w_1^*, w_2^*) = (\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$$

توجه کنید که w_1^* و w_2^* به‌ترتیب قرینه‌ی $z_j - c_j$ متناظر در ستون‌های ۴ و ۵ که متناظر متغیرهای x_4 و x_5 می‌باشند. همین‌طور توجه نمائید که در جدول‌های متوالی، مقدار تابع مقصود مرتب افزایش نموده است. (برای مسأله‌ی دوآل از نوع ماکزیمم نمودن).

روش سیمپلکس دوآل روش متقارب است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که روش سیمپلکس دوآل در غیاب تبه‌گنی متقارب می‌باشد (یعنی مسأله را در تعداد متناهی از مراحل حل می‌کند). توجه نمائید که روش سیمپلکس دوآل از یک جواب اساسی شدنی دوآل به یک جواب اساسی شدنی دیگر می‌رود و همین‌طور توجه نمائید که اختلاف بین دو مقدار تابع مقصود از تکراری به تکرار بعدی برابر با $\alpha = \bar{b}_r . \frac{(z_k - c_k)}{\bar{a}_{rk}}-$ می‌باشد، که چون $\bar{b}_r < 0$ و $-(z_k - c_k) > 0$ و $\bar{a}_{rk} < 0$ پس مقدار α مثبت می‌باشد

یعنی تابع مقصود در این حالت **اکیداً صعود** می‌نماید و هیچ پایه‌ای تکرار نمی‌گردد در نتیجه الگاریتم در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید. (توجه داشته باشید که حل مسأله به‌این معنی است که به جواب بهینه می‌رسد یا نتیجه می‌گردد که پرایمال نشدنی و دوآل نامحدود می‌باشد). در این مرحله از مطلبی استفاده شد که $-(z_k - c_k) > 0$. چرا $-(z_k - c_k) > 0$؟

برای جواب دادن به این سوال توجه داشته باشید که فرض کردیم مسأله غیرتبه‌گن می‌باشد. چون x_k یک متغیر غیراساسی می‌باشد پس مقدار آن صفر می‌باشد با توجه به مطلب زیر یعنی:

$$(c_j - wa_j)x_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$w_i(a^i x - bi) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

در حالت غیرتبه‌گنی از عوامل ضرب فوق یکی صفر و دیگری مخالف صفر می‌باشد. حال رابطه‌ی $(z_k - c_k)x_k = (c_k - wa_k)x_k = 0$ را درنظر بگیرید.

پس بایستی $c_k - z_k > 0$ یعنی $-(z_k - c_k) > 0$ و این همان چیزی بود که مورد استفاده قرارگرفت و تقارب متناهی الگاریتم را تضمین نمود. اثبات متقارب بودن الگاریتم در حالت تبه‌گنی نیاز به مقدماتی دارد که ذیلاً بیان می‌کنیم و سپس در این حالت متقارب بودن آن را اثبات می‌نمائیم .

چگونه می‌توان یک جواب شدنی دوآل برای مسأله پیدا نمود؟ نشان می‌دهیم که با به‌کار بردن **تکنیک قید تصنعی** همواره می‌توان یک جواب دوآل شدنی برای مسأله به‌دست آورد (در صورتی‌که دوآل شدنی باشد) در به‌کاربردن روش سیمپلکس دوآل فرض بر این است که یک جواب اساسی شدنی دوآل در دست می‌باشد. برای به‌دست آوردن چنین جوابی به‌صورت ذیل عمل می‌کنیم:

فرض کنیم که m ستون اول تشکیل پایه اولیه را می‌دهند. قید $\sum_{j=m+1}^{n} x_j \leq M$ را به مسأله اضافه می‌کنیم. در این‌جا $M > 0$ یک عدد بسیار بزرگی است جدول اولیه ذیلاً نشان داده شده است؛ که در آن x_{n+1}، متغیر کمکی متناظر قید تصنعی می‌باشد.

	z	x_1	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n	x_{n+1}	RHS
z	۱	۰	$\dots$	۰	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$\dots$	z_n-c_n	۰	$c_B\bar{b}$
x_{n+1}	۰	۰	$\dots$	۰	۱	$\dots$	۱	۱	M
x_1	۰	۱	$\dots$	۰	$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$	۰	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	۰	۰	$\dots$	۱	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$	۰	$\bar{b}_m$

این قید اضافی تمامی متغیرهای غیراساسی را محدود می‌نماید بنابراین تمامی متغیرهای اساسی و در نتیجه تمامی مسأله‌ی پرایمال محدود خواهد شد. برای به‌دست آوردن یک جواب اساسی شدنی دوآل در جدول جدید فرض کنیم:

$$z_k - c_k = \mathrm{Max}\{z_j - c_j\}$$

ستون kام را به عنوان ستون واردشونده محوری انتخاب می‌کنیم و متغیر x_{n+1} را به عنوان متغیر خارج‌شونده به‌کارمی‌گیریم. پس از انجام عملیات محوری داریم:

$$(z_j - c_j)_{New} = (z_j - c_j) - \frac{a_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$$

الف. $z_j - c_j$ در این‌صورت $a_j = 0$ $\quad (j = 1, \dots, m)$ پس $(z_j - c_j)_{New} = 0$

ب. $z_j - c_j \neq 0$ با توجه به این‌که $\bar{a}_{rk} = 1$ و $\bar{a}_{rj} = 1$ پس:

$$z_j - c_j - (z_k - c_k) \leq 0$$

زیرا:

$$z_k - c_k = \mathrm{Max}\{z_j - c_j\}$$

پس:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq 0 \qquad \text{بازاء هر } j$$

یعنی جواب متناظر جدول دوآل شدنی می‌باشد.

با به‌کاربردن روش سیمپلکس دوآل یکی از سه حالت زیر رخ خواهد داد:

۱) که دوآل جواب نامتناهی دارد. در این‌حالت پرایمال نشدنی خواهد بود.

۲) جواب بهینه‌ای برای پرایمال و دوآل به‌دست آمده و $x^*_{n+۱} > ۰$ در این‌حالت قید $\sum x^*_j < M$ زائد است و جواب بهینه پرایمال در دست می‌باشد.

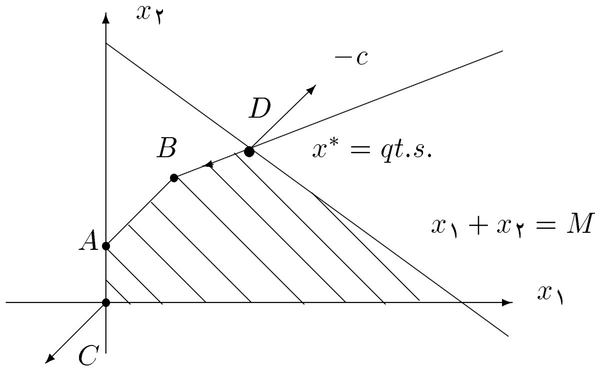
۳) $x^*_{n+۱} = ۰$ و جواب بهینه برای پرایمال و دوآل به‌دست آمده است.

در این حالت قید جدید (تصنعی) اضافه شده فعال می‌باشد دو حالت تشخیص می‌دهیم به شرح ذیل:

الف. $z_{n+۱} - c_{n+۱} < ۰$. در این‌حالت:

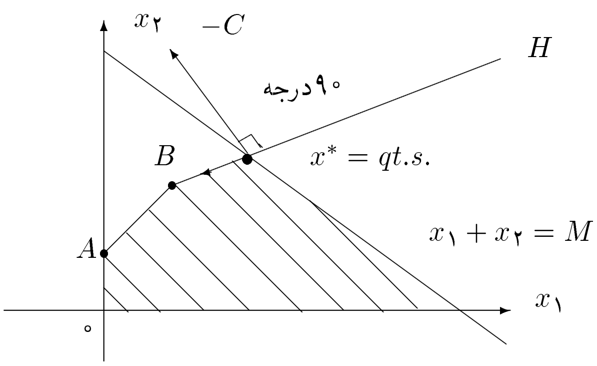
$$(-c)d_۰ = z_{n+۱} - c_{n+۱} < ۰$$

متغیر $x_{n+۱}$ یک متغیر غیراساسی است. و این قید تصنعی معرفی شده که مار بر نقطه بهینه است جواب پرایمال را محدود می‌نماید (حد می‌گذارد). هم‌چنان‌که M افزایش یابد تابع مقصود در راستای $d_۰$ کاهش می‌یابد (در حقیقت افزایش M باعث افزایش $x_{n+۱}$ می‌گردد) بنابراین پرایمال نامحدود خواهد بود. مطلب به طریق ترسیمی در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل (۳-۱)

ب. در این‌حالت $z_{n+۱} - c_{n+۱} = ۰$ در این‌حالت $z_{n+!} - c_{n+۱} = (-c)d = ۰$.



شکل (۳-۲)

در این‌جا نقطه رأسی B و تمامی نیم‌خط BH جواب بهینه است نقطه k یک **نقطه‌ی غیراساسی** است و بهینه است.

۳-۶-۷ مثال. جدول زیر را درنظر بگیرید. فرض کنیم روش سیمپلکس دوآل را می‌خواهیم در رابطه با جدول زیر به‌کاربریم:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	۱	۵	-۱	۰	۰
x_1	۰	۱	۲	-۱	۱	۰	۴
x_5	۰	۰	۳	۴	-۱	۱	۳

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	z	۱	۰	۵	۱	۰	۰	۰
x_6	۰	۰	۱	$\boxed{۱}$	۱	۰	۱	M
x_1	۰	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴
x_5	۰	۰	۳	۴	-۱	۱	۰	۳

با افزودن قید تصنعی $x_2 + x_3 + x_4 \leq M$ که متغیرکمکی آن x_6 می‌باشد. جدول فوق را خواهیم داشت.

از این جدول واضح است که:

$$\text{Max}(z_j - c_j) = z_3 - c_3 = 5 = -\bar{c}_3$$

پس متغیر $x_۳$ واردشونده و متغیر $x_۶$ خارج‌شونده خواهد بود. پس از انجام عمل محوری داریم:

	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	RHS
z	۱	۰	-۴	۰	-۶	۰	-۵	$-۵M$
$x_۳$	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱	M
$x_۱$	۰	۱	۳	۰	۲	۰	۱	$M+۴$
$x_۵$	۰	۰	-۱	۰	$\boxed{-۵}$	۱	-۴	$-۴M+۳$

در جدول فوق تمامی $z_j - c_j \leq ۰$ پس دوآل شدنی است با به‌کاربردن روش سیمپلکس دوآل می‌توان مسأله را حل نمود. ادامه عملیات به‌عنوان تمرین به‌عهده خواننده می‌باشد. توجه شود که در جدول فوق متناظر هر ستون غیراساسی $(\bar{c}_j, \bar{a}_j)^t < ۰$ می‌باشد. یادآور می‌شویم که متغیرهای $x_۱, \dots, x_n$ مکمل متغیرهای دوآل $w_{m+۱}, \dots, w_{m+n}$ و متغیرهای $w_۱, \dots, w_m$، مکمل متغیرهای $x_{n+۱}, \dots, x_{n+m}$ می‌باشند، که به‌صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$\overbrace{x_۱, \quad \dots \quad, x_m}^{\text{متغیرهای اساسی پرایمال}}, \overbrace{x_{m+۱}, \quad \dots \quad, x_n \;,\; x_{n+۱}, \dots, x_{n+m}}^{\text{متغیرهای غیراساسی پرایمال}}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{w_{m+۱}, \dots, w_{m+m}}_{\text{متغیرهای غیراساسی دوآل}}, \underbrace{w_{۲m+۱}, \dots, w_{n+m}, w_۱, \dots, w_m}_{\text{متغیرهای اساسی دوآل}}$$

در نمودار فوق فرض شده که $x_۱, \dots, x_m$ متغیرهای اساسی هستند و در نتیجه $x_{m+۱}, \dots, x_{m+n}$ متغیرهای غیراساسی می‌باشند.

عیناً $w_{۲m+۱}, \dots, w_{n+m}, w_۱, \dots, w_m$ متغیرهای اساسی و $w_{m+۱}, \dots, w_{m+m}$ متغیرهای غیراساسی دوآل می‌باشند.

	z	$x_۱$	$\dots$	x_m	$x_{m+۱}$	$\dots$	x_n	$x_{n+۱}$		$\dots$	x_{n+m}	RHS
z	۱	$-c_۱$	$\dots$	$-c_m$	$-c_{m+۱}$	$\dots$	$-c_n$	۰		$\dots$	۰	۰
$x_۱$	۰	$a_{۱۱}$	$\dots$	$a_{۱m}$	a	$\dots$	$a_{۱n}$	-۱	۰	$\dots$	۰	$b_۱$
$x_۲$	۰	$a_{۲۱}$	$\dots$	$a_{۲m}$	$a_{۲m+۱}$	$\dots$	$a_{۲n}$	۰	-۱	$\dots$	۰	$b_۲$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	۰	$a_{m۱}$	$\dots$	a_{mm}	$a_{mm+۱}$	$\dots$	a_{mn}	۰		$\dots$	-۱	b_m

۳-۷ الگاریتم پرایمال-دوآل

تا به‌حال دو نوع از الگاریتم‌های سیمپلکس را که اولی پرایمال سیمپلکس و دومی دوآل سیمپلکس بود ذکرکردیم. گفتیم که در پرایمال سیمپلکس مسأله را با یک جواب اساسی شدنی (در صورتی‌که موجود باشد) شروع می‌کنیم و با حفظ شرایط مکمل زاید، با انجام یک رشته از عملیات محوری یک جواب اساسی شدنی برای دوآل به‌دست می‌آوریم (تا به این نتیجه می‌رسیم که مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد). در روش دوآل سیمپلکس از یک جواب اساس شدنی برای دوآل شروع می‌کنیم و با حفظ شرایط مکمل زاید، در صورت وجود به یک جواب اساسی شدنی پرایمال می‌رسیم.

در این قسمت روشی را توضیح می‌دهیم که الگاریتم پرایمال - دوآل نامیده می‌شود که بیشتر شبیه الگاریتم دوآل سیمپلکس می‌باشد، با این تفاوت که الگاریتم به‌جای جواب اساسی شدنی دوآل از یک جواب شدنی دوآل شروع می‌نماید و با حفظ شرایط **مکمل زاید** در صورت وجود به یک جواب اساسی شدنی دوآل می‌رسد. مسائل پرایمال - دوآل زیر را درنظر بگیرید:

$$P)\qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & z(x) = cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$D)\qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & W(w) = wb \\ \text{s.t.} & wA \leq b \\ & w \ \text{آزاد} \end{array}$$

فرض کنید w یک جواب شدنی اولیه برای دوآل باشد؛ یعنی $wa_j \leq c_j$ (بازاء هر j). با توجه به شرایط مکمل زاید؛ اگر $wa_j = c_j$ آن‌گاه x_j می‌تواند مقدار مثبت اختیار نماید. سعی می‌کنیم از بین این متغیرها یک جواب شدنی برای پرایمال انتخاب نمائیم. فرض کنید:

$$Q = \{j \mid wa_j = c_j\}$$

در حقیقت Q مجموعه‌ی اندیس تمامی متغیرهای پرایمال می‌باشد که می‌توانند مقادیر مثبت اختیار نمایند. فاز اول سعی می‌نماید که یک جواب شدنی پرایمال برای متغیرهای پرایمال از بین این اندیس‌ها به‌دست آید. یعنی مسأله‌ی زیر را حل می‌نماید:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \sum_{j\in Q} 0 x_j + 1 x_a \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j\in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ &x_j \geq 0 \qquad j \in Q \\ &x_a \geq 0 \end{aligned}$$

متغیرهای تصنعی را به‌کارمی‌بریم تا در فاز اول یک جواب شدنی برای مسأله به‌دست آوریم. مسأله‌ی فوق را مسأله **پرایمال محدود شده**[1] می‌نامند. علت نام‌گذاری آن است که بعضی از متغیرهای پرایمال می‌توانند مقادیر مثبت اختیار نمایند.

پس از حل مسأله فوق، یک جواب بهینه برای مسأله به‌دست می‌آید. فرض کنیم مقدار بهینه‌ی تابع مقصود x_0 باشد. $x_0 = 0$ یا $x_0 > 0$. وقتی $x_0 = 0$، در این صورت یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی پرایمال حاصل گردیده است، زیرا تمامی متغیرهای تصنعی برابر با صفر می‌باشند، به‌علاوه جواب به‌دست آمده در شرایط مکمل زاید نیز صدق می‌نماید، یعنی $(wa_j - c_j)x_j = 0$. زیرا یا $j \in Q$ یا $j \in (\{1, 2, \ldots, n\} - Q) = \bar{Q}$. اگر $j \in Q$ در این‌صورت $wa_j - c_j = 0$ و اگر $j \in \bar{Q}$ در این‌صورت $x_j = 0$. بنابراین جواب به‌دست آمده در شرایط K.K.T صدق می‌کند، یعنی یک جواب بهینه برای مسأله می‌باشد. اگر $x_0 > 0$ در این‌صورت جواب حاصل پرایمال شدنی نمی‌باشد. در این‌حال بایستی یک جواب شدنی برای دوآل چنان بسازیم که اجازه ورود بعضی از متغیرها را به مسأله‌ی محدود شده در جهت تحلیل احتمالی تابع مقصود (یا حداقل بدتر نشدن آن) به‌ما بدهد. این‌کار، چنین صورت می‌گیرد که بردار w به‌صورتی اصلاح می‌گردد که متغیرهای پرایمال در مسأله‌ی محدود شده پرایمال در آن باقی بمانند و به علاوه حداقل یک متغیر که اندیس آن در Q نبود وارد مسأله

1) Restricted Primal Problem(RPP)

گردد. به‌علاوه واردشدن این متغیر به‌صورتی است که باعث تقلیل در مقدار x° می‌گردد. در جهت ساختن چنین بردار دوآل، مسأله‌ی فاز اول زیر را درنظر بگیرید (مسأله‌ی دوآل، مسأله محدود شده فوق‌الذکر)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & wb \\ & va_j \leq \circ \qquad j \in Q \\ & v \leq ۱ \\ & v \ \text{آزاد} \end{aligned}$$

فرض کنید v^* جواب بهینه‌ی، مسأله‌ی فوق‌الذکر باشد. در این‌صورت اگر یک متغیر اصلی مانند x_j عضوی از پایه مسأله‌ی محدود شده باشد، آن‌گاه بایستی $v^*a_j = \circ$. شرایط ورود به پایه در مسأله‌ی محدود شده آن است که قید متناظر آن در رابطه $v^*a_j > \circ$ صدق نماید. به‌هرحال هیچ متغیری در مسأله محدود شده پرایمال این خاصیت را ندارد، زیرا مسأله حل شده و شرایط بهینگی احرازگردیده است. برای تمامی $j \notin Q$، v^*a_j را محاسبه می‌نمائیم. اگر $v^*a_j > \circ$، در این‌صورت، x_j را می‌توان وارد مسأله‌ی پرایمال محدود شده نمود، با این مقصود که $x_\circ$ را کاهش دهد. بنابراین به دنبال پیدا نمودن راهی هستیم که x_j را در این حالت وارد مسأله‌ی محدود شده نمائیم.

بردار دوآل w' را با $\theta > \circ$ به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$w' = w + \theta v^*$$

پس:

$$\begin{aligned} w'a_j - c_j &= (w + \theta v^*)a_j - c_j \\ &= (wa_j - c_j) + \theta v^* a_j \end{aligned} \tag{۷-۳}$$

توجه داشته باشید که برای هر $j \in Q$ داریم:

$$wa_j - c_j = \circ \quad , \quad v^*a_j \leq \circ$$

بنابراین معادله‌ی ۳-۷ مستلزم آن است که:

$$w'a_j - c_j = \circ \qquad \text{بازاء هر } j \in Q$$

بالاخص اگر $j \in Q$، x_j متغیر پایه مسأله محدود شده باشد:

$$w'a_j - c_j = \circ \quad , \quad v^*a_j = \circ$$

پس x_j به این‌صورت می‌تواند در مسأله باقی بماند؛ زیرا $w'a_j - c_j \leq \circ$ اگر $j \notin Q$ و $v^*a_j \leq \circ$ در این‌صورت:

$$w'a_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta v^*a_j \leq \circ$$

اگر $j \notin Q$ و $v^*a_j > \circ$ در این‌صورت بایستی θ به صورتی انتخاب گردد که $w'a_j - c_j \leq \circ$. توجه داشته باشید که بازاء هر j $wa_j - c_j \leq \circ$. و برای $j \notin Q$، $wa_j - c_j < \circ$ زیرا اگر $wa_j - c_j < \circ$ این اندیس در Q بود. پس برای هر $j \notin Q$ و $v^*a_j > \circ$ بایستی:

$$w'a_j - c_j \leq \circ$$

یا

$$(wa_j - c_j) + \theta v^*a_j \leq \circ$$

یا

$$\theta v^*a_j \leq -(wa_j - c_j)$$

یا

$$\theta^* = \text{Min}\{\frac{-(wa_j - c_j)}{v^*a_j} \ \mid \ v^*a_j > \circ\} \qquad (۳-۸)$$

با این $\theta = \theta^*$ از رابطه‌ی ۳-۶ حداقل برای یک $j \notin Q$ داریم :

$$w'a_j - c_j = \circ$$

اگر این اندیس را k بنامیم، داریم:

$$w'a_k - c_k = \circ$$

به علاوه $v^*a_k > \circ$. پس بازاء هر $j = ۱, \ldots, n$ داریم $w'a_j - c_j \leq \circ$ یعنی w' جواب شدنی دوآل می‌باشد. پس x_k وارد مسأله‌ی محدود شده پرایمال می‌گردد.

توجه. در این‌جا سوالی که پیش می‌آید آن است که در مسأله‌ی جدید چه متغیرهایی اندیس آن‌ها مجموعه‌ی Q جدید را می‌سازند؟

$$Q_{New} = \{j \ | \ j = k \text{ یا } w'a_j - c_j = \circ\}$$
$$= \{k\} \cup \{j \ | \ v^*a_j = \circ \,\&\, \text{ در مسأله‌ی قبلی اساسی بود } x_j \ \}$$

پس Q جدید زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌باشد که،

$$Q \text{ قدیم مساوی نیست؛ زیرا } k \in Q_{New} \ , \ k \notin Q_{Old}$$

به علاوه برای $j \in Q_{New}$ دو حالت داریم:

الف. $j = k$ در این‌صورت طبق ۳-۶

$$w'a_k - c_k = \circ$$

ب. $j \in Q_{New}$ و $j \neq k$ داریم:

$$w'a_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta^* v^* a_j$$
$$= \circ + \circ = \circ$$

پس برای هر $j \in Q_{New}$ داریم:

$$w'a_j - c_j = \circ$$

به علاوه چون بعد ناحیه مسأله‌ی محدود شده افزایش می‌یابد، پس تابع مقصود بدتر نمی‌گردد (در این رابطه قدری تعمق کنید و مثال عددی بزنید) خلاصه آن‌که با اصلاح بردار شدنی دوآل، بردار جدیدی مانند w' که دوآل شدنی است به‌دست می‌آوریم که اجازه وارد شدن یک متغیر جدید را به مسأله‌ی پرایمال محدود شده به ما می‌دهد که توانایی تقلیل تابع مقصود را دارد.

۳-۷-۸ حالتی‌که دوآل نامحدود می‌گردد. در مطلب بالا روش تا زمانی ادامه می‌یابد که $x^\circ = \circ$، که در این‌حالت یک جواب اساسی شدنی پرایمال حاصل می‌گردد یا به این نتیجه می‌رسیم که $x_\circ > \circ$ و بازاء هر $j \notin Q$، داریم $v^* a_j \leq \circ$. در این‌حالت درنظر بگیرید:

$$w' = w + \theta v^*$$

چون بازاء هر j، $w' a_j - c_j \leq \circ$ و $v^* a_j \leq \circ$ داریم بازاء هر $\theta > \circ$:

$$w' a_j - c_j = (w a_j - c_j) + \theta v^* a_j \leq \circ \quad \text{بازاء هر } j$$

یعنی w' بازاء هر $\theta > \circ$ برای دوآل شدنی است و به‌علاوه:

$$w' b = (w + \theta v^*) b = wb + \theta v^* b$$

طبق **قضیه‌ی قوی دوآلیتی** $v^* b = x^\circ > \circ$ پس $w' b$ با افزایش θ افزایش می‌یابد و

$$w' b \longrightarrow +\theta$$

$$\theta \longrightarrow \infty$$

یعنی مسأله دوآل بهینه‌ی نامتناهی خواهد داشت که با توجه به قضایای دوآلیتی پرایمال نشدنی می‌گردد.

توجه. چرا معرفی x_k باعث کاهش $x_\circ$ می‌گردد (یا آن را بدتر نمی‌کند)؟

برای اثبات مطلب مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j\in Q} \circ x + \text{۱} x_a \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j\in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ & x_j \geq \circ \qquad j\in Q \\ & x_a \geq \circ \end{aligned}$$

وفرض کنید B پایه بهینه‌ی متناظر مسأله‌ی فوق‌الذکر باشد پس داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{j\in Q^\circ} x_j^* a_j + \sum_{j\in L} e_j x_{a_j}^* = b \\ & x_j^* \geq \circ \qquad j\in Q^\circ \subseteq Q \\ & x_a^* \geq \qquad j\in L \subseteq \{\text{۱}, \text{۲}, \ldots, m\} \end{aligned}$$

مسأله‌ی جدید محدود شده پرایمال چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j\in Q^\circ} \circ x_j + \sum_{j\in L} x a_j + \circ x_k \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j\in Q^\circ} a_j x_j + \sum_{j\in L} x_{a_j} + a_k x_k = b \\ & x_j \geq \circ \qquad j\in Q^\circ \cup \{k\} \\ & x a_j \geq \circ \qquad j\in L \end{aligned}$$

به‌علاوه $wa_k - c_k = z_k - c_k < \circ$ یعنی:

$$\begin{aligned} & x^\circ_{New} = x^\circ_{Old} - (z_k - c_k) x_k \\ & x_{New} = x^\circ_{Old} + \alpha \end{aligned}$$

که در آن $0 \leq \alpha = -(z_k - c_k)x_k$.

پس اگر x_k در بهینه جدید در پایه با مقدار مثبت باشد؛ x° به‌اندازه $\alpha > 0$ کاهش پیدا می‌کند. در غیراین‌صورت $x^{\circ}_{New} = x^{\circ}_{Old}$ خواهد بود در هر حالت مقدار تابع مقصود بدتر نمی‌گردد. یعنی اگر مسائل محدود شده پرایمال غیرتبه‌گن باشند، x° اکیداً کاهش می‌یابد.

۳-۷-۹ خلاصه الگاریتم پرایمال - دوآل (برای مسأله می‌نیمم نمودن).

قدم اولیه. بردار w را چنان انتخاب کنید که بازاء هر j،

$$wa_j - c_j \leq 0$$

قدم اصلی.

۱) فرض کنید

$$Q = \{j \mid wa_j - c_j = 0\}$$

مسأله‌ی پرایمال محدود شده زیر را حل نمائید:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{j\in Q} 0x_j + 1x_a \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in Q} a_j x_j + Ix_a = b \\
& x_j \geq 0 \qquad j \in Q \\
& x_a \geq 0
\end{aligned}$$

فرض کنید x° مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد.

اگر $x^{\circ} = 0$، در این‌صورت جواب حاصل از حل مسأله فوق در **شرایط K.K.T** صدق می‌کند و بهینه می‌باشد.

اگر $x^{\circ} > 0$، فرض کنیم v^* جواب بهینه دوآل مسأله محدود شده پرایمال فوق‌الذکر باشد.

۲) اگر بازاء هر j، $v^*a_j \leq \circ$، متوقف می‌گردیم. مسأله‌ی دوآل بهینه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه پرایمال نشدنی است. در غیراین‌صورت:

$$\theta^* = \underset{j}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^*a_j} \mid v^*a_j > \circ \right\} > \circ$$

و قرار دهید به جای w، $w + \theta^* v$ که یک جواب شدنی دوآل می‌باشد و به قدم اول برگرد.

اکنون با حل یک مثال مطلب فوق را بیشتر توضیح می‌دهیم.

۳-۷-۱۰ مثال. مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{Min} & ۳x_۱ & +۴x_۲ & +۶x_۳ & +۷x_۴ & +x_۵ & & \\
\mathrm{s.t.} & ۲x_۱ & -x_۲ & +x_۳ & +۶x_۴ & -۵x_۵ & -x_۶ & & = ۶ \\
& x_۱ & +x_۲ & +۲x_۳ & +x_۴ & +۲x_۵ & & -x_۷ & = ۳ \\
& x_۱ & ,x_۲ & ,x_۳ & ,x_۴ & ,x_۵ & ,x_۶ & ,x_۷ & \geq \circ
\end{array}$$

دوآل مسأله فوق چنین است. توجه کنید که به‌خاطر صورت تساوی قید دوم و اول $w_۲$ و $w_۱$ در مسأله‌ی زیر محدودیت علامتی ندارد.

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{Max} & ۶w_۱ & +۳w_۲ & \\
\mathrm{s.t.} & ۲w_۱ & +w_۲ & \leq ۳ \\
& -w_۱ & +w_۲ & \leq ۴ \\
& w_۱ & +۲w_۲ & \leq ۶ \\
& ۶w_۱ & +w_۲ & \leq ۷ \\
& -۵w_۱ & +۲w_۲ & \leq ۱ \\
& -w_۱ & & \leq \circ \\
& & -w_۲ & \leq \circ \\
& w_۱ & ,w_۲ & \text{آزاد}
\end{array}$$

یک جواب شدنی اولیه‌ی دوآل $w = (\circ, \circ)$ می‌باشد با قرار دادن این مقادیر در قیدهای دوآل، ملاحظه می‌گردد که فقط دو قید آخری فعال می‌باشند (تنگ هستند) بنابراین:

$$Q = \{۶, ۷\}$$

اگر x_8 و x_9 به‌عنوان متغیرهای تصنعی درنظرگرفته شوند، مسأله‌ی محدود شده پرایمال چنین خواهد بود.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & & & x_8 & +x_9 & \\
\text{s.t.} & -x_6 & & +x_8 & & = 6 \\
& & -x_7 & & +x_9 & = 7 \\
& x_6 & , x_7 & , x_8 & , x_9 & \geq 0
\end{array}$$

جواب بهینه‌ی مسأله فوق عبارت است از:

$$(x_6, x_7, x_8, x_9) = (0, 0, 6, 3)$$

و $x_0 = 9 > 0$. بنابراین دوآل مسأله پرایمال محدود شده فوق چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{llll}
\text{Max} & 6v_1 & +3v_2 & \\
& -v_1 & & \leq 0 \\
& & -v_2 & \leq 0 \\
& v_1 & & \leq 1 \\
& & v_2 & \leq 1
\end{array}$$

v_1, v_2 آزاد هستند

با به‌کاربردن **شرایط مکمل زاید**، ملاحظه می‌گردد که چون x_8 و x_9 اساسی می‌باشند، بایستی دو قید آخر تنگ باشند. و

$$v^* = (v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$$

با محاسبه‌ی $v^* a_j$ (برای هر j) داریم:

$$\begin{array}{lll}
v^* a_1 = 3 & v^* a_3 = 3 & v^* a_5 = -3 \\
v^* a_2 = 0 & v^* a_4 = 7 &
\end{array}$$

و

$$\theta^* = \text{Min}\left\{\frac{-(-3)}{3} \frac{-(-6)}{3} \frac{-(-7)}{7}\right\} = 1 > 0$$

و

$$\begin{aligned} w' &= w + \theta v^* \\ &= (۰, ۰) + ۱(۱, ۱) = (۱, ۱) \end{aligned}$$

با داشتن جواب شدنی $w' = (۱, ۱)$، مجدداً Q را محاسبه می‌نمائیم ملاحظه می‌گردد که قید اول و چهارم تنگ می‌باشند. پس:

$$Q = \{۱, ۴\}$$

که مسأله‌ی محدود شده پرایمال را به‌صورت زیر به‌ما می‌دهد:

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & & & x_۸ & +x_۹ & \\ \text{s.t.} & ۲x_۱ & +۶x_۴ & +x_۸ & & = ۶ \\ & x_۱ & +x_۴ & & +x_۹ & = ۳ \\ & x_۱ & , x_۴ & , x_۸ & , x_۹ & \geq ۰ \end{array}$$

جواب بهینه‌ی مسأله‌ی فوق عبارت است از:

$$(x_۱, x_۴, x_۸, x_۹) = (۳, ۰, ۰, ۰)$$

و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود $x_۰ = ۰$. بنابراین یک جواب بهینه برای مسأله‌ی اصلی داریم که به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &(x_۱^*, x_۲^*, x_۳^*, x_۴^*, x_۵^*, x_۶^*) = (۳, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰) \\ &w^* = (w_۱^*, w_۲^*) = (۱, ۱) \end{aligned}$$

حال قبل از اینکه همگرائی الگاریتم فوق را بررسی نمائیم صورت جدولی الگاریتم پرایمال-دوآل را ارائه می‌کنیم.

۸-۳ صورت جدولی روش پرایمال-دوآل[1]

فرض کنید $z_j - c_j$ ضرایب سطر صفر برای مسأله‌ی اصلی و $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ ضرایب سطر صفر برای مسأله‌ی پرایمال محدود شده باشد در این‌صورت برای هر متغیری مانند x_j داریم:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j \quad \text{و} \quad \hat{z}_j - \hat{c}_j = va_j - ۰ = va_j$$

هم‌چنین داریم:

$$\frac{wa_j - c_j}{va_j} = \frac{z_j - c_j}{\hat{z}_j - \hat{c}_j}$$

و

$$(wa_j - c_j) + \theta va_j = (z_j - c_j) + \theta(\hat{z}_j - \hat{c}_j)$$

ما می‌توانیم تمام عملیات ضروری را مستقیماً در جدول انجام دهیم. در جدول روش پرایمال - دوآل دو سطر تابع مقصود موجود است. اولین سطر مقادیر $z_j - c_j$ را می‌دهد و دومین سطر مقادیر $\hat{z}_j - \hat{c}_j$. برای روشن شدن مطلب، روش جدول را برای مثال قبلی به‌کار می‌بریم جدول اولیه مثال فوق‌الذکر به‌صورت زیر خواهد بود. در این جدول:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j = -c_j \qquad w = (۰, ۰)$$

$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	$x_۷$	$x_۸$	$x_۹$	RHS
-۳	-۴	-۶	-۷	-۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
۲	-۱	۱	۶	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

و عضو سمت راست در سطر z برابر صفر می‌باشد. وقتی $w \neq ۰$ مقدار سمت راست برابر wb خواهد بود (با توجه به این‌که $w = (۱, ۰)$ یک جواب شدنی دوآل می‌باشد، سعی کنید مقادیر موردنظر جدول برای این w را محاسبه نمائید).

چون متغیرهای $x_۸$ و $x_۹$ برای پرایمال محدود شده، متغیرهای اساسی می‌باشند بایستی ضرایب آن‌ها را در تابع مقصود این مسأله صفر نمائیم. برای این مقصود سطر اول و سطر دوم

1) Tableau Form of the Primal-Dual Method

را به این سطر اضافه می‌نمائیم و جدول به‌صورت زیر خواهد بود. در این جدول متغیرهای مسأله‌ی پرایمال محدود شده با علامت □ نشان داده شده‌اند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overset{\square}{x_6}$	$\overset{\square}{x_7}$	$\overset{\square}{x_8}$	$\overset{\square}{x_9}$	RHS
z	-۳	-۴	-۶	-۷	-۱	۰	۰	۰	۰	۰
x_0	۳	۰	۳	۷	۳	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_8	۲	-۱	۱	۶	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
x_9	۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

چون در مسأله‌ی محدود شده برای تمامی متغیرها با علامت □، $z_j - c_j \geq 0$ یک جواب بهینه برای فاز اول داریم که $x_0 = 9 > 0$ و θ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{Min}\left\{\frac{-(z_j - c_j)}{\hat{z}_j - \hat{c}_j}, \hat{z}_j - \hat{c}_j > 0\right\}\\ &= \text{Min}\left\{-(-\frac{3}{3}), -(-\frac{6}{3}), -(-\frac{7}{7}) = 1 > 0\right\}\end{aligned}$$

بنابراین برای به‌دست آوردن $z_j - c_j = wa'_j - c_j$ جدید:

$$wa'_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta v a_j = (z_j - c_j) + \theta(\hat{z}_j - \hat{c}_j)$$

یک برابر سطر x° را به سطر z می‌افزائیم خواهیم داشت:

	$\overset{\square}{x_1}$	x_2	x_3	$\overset{\square}{x_4}$	x_5	x_6	x_7	$\overset{\square}{x_8}$	$\overset{\square}{x_9}$	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_0	۳	۰	۳	۷	-۳	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_8	۲	-۱	۱	$\boxed{۶}$	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
x_9	۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

پس از انجام عملیات محوری با ملحوظ داشتن این‌که در این جداول آن متغیرها در مسأله پرایمال محدود شده ظاهر می‌گردد که برای آن‌ها $z_j - c_j = 0$، جداول بعدی به‌صورت زیر ظاهر می‌گردند.

	$\overset{\square}{x_1}$	x_2	x_3	$\overset{\square}{x_4}$	x_5	x_6	x_7	$\overset{\square}{x_8}$	$\overset{\square}{x_9}$	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_0	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۱۱}{۶}$	۰	$-\frac{۱۷}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	-۱	$-\frac{۷}{۶}$	۰	۲
x_4	$\frac{۲}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱	$-\frac{۵}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	۱
x_9	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۱۱}{۶}$	۰	$\frac{۱۷}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	-۱	$-\frac{۱}{۶}$	۱	۲

	$\overset{\square}{x_1}$	x_2	x_3	$\overset{\square}{x_4}$	x_5	x_6	x_7	$\overset{\square}{x_8}$	$\overset{\square}{x_9}$	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_0	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
x_4	۰	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۳}{۴}$	۱	$-\frac{۹}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۲}{۴}$	۰
x_1	۱	$\frac{۷}{۴}$	$\frac{۱۱}{۴}$	۰	$\frac{۱۷}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۶}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۶}{۴}$	۳

چون در جدول نهایی $x_0 = 0$ بنابراین جواب بهینه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*) = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

و مقدار تابع مقصود (مقدار بهینه‌ی تابع مقصود) برابر با ۹ خواهد بود. روش پرایمال-دوآل، **روش همگرا**است.

در حالتی‌که مسأله پرایمال محدود شده غیرتبه‌گن باشد در هر تکرار از مقدار x_0 کاسته می‌شود(اکیداً نزولی است) و این بدین معنی است که هر Q متناظر در یک مرحله، تکرار نمی‌گردد و $Q \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. چون تعداد این Qها حداکثر 2^n می‌باشد (چرا؟) پس الگاریتم در تعداد متناهی از مراحل، مسأله را حل می‌نماید (توجه کنید که Qها متناظر مراحل متمایز می‌باشند. ثابت کنید و به دقت روی کاغذ بیاورید).

برای اثبات همگرایی روش پرایمال - دوآل در حالت تبهگنی، توجه داشته باشید که الگاریتم صرفاً مسأله‌ی زیر را حل می‌نماید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & a \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Ix_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

یعنی کاملاً و تماماً فاز اول روش سیمپلکس می‌باشد، با این تفاوت، متغیرهای غیراساسی که وارد پایه می‌گردند دارای محدودیتی هستند که از طریق بردار w انتخاب می‌گردند. در هر جدول اگر $\hat{z}_j - \hat{c}_j = va_j \leq \circ$ (بازاء هر j) در این‌صورت مسأله حل گردیده یا jی یافت می‌شود که $z_j - c_j = va_j > \circ$. در حالت قبل اگر $x_\circ > \circ$، مسأله دوآل نامحدود و مسأله پرایمال نشدنی خواهد بود. از طرف دیگر اگر $x_\circ = \circ$، در این‌صورت زوج (x, w) در شرایط K.K.T صدق می‌کنند و در نتیجه جواب بهینه مسأله می‌باشند. در غیرصورت‌های فوق مسأله به‌طورکامل حل نگردیده، با دست‌کاری بردار w،تضمین‌کننده آن است که متغیری مانندx_j با $\hat{z}_j - \hat{c}_j = va_j > \circ$ در Q می‌باشد بنابراین می‌تواند وارد گردد. با توجه بدان‌چه گفته شد، در حقیقت روش پرایمال سیمپلکس را جهت حل فاز اول به‌کارمی‌بریم با محدودیتی که برای متغیرها جهت وارد شدن به مسأله پرایمال محدود شده دارند. در نتیجه با به‌کاربردن روش لکزیکو که قبلاً گفته شد که این روش مستقل از آن است که متغیر واردشونده چگونه انتخاب گردد، بدون به دور افتادن، روش در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید. (جزئیات توضیح روش به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود).

۳-۹ الگاریتم سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار[1]

در بیشتر مسائل عملی، معمولاً متغیرها کران‌دار می‌باشند، به‌صورت:

$$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

که در آن l_j **کران پائین** و u_j **کران بالا** نامیده می‌شود وفرض بر این است که $l_j < u_j$ چه در غیراین‌صورت $x_j = l_j = u_j$ و می‌توان آن را از مسأله حذف نمود. مسأله LP برای این نوع متغیرها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

1) The Simplex Method For Bounded Variables

که در آن $l = (l_1, \dots, l_n)^t$ و $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ با تبدیلاتی که در فصول گذشته گفته شد می‌توان مسأله فوق را به‌صورت استاندارد تبدیل نمود(البته فرض ما بر این است که $l_j \quad j = 1, \dots, n$ متناهی است چرا؟ به‌دقت توضیح دهید) به‌صورت زیر:

$$x_1 = x - l \qquad x + x_2 = u$$

با قرار دادن این عبارت، مسأله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \quad = b \\ & x - x_1 = l \\ & x + x_2 = u \end{aligned}$$

که مسأله فوق به‌راحتی به‌صورت استاندارد قابل تبدیل می‌باشد. این روش ساده‌ترین ولی کم راندمان‌ترین روش خواهد بود. زیرا تعداد متغیرها از n به $3n$ و تعداد قیدها از m به $2n + m$ افزایش می‌یابد.

روش دیگر آن است که قیدهای $l \leq x \leq u$ را به‌صورت زیر بنویسیم $0 \leq x-l \leq u-l$ با قرار دادن $x - l = x_1$ $u_1 = u - l$ و افزودن متغیر کمکی، مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x_1 + x_2 = u \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

یا

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & k + cx_۱ \\
\text{s.t.} \quad & Ax_۱ = b_۱ \\
& x_۱ + x_۲ = u \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

k مقدار ثابتی است

ملاحظه می‌گردد که در هر حال این تبدیلات باعث بزرگ شدن مسأله می‌گردد که نمی‌توان آن را با راندمان خوبی حل نمود.

برای رفع مشکل فوق روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار، که اصلاح شده روش سیمپلکس می‌باشد، به‌صورتی طراحی شده که قیدهای $x \leq l_u$ و $l \leq x$ را مانند $x \geq ۰$ تلقی می‌نماید؛ بدون این‌که اندازه پایه کاری[1] (یعنی B) را افزایش دهد (اندازه B همان $m \times m$ خواهد بود) از این‌رو، چنین روشی، روش پایه فشرده[2] می‌نامند. مانند روش سیمپلکس این روش نیز از یک نقطه رأسی شدنی به نقطه مجاور می‌رود تا در نهایت یا به جواب بهینه برسد و یا مشخص نماید که مسأله بهینه نامتناهی دارد.

توجه شود که ناحیه شدنی مسأله‌ی:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & cx \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& l \leq x \leq u
\end{aligned}
$$

به وسیله قیود زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
x &\leq u \\
-x &\leq -l
\end{aligned}
$$

1) Working Basis 2) Compact Basis

مانند آن‌چه در فصول قبلی گذشت، نقطه رأسی ناحیه‌ی شدنی یک نقطه از آن است که حداقل یک دسته nتایی از ابرصفحه‌های مستقل خطی از آن می‌گذرند. اگر ناحیه شدنی این مسأله را S بنامیم از تمامی نقاط S، m ابرصفحه $Ax = b$ می‌گذرند (با فرض این‌که $\text{rank}(A) = m$) پس در نقاط رأسی S، حداقل $n - m$ از قیدهای $x_j \leq u_j$ $(j = ۱, \ldots, n)$ یا $x_j \geq l_j$ $(j = ۱, \ldots, n)$ فعال می‌باشند (فرض بر این شده که تمامی کران‌های بالا و پائین متناهی هستند. در غیر این‌صورت از آن‌ها صرف‌نظر می‌گردد چرا؟)

از آن‌چه گذشت نتیجه می‌گردد که $S \subseteq R^p$ که در آن $p = n - m$ بنابراین $x_۰$ نقطه رأسی S است اگر p (متغیر مستقل در کران بالا یا پائین خود قرار گیرند که از حل قیدهای تساوی یک جواب منحصربه‌فرد که همان نقطه رأسی حاصل خواهد شد. اگر بیش از p مثلاً q $(q > p)$ از قیدهای $l \leq x \leq u$ در $x_۰$ تنگ باشند(فعال باشند یا از آن بگذرند)،) در این‌صورت $x_۰$ یک نقطه‌ی رأسی تبه‌گن برای S خواهد بود و $q - p$ **درجه تبه‌گنی** آن می‌باشد. جزئیات مطلب را با توجه به تعریف اولیه‌ی نقطه‌ی رأسی روی کاغذ بیاورید و تفاوت آن را با استدلال قبلی در رابطه با نقاط رأسی متغیرهای $x \geq ۰$ بنویسید.

اینک با این مقدمات تعریف BFS را برای مسأله بیان می‌کنیم.

۳-۹-۱۱ تعریف جواب اساسی شدنی(BFS). دستگاه $Ax = b$ و $l \leq x \leq u$ را درنظر بگیرید؛ که در آن A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ و رتبه‌ی m است. جواب $\bar{x}$ از دستگاه $Ax = b$ را، یک جواب اساسی برای این دستگاه می‌گوئیم، اگر A را بتوان به‌صورت $[B, N_۱, N_۲]$ افراز نمود به‌صورتی‌که B یک ماتریس مربع غیرمنفرد بوده و $\text{rank}(B) = m$ و $x = (x_B, x_{N_۱}, x_{N_۲})$ و $x_{N_۱} = l_{N_۱}$ و $x_{N_۲} = u_{N_۲}$ و

$$\bar{x}_B = B^{-۱} - B^{-۱}N_۱ l_{N_۱} - B^{-۱}N_۲ U_{N_۲}$$

به‌علاوه اگر $l_B \leq \bar{x}_B \leq U_B$، در این‌صورت $\bar{x}$، یک جواب اساسی شدنی نامیده می‌شود. ماتریس B را پایه کاری می‌نامند. x_B را متغیر اساسی و $x_{N_۱}$ و $x_{N_۲}$ را **متغیرهای غیراساسی** می‌نامند، که $x_{N_۱}$ متغیرهائی درکران پائین خود و $x_{N_۲}$ متغیرهائی درکران بالای خود می‌باشند.

به‌علاوه اگر $l_B < \bar{x}_B < u_B$، $\bar{x}$ را نقطه‌ی رأسی غیرتبه‌گن گویند، درغیراین‌صورت آن را تبه‌گن می‌نامند.

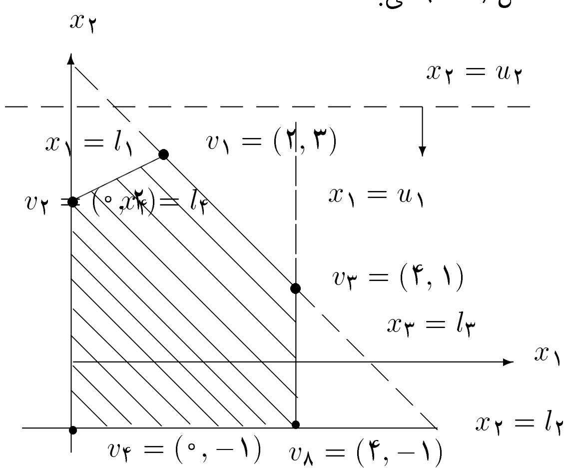
افراز $[B, N_1, N_2]$ از A را که متناظر یک **جواب اساسی شدنی** می‌باشد یک افراز اساسی شدنی می‌گویند. دو افراز اساسی شدنی مجاور هستند اگر وفقط اگر تمامی متغیرها جز یک متغیر غیراساسی مثل هم هستند (در هر دو افراز) و درکران متناظر تثبیت شده‌اند.

توجه کنید که برای نقاط رأسی تبه‌گن $\bar{x}$ هر انتخاب از $p = n - m$ ابرصفحه‌ی تعریف‌کننده از $l \leq x \leq u$ به‌همراه m قید $Ax = b$ یک دسته مستقل nتایی مشخص می‌نمایند که مار بر $\bar{x}$ می‌باشند، ومتناظر یک افراز اساسی شدنی مرتبط با $\bar{x}$ می‌باشد.

۳-۹-۱۲ مثال. فرض کنید S به‌وسیله‌ی نامساوی‌های زیر تعریف شده باشد:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
0 \leq x_1 &\leq 4 \\
-1 \leq x_2 &\leq 4
\end{aligned}
$$

ناحیه به‌صورت شکل (۳-۳) می‌باشد.



شکل (۳-۳)

با معرفی متغیرهای کمکی $x_۳$ و $x_۴$ دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{llll} x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & = ۵ \\ -x_۱ & +۲x_۲ & & +x_۴ = ۴ \end{array}$$

$$۰ \leq x_۱ \leq ۴$$

$$-۱ \leq x_۲ \leq ۴$$

$$۰ \leq x_۳ < \infty$$

$$۰ \leq x_۴ < \infty$$

با یک بررسی سطحی می‌توان دریافت که $u_۳$ و $u_۴$ به‌ترتیب از ۶ و ۱۰ بیشتر نیستند که می‌توان به جای ∞ کران بالای آن‌ها و به جای $<$؛ $\leq$ جایگزین نمود.

می‌خواهیم تمام جواب‌های اساسی شدنی دستگاه فوق را به‌دست آوریم. این‌کار، بدین‌صورت انجام می‌شود که از دو قید اولی یک پایه استخراج نمائیم و دستگاه را نسبت به این پایه حل کنیم؛ یعنی متغیرهای اساسی را برحسب متغیرهای غیراساسی به‌دست آوریم و سپس متغیرهای غیراساسی را درکران پائین و بالای آن قرار دهیم. پایه اولی را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$B = [a_۲, a_۴] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

با ضرب دو قید اول در $B^{-۱}$ و با انتقال $x_۱$ و $x_۳$ به سمت راست داریم:

$$x_۲ = ۵ - x_۱ - x_۳$$

$$x_۴ = -۶ + ۳x_۱ + ۲x_۳$$

حال به جای $x_۱$، کران پائین آن و به جای $x_۳$ نیزکران پائین قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$۱)\ x_۱ = ۰\ ,\ \ x_۳ = ۰ \Longrightarrow x_۲ = ۵\ ,\ \ x_۴ = -۶$$

چون $x_۴ < ۰$، این جواب اساسی، شدنی نمی‌باشد:

$$۲)\ x_۱ = ۴\ ,\ \ x_۳ = ۰ \Longrightarrow x_۲ = ۱\ ,\ \ x_۴ = ۶$$

بنابراین:

$$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) = (۴, ۱, ۰, ۶)$$

یک جواب اساسی شدنی می‌باشد. جواب‌های اساسی شدنی دیگر دستگاه به‌همین صورت به‌دست می‌آید. اگر این‌کار را انجام دهیم، جواب‌های اساسی شدنی عبارت خواهند بود:

$$(۲, ۳, ۰, ۰)\ ,\ (۰, ۲, ۳, ۰)\ ,\ (۴, ۱, ۰, ۶)$$
$$(۰, -۱, ۶, ۶)\ ,\ (۴, -۱, ۲, ۱۰)$$

با تصویر نمودن این نقاط به صفحه $(x_۱, x_۲)$ نقاط $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، $v_۴$ و $v_۵$ که در شکل نشان داده شده است به‌دست می‌آید.

در این مثال $n = ۴$ و $m = ۲$ بنابراین $p = ۴ - ۲ = ۲$ در حقیقت نمایش شکل (۳-۳) در فضای $p = ۲$ بعدی $x_۱$ و $x_۲$ یعنی در فضای متغیرهای مستقل می‌باشد. توجه کنید که در هر نقطه‌ی رأسی در ابرصفحه تنگ می‌باشند. مثلاً

در $v_۱$، $x_۳ = l_۳$ و $x_۴ = l_۴$.

در $v_۲$، $x_۱ = l_۱$ و $x_۴ = l_۴$ در $v_۳$، $x_۱ = u_۱$ و $x_۳ = l_۳$

در $v_۴$، $x_۱ = u_۱$ و $x_۲ = l_۲$ در $v_۵$، $x_۱ = u_۱$ و $x_۲ = l_۲$

نافذ می‌باشند. از این‌رو همان‌طوری‌که قبلاً گفته شد، جواب‌های اساسی شدنی و نقاط رأسی منطبق برهم می‌باشند. ملاحظه نمائید که نقاط رأسی $v_۴$ و $v_۵$ یک پایه کاری دارند یعنی $B = [a_۳, a_۴]$ به‌هرحال اختلاف آن‌ها درکران‌هائی که متغیرهای غیراساسی $x_۱$ و $x_۲$ تثبیت شده‌اند؛ که در نتیجه دو نقطه‌ی رأسی متمایز به‌وجود آورده‌اند. توجه شود که تمامی نقاط رأسی در این‌جا غیرتبه‌گن می‌باشند و هر یک از آن‌ها متناظر یک افراز اساسی شدنی است.

۳-۱۰ بهتر نمودن جواب اساسی شدنی[1]

با مقدماتی که گذشت می‌دانیم که چگونه می‌توان جواب اساسی شدنی را مشخص نمود. هم‌چنین می‌دانیم که جواب بهینه اساسی وجود دارد، به‌شرط آن‌که ناحیه شدنی خالی نباشد و بهینه متناهی باشد. (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید.) در هر صورت باید توجه داشت که تعداد جواب‌های اساسی شدنی عدد بزرگی است (تعداد BFSها مسأله‌ی فوق‌الذکر از بالا به عدد $2^{n-m}c_n^m$ محدود می‌گردد. برای این‌که تعداد پایه‌های مستخرج از A به C_n^m و برای هر پایه 2^{n-m} صورت جهت تثبیت متغیرهای غیراساسی موجود است) بنابراین بایستی یک **روش سیستماتیک** برای حرکت از یک BFS به BFS دیگر به‌دست آورد.

فرض کنید یک پایه‌ای مانند B در دست است و فرض کنید که متغیرهای غیراساسی به‌صورت N_1 و N_2 افراز شده‌اند. یعنی $A=[B,N_1,N_2]$ و برطبق این افراز x نیز به‌صورت $[x_B,x_{N_1},x_{N_2}]$ افراز گردیده است و $c=[c_B,c_{N_1},c_{N_2}]$ هم تابع مقصود و هم قیدها را می‌توان برحسب متغیرهای غیراساسی (یعنی متغیرهای مستقل) به‌صورت زیر نوشت:

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}N_1X_{N_1}-B^{-1}N_2X_{N_2} \tag{۳-۹}$$

$$\begin{aligned} z&=c_BX_B+c_{N_1}X_{N_1}+c_{N_2}X_{N_2}\\ &=c_B(B^{-1}b-B^{-1}N_1X_{N_1}-B^{-1}N_2X_{N_2})+c_{N_1}X_{N_1}+c_{N_2}X_N\\ &=c_BB^{-1}b+(c_{N_1}-c_BB^{-1}N_1)X_{N_1}+(c_{N_2}-c_BB^{-1}N_2)X_{N_2} \end{aligned} \tag{۳-۱۰}$$

$$=\bar{z}-\sum_{j\in J_1}x_j(z_j-c_j)-\sum_{j\in J_2}(z_j-c_j)x_j \tag{۳-۱۱}$$

فرض کنید، جواب فوق‌الذکر شدنی باشد که در آن $x_{N_1}=l_{N_1}$ و $x_{N_2}=u_{N_2}$ و $l_B\le x_B\le u_B$. این جواب به‌وسیله‌ی جدول زیر نشان داده می‌شود. ستون سمت راست مقدار واقعی z و x_B که به‌ترتیب این مقدار این بردار را به $\hat{z}$ و $\hat{b}$ نشان می‌دهیم و عبارت است از مقدار و بردار حاصل از جایگذاری $x_{N_1}=l_{N_1}$ و $x_{N_2}=u_{N_2}$ در معادلات **۳-۷** و **۳-۸**. تاکید می‌کنیم که $\hat{z}$ برابر با $c_BB^{-1}b$ و $\hat{b}$ برابر با $B^{-1}b$ نمی‌باشد (چرا؟)

1) Improving a Basic Feasible Solution

	z	x_B	x_{N_1}	x_{N_2}	RHS
z	۱	۰	$-c_{N_1} + c_B B^{-1} N_1$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	$\hat{z}$
x_B	۰	I	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$	$\hat{b}$

حال سعی می‌کنیم که با اصلاح متغیرهای غیراساسی مقدار تابع مقصود را بهتر نمائیم. برای این منظور مجدداً فرمول ۳-۱۱ را ذکر می‌کنیم

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in J_1} (z_j - c_j) x_j - \sum_{j \in J_2} (z_j - c_j) x_j$$

که در آن J_1 مجموعه‌ی اندیس متغیرهائی است که درکران پائین خود هستند و J_2 مجموعه‌ی اندیس متغیرهائی می‌باشد که درکران بالای خود قرار دارند و $z_j - c_j = c_j - c_B B^{-1} a_j$. برای $j \in J_1$، اگر $z_j - c_j > 0$؛ افزایش x_j باعث کاهش تابع مقصود می‌گردد (بهتر شدن تابع مقصود) یعنی افزایش دادن x_j ازکران پائین خود از l_j. عیناً اگر $z_j - c_j < 0$ برای $j \in J_2$، کاهش x_j از کران بالای خود باعث بهتر شدن تابع مقصود می‌گردد. مانند روش سیمپلکس معمولی فقط یکی از متغیرهای غیراساسی را تغییر می‌دهیم و بقیه متغیرهای غیراساسی را که در سطح خودشان هستند، ثابت نگه‌می‌داریم. بنابراین اندیس متغیری که آن را k می‌نامیم از رابطه‌ی زیر مشخص می‌گردد:

$$\text{Max}\{\underset{j \in J_1}{\text{Max}}(z_j - c_j) \ , \ \underset{j \in J_2}{\text{Max}}(c_j - z_j)\} \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

اگر مقدار ماکزیمم فوق مثبت باشد، آن‌گاه k اندیس متغیر که بایستی تغییر کند مشخص می‌گردد. اگر $k \in J_1$ در این‌صورت x_k ازکران پائین خود افزایش می‌یابد و اگر $k \in J_2$ در این‌حالت x_k را از کران بالای خود یعنی u_k کاهش می‌دهیم. اگر مقدار ماکزیمم فوق صفر یا کوچکتر از صفر شود، بدین معنی خواهد بود که جواب موردنظر جدول جواب بهینه است (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید).

به‌طور خلاصه، برای یک جواب اساسی شدنی داده شده اگر $z_j - c_j \leq 0$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی که در کران بالای خود قرار دارند، در این‌صورت جواب بهینه است. درغیراین‌صورت متغیر x_k را طبق قاعده‌ای که گفته شد انتخاب می‌کنیم اگر x_k درکران پائین خود باشد آن را افزایش می‌دهیم و اگر در کران بالای خود باشد آن را کاهش می‌دهیم. این

تغییر بایستی به گونه‌ای باشد که شدنی بودن جواب را از بین نبرد. از این‌رو افزایش یا کاهش متغیر طبق قاعده‌ی زیر صورت می‌گیرد:

۳-۱۱ افزایش $\mathbf{x_k}$ از سطح فعلی خود یعنی $\mathbf{l_k}$[1]

فرض کنید $x_k = l_k + \Delta_k$ که در آن Δ_k افزایش x_k از سطح کنونی خود می‌باشد. توجه داشته باشید که هیچ‌یک از متغیرهای غیراساسی تغییر نمی‌کنند و مقدار z در جدول برابر $\hat{z}$ و بردار b برابر با $\hat{b}$ می‌باشد. با قرار دادن $x_k = l_k + \Delta_k$ در معادلات ۳-۹ و ۳-۱۰ داریم:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ l_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{a}_k \\ ۱ \end{pmatrix} \Delta_k \qquad (۳-۱۳)$$

$$z = \hat{z} + \Delta_k(-z_k - c_k) \qquad (۳-۱۳a)$$

چون $z_k - c_k > ۰$ (چرا؟) پس تابع مقصود کاهش پیدا می‌کند (بهتر می‌شود) و هر چه x_k بیشتر افزایش یابد، تابع مقصود بیشتر کاهش می‌یابد. اما افزایش x_k را چند عامل قفل می‌کند که عبارتند از:

۱- متغیر اساسی به کران پائین خود می‌رسند [2]

فرض کنیم بازاء $\Delta_k = \gamma_۱$، یک متغیر اساسی به کران پائین خود می‌رسد در این‌صورت:

$$l_B \leq x_B = \hat{b} - \Delta_k \bar{a}_k$$

بنابراین:

$$\Delta_k \bar{a}_k \leq \hat{b} - l_B$$

اگر $\bar{a}_k \leq ۰$؛ در این‌صورت Δ_k را می‌توان به‌اندازه دلخواه بدون به‌هم خوردن شدنی بودن افزایش داد؛ که در این حالت $\gamma_۱ = \infty$. (و این بدین معنی است که با افزایش x_k، هیچ‌یک از متغیرهای اساسی به کران پائین خود نمی‌رسند). در غیراین‌صورت $\gamma_۱$ از رابطه زیر به‌دست

1) Increasing x_k from its current level l_k 2) A Basic Variable Drops to its Lower Bound

می‌آید:

$$\gamma_{۱} = \begin{cases} \underset{۱\leq i\leq m}{\text{Min}} \{\frac{\hat{b}_i - l_{Bi}}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > ۰\} = \frac{\hat{b}_r - l_{Br}}{\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \nleq ۰ \\ \infty & \bar{a}_k \leq ۰ \end{cases} \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

در این حالت متغیر اساسی x_{Br} کاندید برای رسیدن به کران پائین خود می‌باشد.

۲- یک متغیر اساسی به کران بالای خود می‌رسد [۱] فرض کنید $\gamma_{۲}$ مقداری از افزایش x_k باشد که بازاء آن یکی از متغیرهای اساسی به کران بالای خود می‌رسد. پس بایستی داشته باشیم:

$$\hat{b} - \bar{a}_k \Delta_k \leq u_k$$

از این‌رو:

$$-\bar{a}_k \Delta_k \leq u_k - \hat{b}$$

اگر $\bar{a}_k \geq ۰$ در این‌صورت $\gamma_{۲} = \infty$ در غیراین‌صورت $\gamma_{۲}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma_{۲} = \begin{cases} \underset{۱\leq i\leq m}{\text{Min}} \left\{\frac{u_{Bi} - \hat{b}}{-\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} < ۰\right\} = \frac{u_B - \hat{b}_r}{-\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \ngeq ۰ \\ \infty & \bar{a}_k \geq ۰ \end{cases} \qquad (۳\text{-}۱۵)$$

در این حالت متغیر اساسی x_{Br} کاندید رسیدن به کران بالای خود می‌باشد.

۳-۱۱-۱۳ $\mathbf{x_k}$ خود به کران بالای خودش می‌رسد.[۲]

با افزایش x_k از l_k، این متغیر به کران بالای خودش می‌رسد. و این مقدار برابر $u_k - l_k$ می‌باشد.

این سه حالت ماکزیمم مقدار افزایش x_k را به‌دست می‌دهد و مقدار افزایش مجاز از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta_k = \text{Min}\{\gamma_{۱}, \gamma_{۲}, u_k - l_k\} \qquad (۳\text{-}۱۶)$$

1) A Basic Variable Reaches its upper Bound 2) x_k Itself Reaches its Upper Bound

اگر $\Delta_k = \infty$، در این‌صورت x_k را می‌توان تا بی‌نهایت افزایش داد و تابع مقصود به سمت $-\infty$ خواهد رفت. از طرف دیگر اگر $\Delta_k < \infty$، یک جواب اساسی شدنی جدید به‌دست می‌آید که در آن $x_k = l_k + \Delta_k$ و متغیرهای اساسی طبق فرمول ۳-۱۳ اصلاح می‌شود.

۳-۱۱-۱۴ به‌روز نمودن جدول وقتی متغیرهای غیراساسی افزایش می‌یابند.

جدول جاری بایستی به‌روز گردد که منعکس‌کننده جواب اساسی جدید می‌باشد. اگر $\Delta_k = u_k - l_k$. در این حالت پایه کاری عوض نمی‌شود و x_k باز هم به عنوان متغیر غیراساسی در جدول در کران بالای خود باقی می‌ماند. در جدول تنها مقدار $\hat{z}$ و بردار $\hat{b}$، با توجه به تغییرات x_k، اصلاح می‌گردند. یعنی $\hat{z} = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta_k$ جدید و $\hat{b} = \hat{b} - \bar{a}_k\Delta_k$ جدید. از طرف دیگر اگر Δ_k برابر با $\gamma_۱$ یا $\gamma_۲$ شود، در این‌صورت x_k وارد پایه می‌گردد و x_{Br} از پایه خارج می‌شود که در آن اندیس r طبق فرمول‌های گذشته مشخص می‌گردد. اگر $\Delta_k = \gamma_۱$ در این‌صورت اندیس r طبق فرمول ۳-۱۴ به‌دست آمده و اگر $\Delta_k = \gamma_۲$، در این‌صورت اندیس r از فرمول ۳-۱۵ مشخص گردیده است. صورت با انجام عمل محوری که در آن $\bar{a}_{rk}$ (چه مثبت باشد چه منفی) به‌روز می‌گردد و RHS به‌طور جداگانه محاسبه می‌شود. RHS طبق فرمول 3-13a به‌روز می‌گردد، جز مؤلفه‌ی rام $\hat{b}$ که در $\hat{b}$ جدید $l_k + \Delta_k$ قرار داده می‌شود.

۳-۱۱-۱۵ کاهش $\mathbf{x_k}$ از کران بالای خود یعنی $\mathbf{u_k}$[1]

این حالت بسیار شبیه حالتی که x_k را از کران پائین خود افزایش می‌دادیم. ذیلاً به‌طور بسیار خلاصه این مطلب را ذکر می‌کنیم. توجه داشته باشید که در این حالت $z_k - c_k < ۰$ و $x_k = u_k - \Delta_k$ که در آن $\Delta_k > ۰$ نشان‌دهنده‌ی مقدار کاهش x_k می‌باشد. با توجه به آن‌چه گذشت داریم:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ u_k \end{pmatrix} + \Delta_k \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ -۱ \end{pmatrix} \qquad (۳\text{-}۱۷)$$

$$z = \hat{z} + \Delta_k(z_k - c_k) \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

---

1) Decreasing x_k From its Current Level u_k

ماکزیمم کاهش Δ_k با محاسبه‌ی γ_1 و γ_2 و $u_k - l_k$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \text{Min}\left\{\frac{\hat{b}_i - l_{Bi}}{-\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} < 0\right\} = \frac{\hat{b}_r - l_{Br}}{-\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \ngeq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \geq 0 \end{cases} \qquad (۱۹-۳)$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \text{Min}\left\{\frac{u_{Bi} - \hat{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0\right\} = \frac{u_B - \hat{b}_r}{\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \nleq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \leq 0 \end{cases} \qquad (۲۰-۳)$$

اگر $\Delta_k = \infty$ در این‌صورت مسأله نامحدود خواهد بود وبهینه نامتناهی دارد. اگر $\Delta_k < \infty$ آن‌گاه یک جواب اساسی شدنی جدید به‌دست می‌آید که $x_k = u_k - \Delta_k$ و متغیرهای اساسی طبق فرمول ۳-۱۷ اصلاح می‌گردد.

۳-۱۱-۱۶ به‌روز نمودن جدول وقتی متغیر غیراساسی کاهش می‌یابد.

اگر $\Delta_k = u_k - l_k$، در این‌صورت x_k باز هم غیراساسی می‌ماند اما به کران پائین خود سقوط می‌کند. جدول تغییر نمی‌یابد و RHS طبق ۳-۱۷ و ۳-۱۸ اصلاح می‌گردد.

اگر Δ_k به‌وسیله‌ی γ_1 و γ_2 داده شده باشد، در این‌صورت x_k وارد می‌گردد و x_{Br} خارج می‌شود که اندیس r برای متغیر واردشونده از ۳-۱۹ یا ۳-۲۰ مشخص می‌گردد. جدول به جز RHS با عمل محوری که عضو محوری آن $\bar{a}_{rk}$ (در این‌جا $\bar{a}_{rk}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد) به‌روز می‌شود. ستون RHS بر طبق فرمول‌های ۳-۱۷ و ۳-۱۸ به‌روز می‌گردد، جز مؤلفه‌ی rام آن که برابر با $u_k - \Delta_k$ خواهد بود(در بردار $\hat{b}$ جدید)

۳-۱۱-۱۷ به‌دست آوردن یک جواب اساسی شدنی اولیه.

اگر جواب اساسی شدنی مناسبی در دست نباشد، می‌توان با تثبیت نمودن تمامی متغیرها در کران بالا-پائین خودشان و با اضافه نمودن متغیر تصنعی و با اعمال **فاز اول سیمپلکس** یا **M-بزرگ** سیمپلکس یک جواب اساسی شدنی (در صورت وجود) به‌دست آورد. این کار در چهار مرحله به‌صورت زیر انجام می‌پذیرد:

۱) تمامی متغیرهای اصلی را در یکی از کرانهای خود تثبیت مینمائیم.

۲) با تنظیم نمودن (اصلاح نمودن) RHS بر طبق مقادیر داده شده بردار $\hat{b}$ را محاسبه مینمائیم.

۳) در صورت ضرورت، سطر موردنظر را در (۱-) ضرب میکنیم تا $\hat{b} \geq 0$.

۴) با افزودن ستون متغیرهای تصنعی و بهکاربردن M-بزرگ سیمپلکس یا فاز اول مسأله را حل مینمائیم.

۳-۱۲ تقارب متناهی؛ تبهگنی و بهدور افتادن[1]

در غیاب تبهگنی، در هر تکرار، روش فوقالذکر از یک جواب اساسی شدنی، به یک جواب اساسی شدنی میرود (در جهت بهبود بخشیدن به تابع مقصود). از اینرو بایستی در تعداد متناهی از مراحل همگرا باشد، یعنی به یک جواب بهینه برسد یا مشخص نماید که مسأله نامحدود میباشد. بههرحال در حالت تبهگنی این امکان وجود دارد که یک عمل محوری تبهگن انجام دهیم که در آن γ_1 و γ_2 مساوی صفر هستند. از اینرو پایه کاری عوض میشود، اما نقطهی رأسی ثابت میماند (یعنی روش در همان نقطه رأسی خواهد بود)، در نتیجه، امکان بهدور افتادن وجود دارد، یعنی یک دنباله از پایهها متناظر جواب اساسی شدنی تبهگن بارها تکرار شود بدون توقف. از اینرو بایستی روشی ارائه نمائیم که از بهدور افتادن جلوگیری نماید (مانند آنچه در رابطه با متغیرهای نامنفی گفته شد). مثلاً روش لکزیکو که بهصورت زیر بیان میگردد. (دقت در استدلال و روش ارائه مطلب بسیار ضروری است). فرض کنید برای تمامی جوابهای اساسی شدنی تبهگن که در جدول اجرای الگاریتم پیش میآید، سطرهای B^{-1} که متناظر متغیرهای اساسی تبهگن درکران پائین خود هستند لکزیکو مثبت و برای متغیرهای اساسی تبهگن که درکران بالای خود هستند لکزیکو منفی باشد. یک افراز اساسی شدنی مانند $[B, N_1, N_2]$ که در این خاصیت صدق کند را، **افراز اساسی شدنی قوی**[2] مینامیم. همواره میتوان چنین افرازی بهدست آورد. در صورت ضرورت از متغیرهای تصنعی استفاده

1) Finite Convergence:Degeneracy and Cycling 2) Strongly Feasible Basic Partition

می‌گردد. برای روشن شدن مطلب جدول زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید که پایه‌ای مانند $I = B = [a_1, a_2, a_3]$ در دست باشد که صورت:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_N$$

به‌صورت جدول زیر می‌باشد:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰					
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	-۱	۱	-۱	۱
x_2	۰	۰	۱	۰	۱	۲	-۱	۱	۲
x_3	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	-۱	۱	۶

$$1 \le x_1 \le 6 \quad 2 \le x_2 \le 7 \quad 1 \le x_3 \le 6 \quad 0 \le x_j \le 3 \quad j = 4, 5, 6, 7$$

در این جدول x_1 و x_2 به‌عنوان متغیر اساسی در کران پائین خود هستند و سطر اول و دوم $I = B^{-1}$ لکزیکو مثبت می‌باشد اما سطر سوم B^{-1} لکزیکو منفی نمی‌باشد (x_3 در کران بالای خودش است. متغیر تصنعی V_1 را به‌صورت زیر به جدول اضافه می‌کنیم)

	z	x_1	x_2	$\overset{6}{x_3}$	$\overset{\circ}{V_1}$	$\overset{\circ}{x_4}$	$\overset{\circ}{x_5}$	$\overset{\circ}{x_6}$	$\overset{\circ}{x_7}$	RHS
z	۱	۰	۰	۰	۰	۲	۲	۴	۳	
x_1	۰	$\boxed{۱}$	۰	۰	۰	۱	-۱	-۱	-۲	۱
x_2	۰	۰	$\boxed{۱}$	۰	۰	۱	۲	-۱	۱	۲
V_1	۰	۰	۰	$\boxed{۱}$	۱	۱	-۱	-۱	۱	۰

ملاحظه می‌گردد که بدین‌صورت تمامی متغیرهای اساسی جدول فوق در کران پائین خود هستند و تمامی سطرهای B^{-1}، لکزیکو مثبت می‌باشد. در جدول فوق x_3 متغیر غیراساسی محسوب می‌گردد که در کران بالای خود قرار دارد.

برای این‌که عمل محوری تبه‌گن پایه شدنی قوی را نگه‌دارد، به عبارت دیگر برای حفظ افراز شدنی اساسی قوی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم $\Delta_k < \infty$ و فرض کنیم x_k متغیر واردشونده است. و در کران پائین خود می‌باشد و می‌خواهیم آن را افزایش دهیم. اگر x_k به‌وسیله‌ی خودش قفل شود، یعنی $\Delta_k = u_k - l_k$ در این‌صورت اگر قرار دهیم $x_k = u_k$

(یعنی $\Delta_k = u_k - l_k$) و سمت راست را اصلاح نمودیم، اگر افراز شدنی قوی باقی ماند، نیازی به عمل محوری نیست مثلاً در جدول فوق که $x_k = x_6$ متغیر واردشونده باشد. سمت راست به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 1 + x_6$$

$$x_2 = 2 + x_6$$

$$V_1 = 0 + x_6$$

x_6 از سطح صفر به ۳ می‌رسد. در نتیجه $x_1 = 4$ و $x_2 = 5$ و $V_1 = 3$ می‌گردد که یک جواب اساسی شدنی غیرتبه‌گن است و افراز شدنی اساسی قوی، همان‌طور باقی می‌ماند. زیرا هیچ متغیر اساسی درکران پائین یا بالای خود نمی‌باشد. در غیراین‌صورت فرض کنیم افزایش x_k، باعث شد که بعضی از متغیرها به کران بالا یا پائین خود برسند (یا خود x_k به کران بالای خودش برسد) در این‌صورت درنظر می‌گیریم:

$$S_1 = \{i \mid \text{در وضعیت جدید درکران بالای خود است } x_i \ \ \& \ \ \bar{a}_{ik} < 0\}$$

یعنی وقتی $x_k = l_k + \Delta_k$، x_i ها به کران بالای خودشان رسیدند.

$$S_2 = \{i \mid \text{به کران پائین خود رسیده است } x_i \ \ \& \ \ \Delta_k + l_k = x_k \text{ بازاء } \ \& \ \ \bar{a}_{ik} > 0\}$$

فرض کنید B_i^{-1} سطر iام B^{-1} باشد، اندیس r را به‌طور منحصربه‌فرد به‌صورت زیر مشخص نمائید:

$$\frac{B_r^{-1}}{\bar{a}_{rk}} = \text{Lexico Min}\left\{\frac{B_i^{-1}}{\bar{a}_{ik}} \mid i \in S_1 \cup S_2\right\} \qquad (۳\text{-}۲۱)$$

(یعنی لکزیکو می‌نیمم $\frac{B_i^{-1}}{\bar{a}_{ik}}$ $(i \in S_1 \cup S_2)$ را به دست می‌آوریم) ثابت می‌کنیم:

الف. روش مذکور، افراز شدنی اساسی قوی را حفظ می‌کند.

ب. r به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌گردد.

قسمت (ب) بدیهی است. زیرا اگر چنین نباشد، در سطر B^{-1} متناسب می‌باشند که این مطلب با فرض $|B^{-1}| \neq 0$ در تناقض می‌باشد.

برای اثبات قسمت (الف) ابتدا مثالی می‌زنیم و سپس مطلب را در حالت کلی اثبات می‌کنیم.

۳-۱۲-۱۸ مثال. فرض کنید در مرحله‌ای جدول زیر را داریم:

	x_1	x_2	x_0	x_4	x_3	RHS
x_1	۱	۰	۰	$\boxed{-1}$	۰	۱
x_2	۰	۱	۰	۲-	۰	۲
x_3	۰	۰	۱-	۲	۱	۸

$1 \leq x \leq 5$

$2 \leq x_1 \leq 10 \qquad 0 \leq x_4 \leq 5 \qquad \uparrow$

$0 \leq x_3 \leq 8$

افراز فوق، افراز اساسی شدنی قوی است زیرا x_1 و x_2 درکران پائین خود هستند و سطر اول و دوم B^{-1} لکزیکو مثبت می‌باشند. و x_3 درکران بالای خود است و سطر سوم B^{-1} لکزیکو منفی است. متغیر x_4 وارد می‌گردد. از معادلات داریم:

$$x_1 = 1 + x_4$$

$$x_2 = 2 + 2x_4$$

$$x_3 = 8 - 2x_4$$

x_4 را می‌توان به اندازه $\Delta_k = \Delta_4 = 4$ واحد افزایش داد (چرا؟) پس RHS به‌صورت زیر خواهد بود:

$x_1 = 5$ درکران بالا

$x_2 = 10$ درکران بالا

$x_3 = 0$ درکران پائین

حال اندیس r را مشخص می‌کنیم:

$$\text{Lexico Min}\left\{\frac{B_1^{-1}}{-1},\frac{B_2^{-1}}{-2},\frac{B_3^{-1}}{2}\right\}=$$
$$\text{Lexico Min}\left\{(-1,0,0),(0,-\frac{1}{2},0),(0,0,-\frac{1}{2})\right\}$$
$$(-1,0,0)=\frac{B_1^{-1}}{-1} \text{ پس } \boxed{r=1}$$

پس جدول بعدی به‌صورت زیر خواهد بود:

	$\overset{\downarrow}{x_1}$	$\overset{\downarrow}{x_2}$	$\overset{\downarrow}{x_3}$	x_4	RHS
x_4	-۱	۰	۰	۱	۵
x_2	-۲	۱	۰	۰	۱۰
x_3	۲	۰	-۱	۰	۰

ملاحظه می‌گردد که B_1^{-1} لکزیکو منفی و B_2^{-1} لکزیکو منفی (زیرا x_4 و x_2 درکران بالای خود هستند) و B_3^{-1} لکزیکو مثبت است (x_3 درکران پائین خود قرار دارد.)

حال این مطلب را در حالت کلی اثبات می‌نمائیم. بدون این‌که به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم m ستون اول جدول B^{-1} را تشکیل دهند و جدول به‌صورت زیر باشد:

	x_1	$\dots$	x_m	$\dots$	x_k	$\dots$	
x_{B_1}	β_{11}	$\dots$	β_{1m}	$\dots$	$\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\hat{b}_1$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_r}	β_{r1}	$\dots$	β_{rm}	$\dots$	$\boxed{\bar{a}_{rk}}$	$\dots$	$\hat{b}_k$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	β_{m1}	$\dots$	β_{mm}	$\dots$	$\bar{a}_{mk}$	$\dots$	$\hat{b}_m$

که $B^{-1}=[\beta_{ij}]^{m\times m}$

جدول سیمپلکس متناظر پس از مرتب نمودن برحسب مجموعه‌های $S_1, S_2, \dots$ به‌صورت زیر خواهد بود:

		x_k	
S_1	$\beta_{11} \quad \dots \quad \beta_{1m}$ $\vdots \qquad\qquad \vdots$ $\beta_{l1} \quad \dots \quad \beta_{lm}$	$\bar{a}_{ik} \vdots < 0$ $(i = 1, \vdots \dots, l)$ $\vdots$	متغیرها درکران بالای خود هستند
S_1	$\beta_{l+11} \quad \dots \quad \beta_{l+1m}$ $\vdots \qquad\qquad \vdots$ $\beta_{h1} \quad \dots \quad \beta_{hm}$	$\bar{a}_{ik} \vdots > 0$ $(i = l+1, \vdots \dots, h)$ $\vdots$	متغیرها درکران پائین خود هستند
	$\beta_{h+11} \quad \dots \quad \beta_{h+1m}$ $\vdots \qquad\qquad \vdots$ $\beta_{m1} \quad \dots \quad \beta_{m}$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	متغیرها بین کران بالا و پائین خود هستند

عمل محوری درجدول فوق عمل محور تبه‌گن فرض می‌شود (طبق فرض مساله) پس γ_1 یا γ_2 مساوی صفر هستند و $\Delta_k = 0$.

x_k درکران پائین خود می‌باشد. پس r یا متعلق به S_1 است یا $r \in S_2$.

الف. $r \in S_1$. پس x_k وارد می‌شود و x_r خارج می‌گردد. x_k درکران بالای خود است. پس طبق فرض $(\beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) < 0$ و $\bar{a}_{rk} < 0$ در نتیجه $\left(\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1}}, \dots, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rm}}\right) = \frac{(B^{-1})_r}{\bar{a}_{rk}} > 0$

یعنی برای x_kایکه وارد پایه شده سطر به‌روز شده متناظر B^{-1} لکزیکو مثبت خواهد بود.

ب. $r \in S_2$. x_k درکران پائین وارد پایه می‌گردد و متغیر x_r از پایه خارج می‌گردد. چون $r \in S_2$ پس $(B_r^{-1} > 0)$ در نتیجه:

$$\left(\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1}}, \dots, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rm}}\right) = \frac{(B)_r^{-1}}{\bar{a}_{rk}} > 0$$

زیرا $\bar{a}_{rk} > 0$.

اگر $i \neq r$ در این‌صورت $(B^{-1})_{New}\, i$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}(B_{New}^{-1})_i &= (B_{Old}^{-1})_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}(B_{Old}^{-1})_r \\ &= \bar{a}_{ik}\left(\frac{(B_{Old}^{-1})_i}{\bar{a}_{ik}} - \frac{B_{Old}^{-1}}{\bar{a}_{rk}}\right)\end{aligned}$$

داخل پرانتز لکزیکو مثبت است (چرا؟).

اگر $i \in S_1$ داریم:

$$(B_{New}^{-1})_i < 0 \qquad \text{(چرا؟)}$$

اگر $i \in S_2$ داریم:

$$(B_{New}^{-1})_i > 0 \qquad \text{(چرا؟)}$$

و حکم ثابت است.

عیناً فرض کنیم که متغیر واردشونده درکران بالای خود می‌باشد و می‌خواهیم کاهش دهیم ولی γ_1 یا γ_2 مساوی صفر می‌باشد مجدداً جدول زیر را درنظر می‌گیریم (با همان مفروضات سابق).

		x_k	
	$\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \dots \quad \beta_{1m}$	$\bar{a}_{ik} < 0$	متغیرهای اساسی درکران
S_1	$\vdots \qquad\qquad \vdots$	$(i = 1, \dots, l)$	پائین خود می‌باشند
	$\beta_{l1} \quad \beta_{l2} \quad \dots \quad \beta_{lm}$	$\vdots$	
	$\beta_{l+11} \quad \beta_{l+12} \quad \dots \quad \beta_{l+1m}$	$\bar{a}_{ik} > 0$	متغیرهای اساسی درکران
S_1	$\vdots \qquad\qquad \vdots$	$(i = l+1, \dots, h)$	بالای خود می‌باشند
	$\beta_{h1} \quad \beta_{h2} \quad \dots \quad \beta_{hm}$	$\vdots$	
	$\beta_{h+11} \quad \beta_{h+12} \quad \dots \quad \beta_{h+1m}$	$\vdots$	متغیرهای اساسی بین کران
	$\vdots \qquad\qquad \vdots$	$\vdots$	بالا و پائین خود می‌باشند
	$\beta_{m1} \quad \beta_{m2} \quad \dots \quad \beta_{m}$	$\vdots$	

یعنی:

$$S_1 = \{i \mid \text{اساسی است } x_i \;\&\; x_i = l_i \;\&\; \bar{a}_{ik} < 0 \quad x_k = u_k - \Delta_k \text{ وقتی}\}$$

وقتی

$$S_2 = \{i \mid \text{اساسی است } x_i \;\&\; x_i = u_i \;\&\; \bar{a}_{ik} > 0 \quad x_k = u_k - \Delta_k\}$$

چون $\gamma_۱$یا $\gamma_۲$ مساوی صفر می‌باشند پس $\Delta_k = ۰$ (همین فرض نیز شده بود زیرا عمل محوری تبه‌گن صورت می‌گیرد).

در این‌صورت اندیس r، اندیس متغیر خارج‌شونده طبق قاعده‌ی زیر صورت می‌گیرد:

$$\frac{(B^{-۱})_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Lexico Max}\left\{\frac{(B^{-۱})_i}{\bar{a}_{ik}} \mid i \in S_۱ \cup S_۲\right\}$$

ثابت می‌کنیم که پس از انجام عمل محوری تبه‌گن:

۱) r به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌گردد.

۲) افراز شدنی اساسی قوی باقی ماند.

اثبات (۱). اگر r به‌طور منحصربه‌فرد مشخص نشود، بایستی، حداقل دو اندیس مانند h' و l' موجود باشد، به‌طوری‌که

$$\frac{(B^{-۱})_{h'}}{\bar{a}_{h'k}} = \frac{(B^{-۱})_{l'}}{\bar{a}_{l'k}}$$

یا

$$(B^{-۱})_{h'} = \lambda (B^{-۱})_{l'}$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{\bar{a}_{h'k}}{\bar{a}_{l'k}}$$

یعنی دو سطر $B^{-۱}$ متناسب می‌باشند و این تناقض است.

x_k درکران بالا وارد پایه می‌گردد و x_r پایه را ترک می‌کند و $\Delta_k = ۰$ در این‌صورت دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف. $i \in S_۱$ و x_r درکران پائین خود است و x_k درکران بالای خود متغیر اساسی می‌گیرد $(B^{-۱})_r > ۰$ پس:

$$\frac{(B^{-۱})_r}{\bar{a}_{rk}} < ۰$$

(چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید.)

ب. $i \in S_2$ و x_r در کران پائین بوده که پایه را ترک می‌کند و x_k در کران بالا وارد پایه می‌گردد، با توجه به فرض مسأله:

$$(B^{-1})_r < 0$$

و $\bar{a}_{rk} > 0$ پس:

$$(\underset{New}{B}^{-1})_r = (\underset{Old}{B}^{-1})_r / \bar{a}_{rk} < 0$$

و حکم (۲) ثابت است.

حال فرض کنیم $i \in S_1 \cup S_2$ و $i \neq r$ داریم:

$$(\underset{New}{B}^{-1})_i = \bar{a}_{ik} \quad \left\{ \left(\frac{\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_m}}{\bar{a}_{ik}}) - (\frac{\beta_{r_1}, \ldots, \beta_{r_m}}{\bar{a}_{rk}} \right) \right\}$$

داخل $\{0\}$ لکزیکو منفی است و با توجه به علامت $\bar{a}_{ik}$ حکم بدیهی است (چرا؟) از این‌رو در هر حالت افراز شدنی اساسی قوی باقی می‌ماند.

حال بردار L را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} L &= (\hat{z}_{Old}, C_{B_1} B_1^{-1}) - (\hat{z}_{New}, C_{B_2} B_2^{-1}) \\ &= \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} (0, \beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rm}) \end{aligned}$$

دو حالت تشخیص می‌دهیم:

الف. $z_k - c_k > 0$ در این‌صورت:

$$\frac{1}{\bar{a}_{rk}} (0, \beta_{r1}, \beta_{rm}, \ldots, \beta_{rm}) > 0$$ (زیرا x_k در کران پائین است)

پس:

$$L > 0$$

ب. $z_k - c_k < 0$ در این‌صورت:

(x_k درکران بالای خودش است) پس:

$$\frac{1}{\bar{a}_{rk}}(0, \beta_r, \beta_{rm}, \ldots, \beta_{rm}) < 0$$

پس:

$$L > 0$$

و حکم ثابت است یعنی لکزیکو نزولی است. حال به‌سادگی ثابت می‌شود که با روش فوق روش سیمپلکس در حالت تبه‌گنی به‌دور نمی‌افتد (اثبات نمائید).

۳-۱۲-۱۹ خلاصه روش سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار (از نوع می نیمم نمودن).

قدم اول. یک جواب اساسی شدنی برای مسأله پیدا نمائید (در صورت ضرورت از متغیرهای تصنعی استفاده کنید). فرض کنید x_B متغیرهای اساسی و x_{N_1} و x_{N_2} متغیرهای غیراساسی به‌ترتیب درکران پائین وکران بالای خود باشند. جدول زیر را که در آن:

$$\hat{z} = c_B B^{-1} b + (c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1) l_{N_1} + (c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2) u_{N_2}$$
$$\hat{b} = B^{-1} b - B^{-1} N_1 l_{N_1} - B^{-1} N_2 u N_2$$

تشکیل دهید.

قدم اساسی.

۱) اگر برای تمامی متغیرها درکران پائین $z_j - c_j \leq 0$ و برای تمامی متغیرها درکران بالا $z_j - c_j \geq 0$، جواب متناظر جدول، جواب بهینه است در غیراین‌صورت اندیس k از رابطه:

$$\text{Max} \ \left\{ \underset{j \in J_1}{\text{Max}} \{z_j - c_j\} \ , \ \underset{j \in J_2}{\text{Max}} \{c_j - z_j\} \right\}$$

به‌دست آورید. J_1 و J_2 همان مجموعه هستند که قبلاً تعریف شده‌اند یعنی به‌ترتیب مجموعه‌ی اندیس متغیرهای غیراساسی درکران پائین وکران بالا. عیناً می‌توان **قاعده‌ی بلند** را جهت

جلوگیری از به‌دور افتادن در رابطه الگاریتم فوق‌الذکر تعمیم داد. برای این منظور فرض کنید با تبدیلات مناسبی (اگر ضرورت داشته باشد)، $l = \circ$ و قیدهای $x \leq u$ که فرض براین شده $\circ < u_i < \infty$ با معرفی متغیر کمکی به‌صورت:

$$x + Is = u \ , \ \ s \geq \circ$$

بنویسیم. توجه نمائید که برای هر افراز اساسی شدنی مانند $[B, N_۱, N_۲]$ برای دستگاه $Ax = b$ و $\circ \leq x \leq u$، یک پایه‌ای برای دستگاه:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x + Is = u \\ s \geq \circ \ \ x \geq \circ \end{cases} \qquad (*)$$

متناظر می‌گردد، که در آن $m + n$ متغیر اساسی عبارتند از x_B و $x_{N_۲}$ و s_B و $s_{N_۱}$ و $n - m$ متغیر غیراساسی که در سطح صفر هستند عبارتند از $x_{N_۱}$ و $s_{N_۲}$ و بالعکس.

توجه نمائید دستگاه $(*)$ دارای $۲n$ متغیر است زیرا $x \in R^n$ و $s \in R^n$. حال اگر متغیرها را مثلاً به‌صورت:

$$x_۱, x_۲, \ldots, x_n, s_۱, s_۲, \ldots, s_n$$

مرتب نمائیم به سادگی می‌توان قاعده‌ی بلند در مورد جلوگیری از به‌دور افتادن به‌کار برد.

۱) به مرحله‌ی ۲ بروید اگر x_k درکران پائین خود باشد. و اگر x_k درکران بالای خود، به مرحله‌ی ۳ بروید.

۲) متغیر x_k از l_k به $l_k + \Delta_k$ که در آن:

$$\Delta_k = \mathrm{Min}(\gamma_۱, \gamma_۲, u_k - l_k)$$

افزایش می‌یابد. اگر $\Delta_k = \infty$ متوقف شوید. مسأله بهینه‌ی نامتناهی دارد. در غیراین‌صورت با اصلاح نمودن جدول و به‌روز نمودن آن به قدم اول برگردید.

۳) متغیر x_k از u_k به $u_k-\Delta_k$ کاهش پیدا می‌کند. اگر $\Delta_k=\infty$ متوقف شوید، مسأله نامحدود می‌باشد. در غیراین‌صورت جدول را به‌روز نموده و به قدم اول برگردید.

توجه. جهت مشخص شدن، متغیرهای غیراساسی را که درکران پائین خود هستند با اندیس l و آن‌هائی که درکران بالای خود می‌باشند با اندیس u مشخص نمائید.

اکنون با حل یک مثال مطالب فوق‌الذکر را توضیح می‌دهیم.

توجه به جزئیات حل مسأله در درک عمیق الگاریتم بسیار موثر است.

۳-۱۲-۲۰ مثال. مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار حل نمائید.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z=-۲x_۱-۴x_۲-x_۳ \\ \text{s. t.} & ۲x_۱+x_۲+x_۳\leq ۱۰ \\ & x_۱+x_۲-x_۳\leq ۴ \\ & ۰\leq x_۱\leq ۴ \\ & ۰\leq x_۲\leq ۶ \\ & ۱\leq x_۳\leq ۴ \end{array}$$

با معرفی متغیرهای کمکی $x_۴$ و $x_۵$ که از پائین به صفر و از بالا به $+\infty$ محدود هستند مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{array}{llllllll} \text{Min} & Z= & -۲x_۱ & -۴x_۲ & -x_۳ & & & \\ \text{s. t.} & & ۲x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & +x_۴ & & =۱۰ \\ & & x_۱ & +x_۲ & -x_۳ & & +x_۵ & =۴ \end{array}$$

$$\circ \le x_۱ \le ۴$$
$$\circ \le x_۲ \le ۶$$
$$۱ \le x_۳ \le ۴$$
$$\circ \le x_۴ < \infty$$
$$\circ \le x_۵ < \infty$$

در مرحله اول متغیرهای اساسی عبارتند از $x_۴$ و $x_۵$ و متغیرهای غیراساسی درکران پائین خود عبارتند از $x_۱ = x_۲ = \circ$ و $x_۳ = ۱$. توجه نمائید که مقدار تابع مقصود برابر ۱- می‌باشد و مقادیر متغیرهای غیراساسی $x_۴$ و $x_۵$ به‌ترتیب برابر $۹ = ۱ - ۱\circ$ و $۵ = ۱ + ۴$ می‌باشند.

تکرار اول.

	$\overset{l}{x_۱}$	$\overset{l}{x_۲}$	$\overset{l}{x_۳}$	$x_۴$	$x_۵$	
$x_۴$	۲	۱	۱	۱	∘	۹
$x_۵$	۱	۱	۱-	∘	۱	۵
$z_j - c_j$	۲	۴	۱	∘	∘	$\bar{z} = -۱$

ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برای متغیرهای غیراساسی درکران پائین خود، عدد ۴ می‌باشد که متناظر $x_۲$ است. بنابراین $x_k = x_۲$ ازکران پائین خود افزایش می‌یابد. $\bar{a}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و

$$\Delta = \mathrm{Min}\{\gamma_۱, \gamma_۲, u_۲ - l_۲\} = \mathrm{Min}\{\gamma_۱, \gamma_۲, ۶\}$$
$$\gamma_۱ = \mathrm{Min}\left\{\frac{۹ - \circ}{۱}, \frac{۵ - \circ}{۱}\right\} = ۵$$

که متناظر $x_{B_۲} = x_۵$ می‌باشد. یعنی $r = ۲$ پس:

$$\Delta_۲ = \mathrm{Min}\{۵, \infty, ۶\} = ۵$$

زیرا $\gamma_۲ = \infty$ (چرا؟)

پس:

$$\hat{z} = -۱ - (۴)(۵) = -۲۱$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} x_۴ \\ x_۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۹ \\ ۵ \end{pmatrix} - y_۲\bar{a}_۲ \qquad \Delta = \begin{pmatrix} ۹ \\ ۵ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} ۵ = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

پس جدول فوق پس از انجام عمل محوری چنین خواهد بود.

تکرار دوم.

	$\overset{l}{x_۱}$	$x_۲$	$\overset{l}{x_۳}$	$x_۴$	$\overset{l}{x_۵}$	
$x_۴$	۱	۰	۲	۱	-۱	۴
$x_۲$	۱	۱	$\boxed{-۱}$	۰	۱	۵
$z_j - c_j$	-۲	۰	۵	۰	-۴	-۲۱

تمامی متغیرهای غیراساسی درکران پائین خود می‌باشند. ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برابر با ۵ است که متناظر $x_۳$ می‌باشد بنابراین:

$$\bar{a}_۳ = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

و

$$\Delta_۳ = \mathrm{Min}(\gamma_۱, \gamma_۲, ۴ - ۱)$$

که:

$$\gamma_۱ = \frac{۴ - ۰}{۲} = ۲$$
$$\gamma_۲ = \frac{۶ - ۵}{۱} = ۱$$

پس $\Delta_۳ = \mathrm{Min}\{۲, ۱, ۳\} = ۱$

که متناظر $x_۲$ $x_{B_r} = x_{B_۱} = x_۲$, $r = ۲$.

و این بدان معنی است که:

$$x_3 = 1 + \Delta_3 = 1 + 1 = 2$$

$$\hat{z} = -21 - (z_3 - c_3)\Delta_3 = -21 - 5 \times 1 = -26$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \bar{a}\Delta_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

در این‌جا x_3 وارد پایه می‌گردد. x_2 به کران بالای خود می‌رسد و پایه را ترک می‌نماید. جدول پس از انجام عمل محوری به‌صورت زیر خواهد بود.

تکرار سوم.

	$\overset{l}{x_1}$	$\overset{u}{x_2}$	x_3	x_4	$\overset{l}{x_5}$	
x_4	۳	۲	۰	۱	۱	۲
x_3	-۱	-۱	۱	۰	-۱	۲
$z_j - c_j$	۳	۵	۰	۰	۱	-۲۶

ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برای متغیرهای درکران پائین ۳ می‌باشد که متناظر x_1 است. بنابراین x_1 افزایش می‌یابد. در این‌جا:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

و

$$\Delta_1 = \mathrm{Min}(\gamma_1, \gamma_2, u_1 - l_1)$$
$$= \mathrm{Min}(\gamma_1, \gamma_2, 4)$$

$$\gamma_1 = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\gamma_2 = \frac{4 - 2}{1} = 2$$

پس $\Delta_1 = \mathrm{Min}(\frac{۲}{۳}, ۲, ۴) = \frac{۲}{۳}$ که متناظر $x_۳$ = $x_{B_r} = x_{B_۲}$, $r = ۳$ پس:

$$\hat{z} = -۲۶ - (z_۱ - c_۱)\Delta_۱ = -۲۶ - (۳)(\frac{۲}{۳}) = -۲۸$$

$$\begin{pmatrix} x_۴ \\ x_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۲ \end{pmatrix} - \bar{a}_۱\Delta_۱ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \end{pmatrix}(\frac{۲}{۳}) = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۸}{۳} \end{pmatrix}$$

در این‌جا $x_۱$ وارد پایه می‌گردد و $x_۴$ از پایه خارج می‌شود.

تکرار چهارم. جدول پس از انجام عملیات محوری چنین خواهد بود:

	$x_۱$	$\overset{u}{x_۲}$	$x_۳$	$\overset{l}{x_۴}$	$\overset{l}{x_۵}$	
$x_۱$	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$x_۳$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$
$z_j - c_j$	۰	۳	۰	-۱	۰	-۲۸

چون $z_j - c_j$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی در کران پائین نامثبت و برای تمامی متغیرهای اساسی در کران بالا نامنفی است. پس جواب بهینه می‌باشد جواب بهینه فوق منحصر به‌فرد نمی‌باشد زیرا $z_۵ - c_۵ = z_j - c_j = ۰$ و

$$\theta = \mathrm{Min}\left\{\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}\right\} = ۲ > ۰$$

پس:

$$x_۱ = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}x_۵$$
$$x_۳ = \frac{۸}{۳} + \frac{۲}{۳}x_۵$$

با افزایش $x_۵$ از صفر به ۲ داریم:

$$x_۱ = ۰$$
$$x_۳ = \frac{۸}{۳} + \frac{۴}{۳} = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \qquad ۱ \leq ۴ \leq ۴$$

پس یک جواب بهینه دیگر به‌صورت زیر است:

$$x^* = (۰, ۶, ۴, ۰, ۲)$$
$$\hat{z} = -۶ \times ۴ - ۴ = -۲۸$$

۳-۱۳ کران بالای تعمیم یافته[۱]

تا به‌حال روش‌هائی را ذکر نمودیم که قیدهای به‌صورت $x_j \leq u_j$ را دست‌کاری می‌نمود، بدون این‌که این قیدها را در پایه کاری ملحوظ نماید (در حقیقت بودن این‌که این قید باعث بزرگ شدن مرتبه‌ی پایه کاری نمی‌شد). این روش تعمیم یافته، به‌طوری‌که می‌تواند، قیدهائی که در خاصیت زیر صدق می‌نمایند را دست‌کاری نماید (با همان روش یعنی بدون ملحوظ داشتن آن‌ها در پایه کاری).

۱) هر قید در مجموعه؛ یک قید کران بالا است به‌صورت مجموع از متغیرها، یعنی قیدی به‌صورت:

$$\sum(x_j \mid j \in \{j_۱, j_۲, \ldots, j_k\}) \leq u_۰$$

که با معرفی متغیر کمکی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum(x_j \mid j \in \{j_۱, j_۲, \ldots, j_k\}) + s_۱ = u_۰$$

۲) هر متغیر در مدل، حداکثر در یک قید ظاهر می‌گردد.

مجموعه‌ای از قیدها که در خواص (۱) و (۲) صدق می‌نمایند را، قیدهای کران بالای تعمیم یافته می‌نامند. که این قیدها را به‌صورت اختصار با قیدهای GUB[۲] نشان می‌دهند. روش حل LP بدون ملحوظ داشتن قیدهای مربوط به GUB در پایه کاری (یادآور می‌شویم که B پایه کاری، ماتریسی است که در هر مرحله نیاز به داشتن عکس آن داریم) را تکنیک کران بالای تعمیم یافته یا GUBT (برای اختصار) می‌نامیم. این روش توسط استاد فقید و نابغه جهان

1) Generalized Upper Bounding(GUB) 2) Generalized Upper Bound lenstraint

پروفسور جرج دانتزیگ در سال ۱۹۶۷ ابداع شد. اگر GUBT بتواند قیدهای GUB را که در خواص (۱) و (۲) صدق می‌نماید دست‌کاری نماید، با مقیاس نمودن متغیرها[1]، می‌تواند، مجموعه قیدهائی را که فقط در خاصیت (۲) صدق می‌نماید، دست‌کاری کند. در این مرحله، صورت کلی GUB را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳-۱۳-۲۱ مثال. LP زیرنمونه‌ای از GUB می‌باشد:

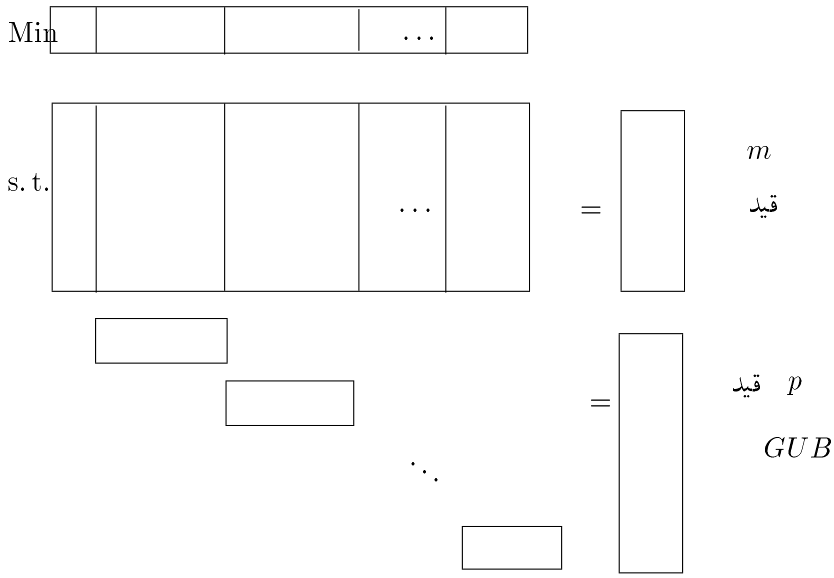
$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Max} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & +6x_5 & & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & =10 & \\
 & -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +x_5 & & & =12 & \\
 & & x_2 & +x_3 & & & +s_1 & & =5 & \text{GUB قید} \\
 & & & & x_4 & +x_5 & & +s_2 & =7 & \text{GUB قید}
\end{array}
$$

تمامی متغیرها نامنفی هستند.

یک LP به‌صورت استاندارد درنظر بگیرید، که در آن که قیدها در دو دسته قرار می‌گیرند. m قید اول دارای ساختار کلی می‌باشند و p قید بعدی، قیدهائی هستند که در خاصیت (۲) صدق می‌نمایند که آن‌ها را قیدهای کران بالای تعمیم یافته یا قیدهای GUB می‌نامند. GUBT حالت خاصی از روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد که عکس پایه کاری از مرتبه‌ی m را حفظ می‌نماید (که در آن m تعداد قیدهای غیر GUB است) به‌جای حفظ عکس پایه از مرتبه‌ی $m+p$ که در سیمپلکس معمولی برای حل چنین مسائلی مورد نیاز می‌باشد. تمام مقادیر مورد نیاز برای حل یک LP با روش سیمپلکس با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه کاری و با استفاده از داده‌های اصلی قابل‌دسترسی می‌باشد. و فقط پس از هر مرحله عکس پایه کاری به‌روز می‌گردد. وقتی p (تعداد قیدهای GUB) عدد بزرگی باشد، صرفه‌جویی در استفاده از حافظه اصلی و تقلیل در مدت زمان استفاده شده از C.P.U[2] بسیار چشم‌گیر می‌باشد برای استفاده از امتیازات GUB، فرد بایستی قادر باشد که قیدهای مربوط به GUB را تشخیص دهد. اگر LP موردنظر دارای ساختارکلی باشد و فرد هیچ دانش قبلی در رابطه با آن نداشته باشد، بایستی روش خاصی جهت تشخیص این قید اعمال نماید. با مرتب نمودن سطرها وستون‌ها؛ در صورت ضرورت یک مسأله‌ی LP به‌صورت استاندارد

1) Scaling of Variables 2) Central Processing Unit

را می‌توان با GUBT حل نمود. که این صورت کلی در شکل (۳-۴) نشان داده شده است.



شکل (۳-۴)تمامی متغیرهای مسأله نامنفی می‌باشند.

شکل (۳-۴) ساختار یک مدل LPکه می‌توان آن با GUBT حل نمود. تمامی ضرایبی که خارج از قالب‌ها می‌باشند برابر با صفر می‌باشند. هر یک ازقالب‌های بار یک زیرقالب بزرگ قیدها نمایش قیدهای GUB می‌باشند. فرض کنید $n_۰$ تعداد متغیرهائی باشد که در هیچ‌یک از قیدها GUB ظاهر نمی‌گردد و n_i تعداد متغیرهائی باشد (یعنی با ضرایب غیرصفر) که در هر یک از قیدها GUB موجود می‌باشد $(i = ۱, ۲, \ldots, p)$ فرض کنید:

$$S_۰ = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n_۰\}$$

$$S_t = \{n_۰ + n_۱ + \cdots + n_{t-۱} + ۱, \ldots, n_۰ + n_۱ + \cdots + n_{t-۱} + n_t\}$$

$$t = ۱, \ldots, p$$

برای روشن شدن تعریف sها مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{lrrrrrrl} \text{Min} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & +2x_6 & = 10 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & -5x_5 & -6x_6 & = 11 \\ & & & 2x_3 & +4x_4 & & & = 5 \\ & & & & & 6x_5 & +7x_6 & = 7 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, 6$$

در این‌جا

$$S_0 = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{2+1, 2+2\} = \{3, 4\}$$

$$S_2 = \{4+1, 4+2\} = \{5, 6\}$$

متغیر x_j برای $j \in S_0$، متغیرهائی هستند که در هیچ‌یک از قیدهای $G \cup B$ ظاهر نمی‌گردند مانند متغیرهای x_1 و x_2 در مثال فوق و متغیرهای x_j برای $j \in S_t$. $(t = 1, \ldots, p)$ متغیرهائی هستند که در قید tام $G \cup B$ ظاهر می‌گردند. فرض کنید x^t بردار متغیرهائی x_j باشند که $j \in S_t$ $(t = 0, 1, \ldots, p)$ مثلاً در مثال فوق:

$$x^0 = (x_1, x_2) \ ; \ x^1 = (x_3, x_4) \ ; \ x^2 = (x_5, x_6)$$

در این‌صورت LP مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{llllllll} \text{Min} & z(x) = & c^0 x^0 & +c^1 x^1 & +c^2 x^2 & + \ldots & +c^p x^p & \\ \text{s.t.} & & A^0 x^0 & +A^1 x^1 & +A^2 x^2 & + \ldots & +A^p x^p & = b \\ & & & d^1 x^1 & & & & = d_1 \\ & & & & d^2 x^2 & & & = d_2 \\ & & & & \ldots & & & \\ & & & & & & d^p x^p & = d_p \end{array}$$

$$x^t \geq 0 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, p$$

(۳-۲۲)

توجه کنید که $d_1, \dots, d_p$ اسکالر و d^t $(t = 0, 1, \dots, p)$ بردارهای سطری می‌باشند. A^j یک ماتریس با m سطر و تعداد ستون می‌باشد که تعداد ستون‌های آن برابر مؤلفه‌های x^j است. بدون این‌که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که دستگاه قیدها، مستقل خطی هستند. از این‌رو، هر بردار اساسی برای **۳-۲۲** شامل $m+p$ متغیر اساسی خواهد بود و هر پایه ماتریس مربعی از مرتبه‌ی $m+p$ می‌باشد.

در بیشتر کتاب‌ها GUBT حالتی از قیدهای GUB را مورد مطالعه قرار می‌دهد که تمامی ضرایب متغیرها در قیدهای مذکور برابر یک است. در این‌جا، حالت کلی را بررسی می‌کنیم که هر قید GUB ممکن است یک معادله خطی باشد.

توجه. قبل از این‌که GUBT برای حل مسأله به‌کاررود، قیدها بایستی به‌صورتی مرتب گردند که p قید GUB در انتهای قیدهای مسأله آورده شود.

علائمی که در این قسمت مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی می‌گوئیم که x_jاز مجموعه‌ی S_tاست، این بدان معنی است که $j \in S_t$. a_j یک بردار ستونی از مرتبه‌ی $(m+p) \times 1$ می‌باشد که بردار ضریب متغیر x_j در دستگاه قیود می‌باشد. در بردار a_j، m مؤلفه‌ی اول از قیدهای غیر GUB و p مؤلفه‌ی آخر از قیدهای GUB ظاهر می‌گردند. از این‌رو حداکثر یک عضو از p مؤلفه‌ی آخر مخالف صفر می‌باشد وقتی می‌گوئیم a_j یک ستون از S_t است، این بدان معنی است که $j \in S_t$. هم‌چنین اگر تمامی p مؤلفه‌ی آخری a_j برابر با صفر باشند این بدان معنی است که a_j از S_0 است (چرا؟)

اگر مؤلفه‌ی $m+t$ام a_j مخالف صفر باشد، این امر مستلزم آن است که:

$$j \in S_t$$

برای هر عدد طبیعی n، ماتریس واحد از مرتبه‌ی n به I_n نشان داده می‌شود.

۳-۱۴ فاز اول و فاز دوم

برای پیدا نمودن یک BFS برای **۳-۲۲** فاز اول روش سیمپلکس را با افزودن متغیرهای تصنعی مورد استفاده قرار می‌دهیم. فاز اول مسأله همان ساختار GUB را دارد که مسأله اصلی دارا

می‌باشد. در انتهای فاز اول اگر مسأله اصلی شدنی باشد یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی اصلی پیدا می‌شود که می‌توان با به‌کاربردن فاز دوم مسأله را حل نمود. بنابراین بحث بدین‌صورت خواهد بود که یک جواب اساسی شدنی برای مسأله در دست است. محاسباتی که قرار است در یک مرحله از الگاریتم سیمپلکس انجام شود فرض کنیم که یک جواب اساسی شدنی برای ۲۲ − ۳ در دست است. محاسباتی که با به‌کاربردن روش سیمپلکس بایستی انجام شود به شرح ذیل می‌باشد:

۱) مقادیر متغیرهای اساسی را در BFS متناظر محاسبه نمائید. این کار ممکن است با قرار دادن متغیرهای غیراساسی مساوی صفر و حل دستگاه صورت گیرد.

۲) جواب اساسی دوآل متناظر پایه موردنظر را به‌دست آورید.

۳) بابه‌کاربردن جواب حاصل برای دوآل در (۲) ضرایب قیمت نسبی[1] را با استفاده از داده‌های اصلی به‌دست آورید. (یعنی $c_j - wa_j$)

۴) بررسی کنید که $c_j - wa_j$های بدست آمده بازاء هر j نامنفی است یا نه. در صورت مثبت بودن جواب، جواب حاصل بهینه است و عملیات را قطع نمائید، در غیر این‌صورت، منفی‌ترین قیمت نسبی را درنظر بگیرید و متغیر متناظر آن را وارد پایه کنید.

۵) ستون متغیر واردشونده را به‌روز نمائید، که این ستون ضرایب ترکیب خطی پایه‌ها در نمایش ستون اصلی می‌باشد.

۶) اگر تمامی اعضای ستون به‌روز شده نامثبت باشند. مسأله نامحدود است و عملیات ختم می‌گردد. در غیر این‌صورت قاعده می‌نیمم جهت مشخص نمودن متغیر خارج‌شونده اجرا می‌گردد.

۷) با به‌روز نمودن بردار پایه، عکس ماتریس پایه،... به مرحله‌ی بعد می‌رویم مرحله‌ای که تمامی عملیات فوق‌الذکر تکرار می‌گردد.

در حل مسأله‌ی ۳-۲۲ با GUBT با بردار اساسی شدنی اولیه، یک پایه کاری از مرتبه‌ی m از پایه‌ی اولیه ساخته می‌شود. تمامی محاسباتی که قرار است در این مرحله انجام شود؛

1) Relative Cost Coefficients

با به‌کاربردن عکس پایه کاری (پایه کاری مرتبه‌ی m فوق‌الذکر) صورت می‌پذیرد. پس از تغییر بردار اساسی در هر مرحله، عکس پایه کاری به‌روز می‌گردد.

چند نتیجه مهم در رابطه با بردار اساسی ذیلاً درج می‌گردد که بسیار در محاسبات مفید می‌باشد.

۳-۱۴-۲۲ قضیه. هر بردار اساسی برای ۳-۲۲ بایستی حداقل یک متغیر اساسی مانند x_j از $S_t(t = ۱, \dots, p)$ را شامل شود.

برهان. فرض کنید x_B یک بردار اساسی و B پایه متناظر آن باشد (برای مسأله ۳-۲۲). پایه B از مرتبه‌ی $m+p$ می‌باشد و غیرمنفرد است. از این‌رو حداقل یک عضو از سطر $(p+t)$ام بایستی مخالف صفر باشد (چرا؟) $(t = ۱, \dots, p)$ ضرایب در سطر $(m+t)$ام مسأله ۳-۲۲ برای تمامی x_jهائی‌که $j \notin S_t$ که صفر می‌باشند.

پس B در صورتی شامل یک عضو غیرصفر در سطر $(t+p)$ام است اگر x_B حداقل شامل یک متغیر مانند x_j، $j \in S$ باشد. از این‌رو x_B بایستی حداقل یک متغیر از S_t برای هر $t(t = ۱, \dots, p)$ باشد.

۳-۱۵ مجموعه‌های ضروری و غیرضروری[1]

فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۳-۲۲ باشد. برای $۱ \leq t \leq p$ مجموعه‌ی S_t را نسبت به پایه مذکور ضروری گوئیم، در صورتی‌که، x_B شامل دو یا بیشتر از متغیرهای مجموعه‌ی S_t باشد. برای $۱ \leq t \leq p$، مجموعه‌ی S_t را غیرضروری گویند، در صورتی‌که نسبت به بردار و پایه، x_B فقط شامل یک متغیر از S_t باشد.

توجه داشته باشید که یک مجموعه‌ای مانند S_t نسبت به یک پایه از ۳-۲۲ که ضروری است، ممکن است نسبت به بردار پایه دیگر غیرضروری شود، ضمناً یادآور می‌شویم که بر مبنای تعریف فوق S_tها $(t = ۱, \dots, p)$ به دو دسته جدا؛ مجموعه‌های ضروری و مجموعه‌های غیرضروری دسته‌بندی می‌گردند. این دسته‌بندی شامل مجموعه‌ی $S_۰$ نمی‌گردد.

1) Essential an Inessential Sets

۳-۱۵-۲۳ قضیه. فرض کنید x_B یک بردار اساسی ۳-۲۲ باشد. تعداد مجموعه‌های ضروری نسبت به x_B حداکثر m می‌باشد.

برهان. فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۳-۲۲ باشد طبق قضیه قبل، x_B بایستی از هر S_t حداقل یک متغیر را داشته باشد (برای $t = ۱, \ldots, p$). هم‌چنین $m + p$ متغیر اساسی در x_B است. از این‌رو تعداد مجموعه‌های S_t که از آن‌ها x_B دو یا بیشتر از دو متغیر را دارا می‌باشد نمی‌تواند از m بیشتر شود.

۳-۱۶ متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی[1]

فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۳-۲۲ و B پایه متناظر آن باشد. طبق قضیه‌ی قبل، x_B شامل حداقل یک متغیر از مجموعه‌ی $S_t(t = ۱, \ldots, p)$ می‌باشد. برای هر $۱ \leq t \leq p$ یک متغیر از x_B انتخاب نمائید که در S_t باشد و آن را متغیر کلیدی از S_t در x_B بنامید. اگر S_t مجموعه‌ی ضروری باشد، آنگاه مجموعه‌ی:

$$\{x_j \mid j \in S_t\}$$

شامل دو یا بیشتر متغیر اساسی در x_B می‌باشد و می‌توان هر یک از این متغیرها را دلخواه انتخاب نمود. توجه داشته باشید اگر S_t مجموعه‌ی غیرضروری باشد، در این‌صورت متغیر کلیدی تنها متغیر x_B در آن می‌باشد. پایه کاری که از B به‌دست می‌آید کاملاً بستگی به متغیر کلیدی دارد که از مجموعه‌های ضروری انتخاب می‌گردد. ستون‌های اصلی در ۳-۲۲ که متناظر متغیرهای کلیدی می‌باشد، ستون‌های کلیدی در پایه نامیده می‌شود. ستون کلیدی متناظر متغیر کلیدی از مجموعه S_tها $(t = ۱, \ldots, p)$ را ستون کلیدی tام در پایه می‌نامیم. توجه نمائید که متغیرهای کلیدی، از $S_t(t = ۱, \ldots, p)$ انتخاب می‌گردند و هیچ متغیر کلیدی از $S_۰$ انتخاب نمی‌گردد. متغیرهای اساسی که متغیرهای کلیدی نمی‌باشند، متغیرهای غیرکلیدی نامیده می‌شوند و ستون‌های متناظر آن‌ها را ستون‌های غیرکلیدی گویند. تعداد کلی متغیرهای غیرکلیدی m می‌باشد.

1) Key and Nonkey Variables

۱۷-۳ به‌دست آوردن پایه کاری[1]

فرض کنید x_B بردار اساسی شدنی اولیه و B پایه متناظر آن باشد؛ به‌علاوه فرض کنید متغیرهای کلیدی در x_B از مجموعه‌ی $S_t(t = ۱,\ldots,p)$ انتخاب شده‌اند. برای پایه اولیه، پایه کاری به‌صورت زیر انتخاب می‌گردد:

متغیرهای x_B(و ستون‌های متناظر آن را در پایه B) را به صورتی مرتب نمائید، که متغیرهای کلیدی در مجموعه‌های $S_t(t = ۱,\ldots,p)$ در p ستون اولی قرار گیرند. پس از متغیرهای کلیدی، متغیرهای غیرکلیدی در مجموعه‌ی $S_t(t = ۱,\ldots,p)$ را به طریقی مرتب نمائید.

پس از مرتب نمودن با روش فوق‌الذکر، پایه متناظر B به‌صورت زیر افراز می‌گردد:

$$B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \text{ستون‌های کلیدی به‌ترتیب } t = ۱,\ldots,p & \text{ستون‌های غیرکلیدی} \\ P & R \\ \hdashline D & Q \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} m \text{ سطر اول} \\ \\ p \text{ سطر آخر} \end{array}$$

(۲۳-۳)

که در آن D یک ماتریس غیرمنفرد می‌باشد و قطری است که مرتبه‌ی آن $p \times p$ است. Q ماتریسی است که شامل حداکثر یک عضو مخالف صفر در هر ستون می‌باشد. فرض کنید:

$$T = \left[\begin{array}{c:c} D^{-۱} & -D^{-۱}Q \\ \hdashline ۰ & I_m \end{array}\right] \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

T یک ماتریس مربع از مرتبه‌ی $m + p$ غیرمنفرد می‌باشد. ماتریس T با استفاده از $D^{-۱}$ و Q ساخته شده است؛ که یک ماتریس بالا مثلثی است:

$$BT = \left[\begin{array}{c:c} PQ^{-۱} & S \\ \hdashline I_p & ۰ \end{array}\right] \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

1) Derivation oj the Working Basic

که در آن $S = -PD^{-1}Q + R$ یک ماتریس مربع از مرتبه‌ی m می‌باشد. اگر S ماتریس منفرد باشد؛ آنگاه مجموعه‌ی m ستون BT یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی خواهد بود و در نتیجه BT ماتریس منفرد می‌باشد، که تناقض با نامنفرد بودن B و T می‌باشد (حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرمنفرد، ماتریسی است غیرمنفرد). از این‌رو S ماتریس نامنفرد می‌باشد. ماتریس Sای که به‌صورت فوق تعریف شد، پایه کاری برای مسأله می‌باشد. با داشتن B که یک ماتریس $(m+p) \times (m+p)$ می‌باشد و با انتخاب متغیرهای کلیدی ماتریس B و با مرتب نمودن متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی به‌صورت ۳-۲۰ افراز می‌گردد. و پایه کاری به‌وسیله

$$S = -PD^{-1}Q + R$$

محاسبه می‌شود. پایه کاری S را می‌توان به‌صورت زیر نیز محاسبه نمود.

۳-۱۸ روشی برای محاسبه‌ی پایه کاری

همان‌طوری‌که قبلاً ذکر شد، قیدهای LP بایستی به‌صورتی مرتب گردند که p قید آخری، مربوط به قیدهای GUB باشند. همین‌طور پایه را بایستی به‌صورتی بنویسیم که p ستون اول، ستون‌های کلیدی به‌ترتیب $t = 1, \ldots, p$ شوند. پس از مرتب نمودن B به شرحی که گذشت، m ستون آخری آن مربوط به ستون‌های غیرکلیدی است. با شروع از اولین ستون غیرکلیدی در B، محاسبات زیر را در رابطه با ستون‌های غیرکلیدی انجام دهید. فرض کنید که ستون انتخاب شده مربوط به S_{t_1} باشد. اگر $t_1 = 0$، هیچ عملی روی این ستون انجام ندهید، ستون غیرکلیدی بعدی را انتخاب نمائید. (یعنی ستون $1 \leq t_1 \leq p$) ضریب مناسبی از ستون اول را از این ستون کم کنید (یعنی مضربی از ستون کلیدی را از ستون غیرکلیدی) به‌طوری‌که عضو غیرصفر این ستون صفر شود (توجه کنید که در این ستون فقط یک عضو غیرصفر وجود دارد) پس از انجام این محاسبه، همین کار را با ستون‌های غیرکلیدی دیگر انجام دهید. پس انجام عملیات فوق در رابطه با ستون‌های غیرکلیدی، اعضای ستون‌های کلیدی را به عضو مخالف صفر آن‌ها تقسیم نمائید. واضح است که عملیات فوق روی پایه، پایه را به ماتریس BT تبدیل می‌نماید. (BT در ۳-۲۵). و پایه کاری عبارت است از ماتریس $m \times m$ واقع در m سطر

اول و m ستون آخر از ماتریس حاصل.

۲۴-۱۸-۳ مثال. در این مثال توضیح می‌دهیم که چگونه یک پایه کاری را از یک پایه داده شده به‌دست می‌آوریم. از این‌رو در این مثال فقط پایه داده شده $(m+1)\times(m+p)$ ملحوظ شده و ساختار LP به‌طورکامل نیامده است. در این‌جا $m=4$ و $p=5$.

فرض کنید $x_B=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)$ بردار پایه باشد، که در آن $x_t(t=1,\dots,5)$ متغیرهای کلیدی در این پایه هستند. متغیرهای x_9، x_8، x_7 و x_6 متغیرهای غیرکلیدی در این پایه می‌باشند. پایه B را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$B=\begin{array}{cl} \begin{array}{cc}\text{ستون‌های کلیدی} & \text{ستون‌های غیرکلیدی}\end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 2 & 2 & 4 & -1 & 2 & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{اعضای سطرهای غیر } GUB \\ \\ \text{اعضای سطرهای } GUB \end{array} \end{array} \qquad (۳-۲۶)$$

ستون‌های ششم و هفتم در پایه یعنی متناظر متغیرهای x_6 و x_7 در سطرهای متناظر GUB اعضای غیرصفر دارند (در سطر اول قیدهای متناظر GUB، یعنی در سطر پنجم)، از این‌رو x_6 و x_7 بایستی در این مسأله از S_1 باشند. از میان متغیرهای اساسی x_1، x_6 و x_7 بایستی در این مسأله از S_1 باشند. از میان متغیرهای اساسی x_1، x_6 و x_7 از مجموعه‌ی S_1، متغیر x_1 به عنوان متغیر کلیدی انتخاب می‌گردد. با همین روش واضح است که متغیرهای غیرکلیدی

x_8، x_9 متناظر ستون‌های هشتم و نهم (به‌ترتیب) در پایه از مجموعه‌های S_1 و S_2 می‌باشند. در این مسأله متغیرهای x_4 و x_5 به‌ترتیب از مجموعه‌های S_2 و S_3می‌باشند. برای به‌دست آوردن پایه کاری بایستی عملیات زیر را انجام دهیم.

$\frac{1}{3}$ ستون اول را از ستون ششم، $-\frac{2}{3}$ ستون دوم را از ستون هفتم و $\frac{4}{3}$ ستون سوم را از ستون هشتم و بالاخره $-\frac{3}{4}$ ستون سوم را از ستون ۹ تفریق نمائیم و ستون‌های اول و دوم و سوم و چهارم و پنجم را به‌ترتیب به اعداد ۱،۲،۳،-۴ و ۵- تقسیم کنیم. پس از انجام عملیات فوق B صورتی به شکل ۳-۲۵ خواهد داشت.

$$BT = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{ستون‌های کلیدی} & \qquad \text{ستون‌های غیرکلیدی} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc:cccc} \frac{1}{3} & 11 & -2 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -4 & -5 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -5 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{4} & \frac{3}{5} & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & -3 & -3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{اعضای سطرهای غیر } GUB \\ \\ \\ \text{اعضای سطرهای } GUB \end{array} \end{array}$$

از این‌رو پایه کاری به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{پایه کاری}S = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -4 & -5 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{عکس پایه کاری}S^{-1} = \begin{bmatrix} 84 & 33 & 48 & -183 \\ 15 & 6 & 9 & -33 \\ 26 & 10 & 15 & -\frac{170}{3} \\ 2 & 1 & 1 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

۳-۱۸-۲۵ به‌کاربردن عکس پایه کاری برای محاسبه‌ی متغیرهای اساسی و به‌روز نمودن بردارهای ستونی.

حال روش حل دستگاه معادلات به‌صورت زیر را با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه کاری:

$$By = q \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

بیان می‌کنیم؛ که در آن $q = (q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_{m+p})^t$ بردار داده شده می‌باشد.

فرض کنید:

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+m}) = T^{-1}Y$$

که در آن T ماتریس انتقال یافته ۳-۲۴ می‌باشد. در این‌صورت دستگاه معادلات ۳-۲۶ معادل دستگاه:

$$BT(T^{-1}Y) = q$$

می‌باشد. یعنی:

$$\begin{pmatrix} PD^{-1} & S \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \xi = q \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

یعنی:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_p)^t = (q_{m+1}, \ldots, q_{m+p})^t$$

و

$$(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{m+p})^t = s^{-1}[(q_1, \ldots, q_m) - PD^{-1}(q_{m+1}, \ldots, q_{m+p})]$$

بنابراین با به‌کاربردن اطلاعات ماتریس پایه B و بردار q و B^{-1}، بردار $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+m})^t$ به‌صورت فوق محاسبه می‌گردد. با داشتن $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+m})^t$، جواب Y به‌صورت:

$$Y = T(\xi_1, \ldots, \xi_{m+p})^t$$

به‌دست می‌آید.

۳-۱۸-۲۶ مثال. فرض کنید $m = ۴$، $p = ۵$ و x_B و B بردار اساسی و پایه متناظر آن به‌ترتیب در مثال۳-۱۸-۲۴ باشد ستون‌های کلیدی و غیرکلیدی همان‌هائی هستند که در آن مثال مشخص گردید. در این‌صورت $PD^{-۱}$ یک ماتریس $m \times p$ می‌باشد که در گوشه شمال غربی BT قرار دارد (یعنی زیر ماتریسی که سطرهای آن متناظر سطرهای غیر GUB و ستون‌های آن ستون‌های کلیدی BT هستند). در این‌صورت ماتریس T به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T = \left[\begin{array}{ccccc:cccc} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۵} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \hdashline ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

فرض کنیم، می‌خواهیم دستگاه ۳-۲۶ با:

$$q = (۲۰, ۱۸, ۸, ۳, ۴, ۴, ۲, ۱۲, ۰)$$

را حل کنیم. فرض کنیم:

$$y = (y_j \mid j = ۱, \dots, ۹)^t$$

$$\xi = (\xi \mid j = ۱, \dots, ۹)^t = T^{-۱}Y$$

از روش بالا داریم:

$$(\xi_۱, \xi_۲, \xi_۳, \xi_۴, \xi_۵) = (۴, ۴, ۲, ۱۲, ۰)^t$$

و

$$\begin{aligned}&(\xi_۶, \xi_۷, \xi_۸, \xi_۹)\\ =&S^{-۱}[(۲۰, ۱۸, ۸, ۳)^t - PD^{-۱}(۴, ۴, ۲, ۱۲, ۰)^t]\\ =&S^{-۱}(\frac{۲۰}{۳}, \frac{۷}{۳}, ۲, ۴)^t = (۱, ۰, ۰, -۱)^t\end{aligned}$$

از این‌رو:

$$\xi = (۴, ۴, ۲, ۱۲, ۰, ۱, ۰, ۰, -۱)^t$$

و

$$y = T\xi = (۱, ۲, ۱, ۳, ۰, ۱, ۰, ۰, -۱)^t$$

جواب دستگاه ۳-۲۶ می‌باشد.

دستگاه معادلاتی که از حل آن‌ها BFSهای متناظر مسائلی مانند ۳-۲۲ حاصل می‌گردد و حل دستگاه‌هائی که منجر به به‌روز نمودن بردار ستونی واردشونده در مراحل روش سیمپلکس به‌کارگرفته می‌شوند، از نوع ۳-۲۶ می‌باشند، از این‌رو با روش فوق‌الذکر با به‌کارگرفتن پایه کاری قابل حل هستند.

۳-۱۸-۲۷ به‌کاربردن عکس پایه کاری برای محاسبه‌ی متغیرهای دوآل.

فرض کنید x_B بردار اساسی ۳-۲۲ و B پایه متناظر آن و C_B بردار سطری اصلی ضرایب قیمت متناظر x_B در ۳-۲۲ باشد. فرض کنید:

$$w = (w_۱, \dots, w_m, w_{m+۱}, \dots, w_{m+p})$$

جواب اساسی دوآل متناظر مسأله ۳-۲۲ می‌باشد. بردار w را می‌توان از حل دستگاه:

$$wB = C_B$$

به‌دست آورد. که دستگاه فوق معادل است با:

$$WBT = C_BT$$

یعنی:

$$w \begin{pmatrix} PD^{-1} & \vdots & S \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_p & \vdots & 0 \end{pmatrix} = v = C_B T \qquad (۲۹\text{-}۳)$$

بنابراین:

$$v = C_B T = (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+m}) \qquad (۳۰\text{-}۳)$$

به سادگی قابل محاسبه است.

از ۳-۲۹ حاصل می‌گردد:

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m) = (v_{p+1}, \ldots, v_{p+m})S^{-1} \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

و

$$(w_{m+1}, \ldots, w_{m+p}) = (v_1, \ldots, v_p) - (w_1, \ldots, w_m)PD^{-1} \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

از این‌رو با داشتن B، C_B و B^{-1} به سادگی می‌توان بردار w را به‌دست آورد.

۳-۱۸-۲۸ مثال. فرض‌کنید $m = 4$ و $p = 5$ و B همان باشد که در مثال۳-۱۸-۲۴ داده شد. متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی همان‌ها هستند که در آن مثال مشخص گردیدند. فرض کنید :

$$C_B = (-1, -1, 2, -5, 5, 2, -\frac{7}{3}, -7, -4)$$

و

$$w = (w_i \mid i = 1, \ldots, 9)$$

پس:

$$v = C_B T = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4}, -1, \frac{7}{3}, -3, -5, -10)$$

از این رو با توجه به آن‌چه گفته شد داریم:

$$\begin{aligned}(w_۱, w_۲, w_۳, w_۴) =& (\frac{۷}{۳}, -۳, -۵, -۱۰)s^{-۱}\\ =& (۱, -۱, ۰, ۲)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w_۵, w_۶, w_۷, w_۸, w_۹) =& (-\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۲}, -۲, -\frac{۵}{۴}, -۱)-\\ (۱, -۱, ۰, ۲)PD^{-۱} =& (۰, ۲, ۱, -۱, ۰)\end{aligned}$$

پس بردار w عبارت خواهد بود از:

$$w = (۱, -۱, ۰, ۲, ۰, -۲, ۱, -۱, ۰)$$

۳-۱۸-۲۹ به چه صورتی بقیه‌ی محاسبات را با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه کاری می‌توان انجام داد.

برای محاسبه $\bar{c}_j$ (قیمت نسبی ضرایب) برای متغیر x_j نسبت به پایه B داریم:

$$\bar{c}_j = c_j - wa_j \qquad (j = ۱, \dots, n)$$

اگر تمامی $\bar{c}_j$ها نامنفی باشند، پایه B متناظر یک پایه‌ی بهینه می‌باشد (برای مسأله‌ی ۳-۲۲) متوقف می‌گردیم. در غیر این‌صورت متغیر x_k را با $\bar{c}_k < ۰$ درنظر می‌گیریم. x_k متغیر واردشونده خواهد بود. بردار $\bar{a}_j$ به‌صورت زیر به‌روز می‌گردد:

$$B\bar{a}_j = a_j \tag{۳-۳۳}$$

می‌توان معادله‌ی فوق را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$BT(T^{-۱}\bar{a}_j) = a_j \tag{۳-۳۴}$$

قرار می‌دهیم:

$$\alpha = (\alpha_۱, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+۱}, \dots, \alpha_{p+m}) = T^{-۱}\bar{a}_j$$

که در آن T همان است که قبلاً محاسبه شده است.

$$BT\alpha = a_j$$

$$\begin{pmatrix} PD^{-1} & \vdots & S \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_p & \vdots & 0 \end{pmatrix} \alpha = a_j$$

یعنی:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = (a_{m+1j}, \ldots, a_{m+p}j)$$

و

$$(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+m}) = s^{-1}[(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) - D^{-1}(a_{m+1j}, \ldots, a_{m+pj})]$$

و از آن‌جا:

$$\bar{a}_j = T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+m})$$

با محاسبه‌ی $\bar{a}_j$ اگر $\bar{a}_j \leq 0$، آن‌گاه z در ناحیه شدنی از پائین نامحدود می‌باشد مسأله‌ی ۳-۲۲ بهینه‌ی نامتناهی دارد متوقف می‌گردیم. در غیر این‌صورت با استفاده از قاعده می‌نیمم نسبت متغیر خارج‌شونده به شرح زیر مشخص می‌گردد. فرض کنیم $\bar{b}$ بردار مقادیر متغیرهای اساسی متناظر پایه B باشد. در این‌صورت داریم:

$$\theta = \text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \qquad (۳-۳۵)$$

در این‌صورت x_r متغیر خارج‌شونده خواهد بود. در صورتی‌که r به‌طور منحصر به‌فرد مشخص نگردد؛ می‌توان به دلخواه یکی را انتخاب نمود.

۳-۱۹ به‌روز نمودن مقادیر اساسی

فرض کنید x_B بردار اساسی شدنی متناظر پایه B برای مسأله‌ی ۳-۲۲ باشد و S پایه کاری مستخرج از آن و x_k متغیر واردشونده. فرض کنید σ چنان باشد که S_σ شامل k باشد و p

چنان باشد که $r \in S_p$. از این‌رو متغیر واردشونده از S_σ و متغیر خارج‌شونده از S_p می‌باشد. چندین حالت وجود دارد که بایستی جداگانه بررسی گردد.

حالت اول.

متغیر خارج‌شونده $x_۲$ از متغیرهای کلیدی نمی‌باشد.

در این حالت، ستون خارج‌شونده از پایه B یکی از m ستون آخری B می‌باشد. فرض کنید x_r، g $p+g$ام در x_B باشد. بنابراین ستون x_r در در $p+g$ام ستون B قرار گیرد. این ستون قرار است با ستون x_k جایگزین گردد. (در ۳-۲۲)

فرض کنید B به‌همان صورت قبلی افراز گردیده است. پس:

$$g\text{ام ستون } \begin{pmatrix} R \\ .. \\ Q \end{pmatrix} = \text{ستون خارج‌شونده}$$

$$\begin{pmatrix} a'_k \\ u_k \end{pmatrix} = \text{ستون واردشونده}$$

که در آن $\begin{pmatrix} a'_k \\ u_k \end{pmatrix} = a_k$. و u_k شامل حداکثر یک عضو مخالف صفر می‌باشد (اگر $\sigma \neq ۰$، چون $k \in S_\sigma$، σام عضو u_k غیرصفر می‌باشد. اگر $\sigma = ۰$ در این‌صورت $u_k = ۰$). پایه جدید کاری با جایگزین نمودن gام ستون در S با $a_k - PD^{-۱}u_k$ حاصل می‌گردد. فرض کنید:

$$\begin{aligned} h =& (h_۱, \ldots, h_m)^t \\ =& s^{-۱}(a_k - PD^{-۱}u_k) \end{aligned}$$

از این‌رو، در این‌حالت، عکس پایه کاری می‌توان با وارد نمودن ستون hام سمت راست عکس $S^{-۱}$ و با انجام عمل محوری با ملحوظ داشتن h به‌عنوان ستون محوری و g به‌عنوان سطر محوری.

توجه. توجه داشته باشید در این‌حالت، بردار h، که ستون محوری برای به‌روز نمودن عکس پایه کاری می‌باشد مستقیماً با به‌کاربردن ستون اصلی در ۳-۲۲ محاسبه می‌شود نه با ستون

به‌روز شده متناظر x_k.

۳-۱۹-۳۰ مثال. فرض کنیم $m = 4$ و $p = 5$ و x_B و B همان باشند که در مثال ۳-۱۸-۲۴ بودند. فرض کنید که متغیر x_{10} که متناظر ستون $a_{10} = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 6, 2, 0, 2, 0, 0, 0)$، متغیر واردشونده باشد. واضح است که x_{10} از S_0 نمی‌باشد و از S_2 می‌باشد. (چرا؟). فرض کنید که متغیر خارج‌شونده از پایه x_9 باشد. بردار اساسی جدید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_{B_1} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10})$$

و

$$\begin{aligned}h =&(h_1, h_2, h_3, h_4)\\ =&S^{-1}[(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 6, 2) - PD^{-1}(0, 2, 0, 0)]\\ =&(0, 2, 1, -1)^t\end{aligned}$$

چون متغیر خارج‌شونده، چهارمین متغیر غیرکلیدی در x_B می‌باشد سطر محوری سطر چهارم خواهد بود.

ستون محوری	S^{-1}			
۰	-۱۸۳	۴۸	۳۳	۸۴
۰	$-\frac{127}{3}$	۱۱	۸	۱۹
۱	$-\frac{184}{3}$	۱۶	۱۱	۲۸
$\boxed{-1}$	$\frac{14}{3}$	-۱	-۱	-۲

پس از انجام عمل محوری داریم:

ستون محوری h می‌شود	عکس پایه کاری جدید $=S^{-1}$			
۰	-۱۸۳	۴۸	۳۳	۸۴
۰	$-\frac{127}{3}$	۱۱	۸	۱۹
۱	$-\frac{184}{3}$	۱۶	۱۱	۲۸
۱	$\frac{14}{3}$	-۱	-۱	-۲

ستون محوری پس از انجام عمل محوری حذف می‌گردد.

حالت دوم.

متغیر خارج‌شونده متغیر کلیدی در مجموعه‌ی ضروری است

در این‌حالت، مجموعه‌ی S_p که شامل متغیر خارج‌شونده می‌باشد یک مجموعه‌ی ضروری نسبت به بردار اساسی x_B می‌باشد (چرا S_p مجموعه‌ی ضروری است). متغیر واردشونده x_k از مجموعه‌ی S_σ می‌باشد، و p ممکن است همان σ باشد یا ممکن است σ نباشد. در این‌حالت طبق فرض، مجموعه‌ی S_p، بعضی از متغیرهای غیرکلیدی نسبت به بردار اساسی x_B را دربردارد. به‌روز نمودن عکس ماتریس پایه کاری در این حالت در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در مرحله‌ی اول متغیرکلیدی x_r (متغیر خارج‌شونده) راکه در مجموعه‌ی S_p می‌باشد با متغیر دیگری که در این مجموعه است و غیرکلیدی است عوض می‌کنیم (نسبت به بردار x_B سنجیده می‌شود) پس از مرتب نمودن دوباره، بردار اساسی x_B تبدیل به بردار اساسی $x_{B_\circ}$ می‌گردد. توجه نمائید که مجموعه متغیرهای اساسی در x_B و $x_{B_\circ}$ یکی می‌باشد. اختلاف فقط در ترتیب قرارگرفتن آن‌ها می‌باشد. فرض کنید $B_\circ$پایه متناظر بردار اساسی $x_{B_\circ}$ باشد. مجدداً یادآور می‌شویم که $B_\circ$ از B با تعویض ستون کلیدی pام با یک ستون غیرکلیدی از S_p به‌دست آمده است، که ستون غیرکلیدی، کلیدی شده است. چون ستون‌های اساسی B و $B_\circ$ متفاوت هستند، پایه کاری محاسبه شده از $B_\circ$؛ ممکن است از پایه کاری به‌دست آمده از B متفاوت باشد. در مرحله‌ی اول $S_\circ^{-1}$ از $B_\circ$ را محاسبه می‌نمائیم. در مرحله‌ی دوم، x_r را که اکنون متغیر غیرکلیدی است، جایگزین با متغیر واردشونده می‌نمائیم.

مرحله‌ی اول.

چون x_r ستون کلیدی از S_p می‌باشد، بنابراین pامین ستون B، ستون متغیر x_r در ۳-۲۲ می‌باشد فرض کنیم $p+j_1, \ldots, p+i_f$ تمامی ستون‌های غیرکلیدی S_p در B باشند، به‌علاوه فرض کنیم که در سطر $m+p$ام در ستون‌های p، $p+j_1, \ldots, p+i_f$ به‌ترتیب اعضا عبارت باشند از $d_\circ^p, d_1^p, d_2^p, \ldots, d_f^p$. واضح است که این اعضا، تنها اعضای غیرصفر در سطر $m+p$ام B است. عضوی از ستون‌های غیرکلیدی مجموعه‌ی S_p، از B را انتخاب نمائید، که قرار است آن را با ستون کلیدی S_p عوض شود. فرض کنید این ستون $p+j_1$

باشد. در این مرحله ما می‌خواهیم ستون p و $j_1 + p$ در B را عوض کنیم. ماتریس مقدماتی $m \times m$، T_2 را به‌صورت زیر تعریف نمائید.

$$T_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & \text{ستون} & & \text{ستون} & & \text{ستون} & & \\ & & & j_2 & & j_1 & & j_3 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \vdots & & -\frac{d_2^p}{d_1^p} & \dots & -\frac{d_0^p}{d_1^p} & \dots & -\frac{d_3^p}{d_1^p} & \dots & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس T_2 همان ماتریس یکانی است (یعنی I_m) جز این‌که در سطر j_1 (j_1) عبارت است از ستون غیرکلیدی $j_1 + p$ در ماتریس پایه B که در حال تعویض شدن با ستون کلیدی p می‌باشد. عضو قطری در سطر j_1 از T_2، $(-\frac{d_0^p}{d_1^p})$ می‌باشد. اعضای ستون در سطر j_1 از ماتریس T_2 عبارت هستند از $(-\frac{d_u^p}{d_1^p}) \quad (u = 2, \dots, f)$ تمامی اعضای در T_2 در سطر j_1 برابر صفر می‌باشند.

به سادگی می‌توان ثابت کرد (اثبات نمائید) که بین پایه کاری مستخرج از B که آن‌را S و پایه کاری مستخرج از B_0 که آن را S_0 می‌نامیم رابطه:

$$S_0 = ST_2$$

برقرار است. از این‌رو، اثر تعویض ستون‌های کلیدی و غیرکلیدی در S_p عبارت خواهد بود از جایگزین نمودن S_0^{-1} به‌جای S^{-1} که از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$S_0^{-1} = T_2^{-1} S^{-1}$$

(توجه کنید $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

چون T_2 ماتریس مقدماتی است به سادگی می‌توان ثابت کرد (ثابت کنید که عکس ماتریس T_2 بدین‌صورت به‌دست می‌آید که تمامی اعضای سطر j_1 (جز عضو قطر محوری) را به منفی عکس عضو قطری تقسیم نمائیم.)

۳-۱۹-۳۱ مثال. فرض کنید $m = 4$ و $p = 5$ و x_B بردار مثال**۳-۱۸-۲۴** می‌باشد. فرض کنید متغیر x_{10} قرار است وارد بردار x_B شود و جایگزین x_1 گردد. متغیر x_1 در مجموعه‌ی S_1، متغیر کلیدی است و متغیرهای x_6 و x_7 متغیرهای غیرکلیدی در x_B می‌باشد که از مجموعه‌ی S_1 آمده‌اند. در این‌حالت ابتدا متغیر x_1 را متغیر غیرکلیدی می‌نمائیم و x_6 یا x_7 را به عنوان متغیر کلیدی در S_1 معرفی می‌کنیم. فرض کنید x_7 را به عنوان متغیر کلیدی معرفی می‌نمائیم (در مجموعه‌ی S_1) پس از مرتب نمودن مجدد بردار اساسی x_B به‌صورت زیر خواهد بود :

$$x_B = (x_7, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_8, x_9)$$

که متناظر پایه B_0 می‌باشد و بدین‌صورت به‌دست آمد که ستون‌های اول و هفتم را عوض نمودیم. عکس S^{-1}، یعنی عکس پایه کاری با انتخاب اصلی از متغیرهای کلیدی در x_B که در مثال**۳-۱۸-۲۴** صورت گرفته بود به‌دست آورده شد. ماتریس مقدماتی T_2 به‌صورتی که در بالا تعریف شد، برای تعویض x_1 با x_7 ذیلاً داده شده است. عکس S_0 پایه کاری متناظر B_0 نیز آورده شده است:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0^{-1} = T_2^{-1} S^{-1} = \begin{bmatrix} 84 & 33 & 48 & -183 \\ -\frac{54}{3} & -7 & -10 & 39 \\ 26 & 10 & 15 & -\frac{170}{3} \\ 2 & 1 & 1 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

و بدین‌صورت مرحله‌ی اول در این عمل محوری تکمیل می‌گردد.

مرحله‌ی دوم.

متغیر خارج‌شونده متغیر اساسی در مجموعه‌ی ضروری است

طبق قضیه‌ی قبل هر بردار اساسی ۳-۲۲ بایستی حداقل یک متغیر از هر یک از مجموعه‌های s_t $(1 \leq t \leq p)$ بایستی داشته باشد. چون متغیر خارج‌شونده x_r تنها متغیر اساسی از s_p می‌باشد (در بردار اساسی x_B) متغیر واردشونده x_k نیز بایستی از S_p باشد، چه در غیراین‌صورت با جایگزین نمودن x_r با x_k، x_B بردار اساسی ۳-۲۲ نخواهد بود (چرا؟) از این‌رو S^{-1} یعنی عکس پایه کاری بدون تغییر باقی می‌ماند.

پس از این‌که بردار اساسی، جواب اساسی، عکس ماتریس پایه کاری به‌روز گردیدند، عملیات تا خاتمه الگاریتم صورت می‌پذیرد.

۳-۲۰ برتری GUB نسبت به روش سیمپلکس اصلاح شده

بیشترین کوشش در مراحل الگاریتم سیمپلکس، به‌روز نمودن عکس پایه کاری می‌باشد. برای حل مسأله ۳-۲۲ با سیمپلکس اصلاح شده معمولی، مجبوریم که پایه کاری از مرتبه‌ی $m+p$ داشته باشیم. GUBT ما را قادر می‌سازد که با یک پایه کاری از مرتبه‌ی m سروکار داشته باشیم. از این‌رو حل مسأله ۳-۲۲ با GUBT از نظر محاسبات بسیار کاراتر است.

روش‌هائی که در LPها از ساختار حاصل آن‌ها در جهت تقلیل محاسبات و کارا نمودن عملیات، استفاده می‌نماید و با نگه‌داشتن عکس پایه کاری کوچک، راندمان کار را بالا می‌برد روش‌های فشرده معکوس[1] نام دارد. GUBT یکی از این روش‌ها می‌باشد. زمینه‌ای که روش‌ها در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مربوطه از ساختار حاصل مسأله استفاده می‌نمایند. (ساختار حاصل مربوط به ساختار ماتریس ضرایب یا ماتریس تکنولوژی می‌باشد). تحت عنوان برنامه‌ریزی خطی ساختاری[2] نامیده می‌شوند. جهت مطالعه بیشتر در این زمینه به منابع () مراجعه شود.

1) Copact Inverse Method 2) Structured Linear Programming

۳-۲۰-۳۲ خلاصه فصل سوم. در این فصل ابتدا روش سیمپلکس اصلاح شده بیان گردید که خلاصه آن به شرح ذیل است

قدم اولیه. یک جواب اساسی شدنی به‌دست آورید و فرض کنید B متناظر آن و B^{-1} در دست باشد. w را از رابطه:

$$w = c_B B^{-1}$$

محاسبه نمائید و قرار دهید $\bar{b} = B^{-1}b$ و جدول سیمپلکس اصلاح شده زیر را تشکیل دهید.

w	$c_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

قدم اصلی. برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه کنید.

$$z_j - c_j = wa_j - c_j \qquad (j \in N_B)$$

$$z_k - c_k = \underset{j\in NB}{\text{Max}}\{z_j - c_j\}$$

اگر $z_k - c_k \leq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول بهینه می‌باشد در غیراین‌صورت:

$$\bar{a}_k = B^{-1}a_k$$

اگر $\bar{a} \leq 0$ در این‌صورت مسأله بهینه نامتناهی دارد. اگر $\bar{a}_k \nleq 0$ ستون $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ در سمت راست جدول مذکور قرار دهید که منجر به وجود آمدن جدول زیر می‌گردد.

w	$c_B\bar{b}$	$z_k - c_k$
B^{-1}	$\bar{b}$	$\bar{a}_k$

از رابطه‌ی ذیل اندیس متغیر و در نتیجه متغیر خارج‌شونده را مشخص نمائید.

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \;\middle|\; \bar{a}_{ik} > 0\right\}$$

با انجام عملیات محوری این جدول را به‌روز نمائید و ستون اضافه شده x_k را کاملاً حذف نمائید و عملیات را تکرار کنید.

توجه شود که کدهای کامپیوتری عکس ماتریس را به‌صورت حاصل‌ضرب بردارهای حاصل محاسبه می‌نماید. (متن فصل ملاحظه گردد)

سیمپلکس اصلاح شده توسط پروفسور جرج دانتزیگ و یکی از شاگردان وی به‌نام wolf ابداع شد.

روش دیگری از واریانت‌های سیمپلکس که سیمپلکس دوآل نامیده می‌شود، توسط Lemke ابداع شد (۱۹۵۴). این روش کاربردهای بسیار زیادی دارد، که یک نمونه از آن در برش صفحه در برنامه‌ریزی کسری می‌باشد و خلاصه این روش به شرح ذیل است.

خلاصه روش سیمپلکس دوآل. **قدم اولیه.** یک پایه مانند B بیابید که بازاء هر j $z_j - c_j \leq 0$ یعنی پایه دوآل شدنی باشد (روش پیدا نمودن چنین پایه‌ای در این فصل با دقت گفته شد).

قدم اصلی.

۱) اگر $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول جواب بهینه است. در غیراین‌صورت سطری مانند r انتخاب نمائید که $\bar{b}_r < 0$ روش انتخاب معمولاً به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{b}_r = \mathrm{Min}\{\bar{b} : \ | \ \bar{b}_i < 0\}$$

۲) اگر $\bar{a}_{rj} \geq 0$ (بازاء هر j) متوقف شوید. در این حالت دوآل نامحدود و پرایمال نشدنی است. در غیر این‌صورت ستون kام را به عنوان ستون محوری طبق فرمول زیر انتخاب نمائید:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \mathrm{Min}\left\{\frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \ | \ \bar{a}_{rj} < 0\right\}$$

۳) با ملحوظ داشتن عضو محوری $\bar{a}_{rk}$، عملیات محوری را انجام دهید و به (۱) در قدم اصلی برگردید.

الگاریتم دیگری که در این فصل بیان گردید، الگاریتم پرایمال-دوآل بود. این الگاریتم به‌وسیله‌ی دانتزیگ و فورد[۱] و فولکرسون[۲] ابداع شد (۱۹۵۶). الگاریتم پرایمال - دوآل با کار کوهن که در سال ۱۹۵۵ در رابطه با مسأله‌ی تخصیص صورت گرفته بود پرورانده و تکمیل شد. این روش هم از نظر تئوری و هم از نظر کاربردی بسیار ارزنده است. خلاصه این روش ذیلاً آورده می‌شود.

۳-۲۰-۳۳ خلاصه الگاریتم پرایمال - دوآل.

قدم اولیه.

بردار w را چنان انتخاب کنید که بازاء هر j :

$$wa_j - c_j \leq 0$$

قدم اصلی.

۱) فرض کنید

$$Q = \{j \mid wa_j - c_j = 0\}$$

مسأله‌ی زیر را که معروف به مسأله‌ی پرایمال محدود[۳] شده است را حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j\in Q} 0\, x_j + 1 x_a \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ & x_j \geq \qquad j \in Q \\ & x_a \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x° مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد.

1) Ford 2) Fulkerson 3) Reslicted Primal

اگر $x^\circ = \circ$، در این صورت جواب حاصل از حل مسأله‌ی فوق در شرایط K.K.T صدق می‌کند؛ در نتیجه جواب بهینه می‌باشد (یعنی جواب بهینه‌ی مسأله‌ی محدود شده، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی می‌باشد).

اگر $x_\circ > \circ$، فرض کنیم v^* جواب بهینه‌ی دوآل مسأله محدود شده پرایمال فوق‌الذکر باشد.

۲) اگر $v^* a_j \leq \circ$ (بازاء هر j) متوقف شوید. در این‌صورت دوآل نامحدود است و پرایمال نشدنی می‌باشد. در غیراین‌صورت قرار دهید:

$$\theta = \operatorname*{Min}_j \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^* a_j} \mid v^* a_j > \circ \right\}$$

و جایگزین کنید w را با $w + \theta v^*$. برگردید به قدم اول.

۳-۲۱ تمرینات فصل سوم

۱) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & Z = & & -۲x_۲ & +x_۳ & & \\
\text{s.t.} & & x_۱ & -۲x_۲ & +x_۳ & \geq & -۴ \\
& & x_۱ & +x_۲ & +x_۳ & \leq & ۹ \\
& & ۲x_۱ & -x_۲ & -x_۳ & \leq & ۵ \\
& & x_۱ & ,x_۲ & ,x_۳ & \geq & \circ
\end{array}$$

۲) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & x_۱ & +۶x_۲ & -۷x_۳ & +x_۴ & +۵x_۵ & & \\
\text{s.t.} & x_۱ & -\frac{۱}{۴}x_۲ & +۲x_۳ & -\frac{۱}{۴}x_۴ & & = & ۵ \\
& & -\frac{۱}{۴}x_۲ & +۳x_۳ & -\frac{۳}{۴}x_۴ & +x_۵ & = & ۵
\end{array}$$

$$x_j \geq \circ \quad j = ۱, \ldots, ۵$$

۳) در سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل‌ضربی عکس ماتریس، تعداد ماتریس‌های مقدماتی در هر مرحله از تکرار یک واحد اضافه می‌گردد. اگر تعداد ماتریس‌های مقدماتی

زیاد شود، ضرورت دارد که عکس ماتریس به‌خاطر جلوگیری از جمع شدن خطا، دوباره محاسبه گردد. فرض کنید B پایه‌ای در مرحله‌ای از الگاریتم سیمپلکس باشد، نشان دهید که B را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب m ماتریس مقدماتی نشان داد. مطلب را با یک مثال توضیح دهید.

۴) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده که عکس ماتریس به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی باشد حل نمائید (یعنی $B^{-۱}$ به‌صورت حاصل‌ضربی داشته باشد).

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\text{Min} & Z = & ۳x_۱ & +۴x_۲ & +x_۳ & +x_۴ & \\
 & & ۸x_۱ & +۳x_۲ & +۴x_۳ & +x_۴ & \leq ۷ \\
 & & ۲x_۱ & +۶x_۲ & +x_۳ & +۵x_۴ & \leq ۳ \\
 & & x_۱ & +۴x_۲ & +۵x_۳ & +۲x_۴ & \leq ۸ \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_j \geq ۰ \quad j = ۱, ۲, ۳, ۴}
\end{array}
$$

مسأله‌ی فوق را مجدداً حل کنید و در آن فاکتوزیشن-LU [1] برای پایه استفاده نمائید.

۵) فرض کنید $C = (c_۱, \ldots, c_n) \in R^n$ مسأله‌ی زیر با یک روش کارا حل کنید.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & Z(x) = \text{Max}\{c_j \mid x_j > ۰\} \\
\text{s. t.} & Ax = b \\
 & x \geq ۰
\end{array}
$$

1) LU-Factorization of the basic

۶) با به‌کاربردن الگاریتم سیمپلکس متغیرهای کران‌دار مسائل زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 12 \\ & -x_1 & +x_2 & & \leq 5 \end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 6$$

$$0 \leq x_3 \leq 6$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 \leq 6 & \\ & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 8 \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & \geq 2 \end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$1 \leq x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

$$2 \leq x_4 \leq 5$$

۷) چگونه می‌توان، الگاریتم سیمپلکس اصلاح شده را برای متغیرهای کران‌دار در LP

به‌کاربرد؟ مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کران‌دار زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{llrrl} \text{Max} & Z = & x_1 & -x_2 & \\ \text{s.t.} & & -x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 1 \end{array}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

الف. ناحیه‌ی شدنی را در صفحه (x_1, x_2) رسم کنید. جواب بهینه را به‌دست آورید. آیا این جواب تبه‌گن است؟ چرا هست یا چرا نیست؟

ب. برای نقطه‌ی رأسی $(x_1, x_2) = (1, 1)$ پایه کاری B را مشخص نمائید، جدول سیمپلکس مربوطه را تشکیل دهید، B^{-1} و $c_B B^{-1}$ را نیز در جدول مشخص کنید، مقادیر متغیرهای اساسی را به‌دست آورید و کار را تا به‌دست آوردن جواب بهینه از روی جدول ادامه دهید.

ج. مقادیر سمت راست دو قید را به b_1 و b_2 نشان دهید. چه شرایطی بایستی b_1 و b_2 داشته باشند تا جواب بهینه، بهینه باقی بماند.

۸) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

(l متناهی است) نشان دهید مجموعه‌ی نقاط رأسی ناحیه‌ی شدنی (با فرض خالی نبودن آن) مساوی مجموعه‌ی BFSهای مسأله است.

۹) برای برنامه‌ریزی خطی متغیرهای کران‌دار، چه رابطه‌ای بین افراز اساسی شدنی (Basic Feasible Partition) (B, N_1, N_2) و نقاط رأسی وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین

جواب اساسی مجاور و نقاط رأسی مجاور موجود است؟ (هم برای حالت تبهگنی و هم غیرتبهگنی مطلب بیان شود).

۱۰) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{aligned}$$

نشان دهید تعریفی که در رابطه با متغیرهای کران‌دار در متن فصل برای نقطه رأسی داشتیم با تعریف نقطه‌ی رأسی دستگاه:

$$\begin{aligned} & x + x_s = u \\ & x \geq 0, x_s \geq 0 \end{aligned}$$

معادل می‌باشد.

۱۱) نشان دهید در جزئیات که الگاریتم سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار، یک الگاریتم متقارب (در حالت غیرتبهگنی) می‌باشد. با جزئیات نشان دهید که مسأله در حالت تبهگنی با به‌کاربردن روش لکزیکو برای متغیرهای کران‌دار افراز اساسی شدنی قوی را حفظ می‌کند.

۱۲) قاعده‌ی بلند (Bland) را برای LP با متغیرهای کران‌دار، چگونه می‌توان به‌کاربرد. مطلب را با جزئیات توضیح دهید.

۱۳) روش بلند و لکزیکو را جهت جلوگیری از به‌دور افتادن برای مسأله زیر بیان نمائید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 \le 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & 0 \le x_1 \le 1 \ , \ 0 \le x_2 \le 3 \end{aligned}$$

۱۴) الف. مسأله زیر را (مسأله کوله‌پشتی) حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 + 7x_5 \le 100 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

ب. یک فرم کلی برای حل مسأله‌ی زیر پیشنهاد نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \ge b \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

که در آن c_jها و a_jها اعداد مثبتی می‌باشند.

ج. صورت جواب بهینه مسأله‌ی فوق اگر a_jها و c_jها هر عدد حقیقی باشند چیست؟

د. مسأله را برای حالت ب و ج در حالتی‌که متغیرها کران‌دار باشد حل نمائید.

۱۵) فرض کنید $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ و $P_i \subset Q$ که

$$P_i \cap P_j = \phi \qquad (i = 1, \ldots, r) \qquad i \ne j$$
$$(j = 1, \ldots, r)$$

و

$$\bigcup_{i=1}^{r} P_i = Q$$

یک روش کارا برای حل مسأله‌ی زیر، که در آن $c_j \leq 0$ (بازاء هر j) به‌دست آورید.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{j \in Q} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & b'_0 \leq \sum_{j \in Q} x_j \leq b''_0 \\
& b'_i \leq \sum_{j \in P_i} x_j \leq b''_i \qquad i = 1, \ldots, r \\
& 0 \leq x_j \leq u_j \qquad j \in Q
\end{aligned}$$

روش به‌دست آمده را در رابطه با مسأله‌ی زیر به‌کاربرید.

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Max} & & 10x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +8x_5 & & \\
\text{s.t.} & 30 & \leq x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & 100 \\
& 2 & \leq x_1 & +x_2 & & & & \leq & 50 \\
& 70 & \leq & & x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & 80
\end{array}$$

$$0 \leq x_1, x_4, x_5 \leq 30$$

$$0 \leq x_2, x_3 \leq 25$$

۱۶) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار حل نمائید.

$$\begin{array}{llllllll} \text{Min} & 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & -4x_4 & +x_5 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & +x_5 & =10 \\ & 3x_1 & +8x_2 & -3x_3 & +x_4 & & =7 \end{array}$$

$$0 \le x_1 \le 3$$

$$1 \le x_2 \le 4$$

$$0 \le x_3 \le 8$$

$$1 \le x_4 \le 2$$

$$0 \le x_5 \le 20$$

۱۷) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 - x_3 \le -12 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -6 \\ & 2x_1 - x_2 - 4x_3 \le -24 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

فرض کنید x_a یک متغیر تصنعی با بردار فعالیت $\hat{b} < b$ باشد. با معرفی قید $0 \le x_a \le 1$ و با قرار دادن $x_a = 1$ یک جواب اساسی شدنی (شروع‌کننده) برای دستگاه جدید به‌دست می‌آید. با به‌کاربردن روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی اصلی بیابید.

۱۸) مسائل زیر را با روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار حل نمائید.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 - 2x_2 \le 0 \\ & x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 4 \end{array}$$

۱۹) نشان دهید که دو مسأله‌ی زیر معادل هستند.

$$\begin{array}{lll} P_1: & \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & b_1 \leq Ax \leq b_2 & \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} P_2 & \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & & Ax + s = b_2 \\ & & x \geq 0 \\ & & 0 \leq s \leq b_2 - b_1 \end{array}$$

با به‌کاربردن این مطلب مسأله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} & 3 \leq x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -15 \leq 2x_1 - 5x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

۲۰) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید B پایه‌ای باشد. پس از افزودن قیود زاید $x_N - x_N = 0$ معادلات زیر نمایش تمامی متغیرهای برحسب متغیرهای مستقل x_N خواهد بود.

z	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$
x_B	$B^{-1} N$	$\bar{b}$
x_N	$-I$	0

روش سیمپلکس با انتخاب مثبت‌ترین $z_j - c_j$ مثلاً $z_k - c_k$ پیش می‌رود. با وارد شدن x_k به پایه و با به‌کاربردن قاعده‌ی می‌نیمم، فرض کنیم x_{B_r} پایه را ترک می‌کند. آرایه‌های فوق‌الذکر را با انجام عمل محور ستونی با عضو محوری $\bar{a}_{rk}$ به‌صورت زیر به‌روز می‌نمائیم.

۱ـ ستون kام را به $-\bar{a}_{rk}$ تقسیم می‌کنیم (ستون محوری را).

۲ـ ستون kام (ستون محوری) را در عدد $\bar{a}_r j$ ضرب و به ستون jام بیفزائید.

۳ـ ستون kام را در $\bar{b}_r$ ضرب و به سمت راست اضافه کنید.

۴ـ متغیر x_k را از لیست متغیرهای غیراساسی خارج و x_{Br} را به لیست متغیرهای اساسی اضافه نمائید(به‌جای متغیراساسی x_{Br}).

توجه کنید که هیچ طرح سطری عوض نمی‌شود.

این روش از نمایش جدول و به‌روز نمودن آن، به روش سیمپلکس ستونی[1] معروف است. نشان دهید عمل محوری نمایش تمامی متغیرها را برحسب متغیرهای غیراساسی به‌دست می‌دهد. به‌خصوص ثابت کنید که عمل محوری فوق‌الذکر $c_B B^{-1} N - c_N$ و $B^{-1} N$ و $B^{-1} b$ و $c_B B^{-1} b$ را به‌روز می‌نماید.

1) Column Simplex Method

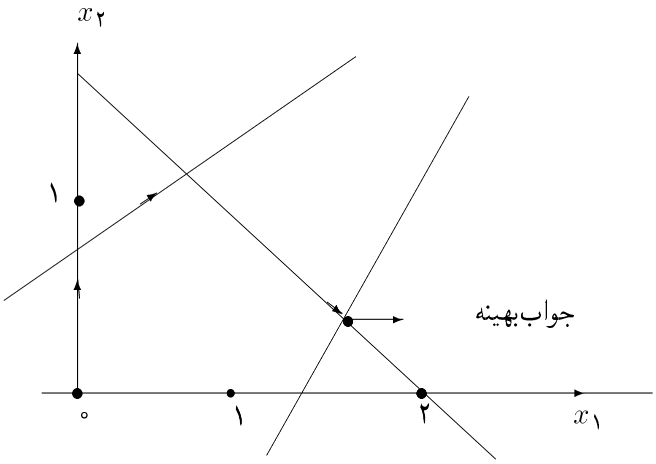
۲۱) با درنظر گرفتن مطالب مطرح شده در مسأله قبل مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس ستونی حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \\ \text{s.t.} \quad & ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ \leq ۶ \\ & -x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۸ \\ & ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ \leq ۲ \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

۲۲) با توجه به مطالب مطرح شده در مسأله‌ی ۲۰ آیا ممکن است عکس ماتریس پایه را از جدول سیمپلکس ستونی به‌دست آورد؟ اگر چنین است، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۳) دولت می‌خواهد ۱/۵میلیارد دلار برای مقاصد نظامی خرج نماید. شصت درصد از بودجه جهت خرید تانک، هواپیما و موشک صرف خواهد شد، که قیمت آن‌ها به‌ترتیب ششصد هزار دلار، ۲ ملیون دلار و هشتصد هزار دلار می‌باشد. تصمیم گرفته شده که حداقل ۲۰۰ تانک و ۲۰۰ هواپیما خریداری گردد. به‌خاطر نبود خلبان ماهر نمی‌توان بیش از ۳۰۰ هواپیما خریداری نمود. از نظر استراتژی نسبت موشک به هواپیما بایستی در بازه $[\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}]$ باشد. دولت می‌خواهد توانائی نظامی خود را با خرید این تسلیحات ماکزیمم نماید. با توجه به این‌که بهره‌وری آن‌ها به‌ترتیب ۱ و۳ و۲ است. جواب بهینه را بیابید.

۲۴) ذیلاً یک ایده گرافیکی از روش سیمپلکس در حمل به تصویر کشیده شده است.



الف. پایه و پایه‌های بعدی تا نقطه‌ی بهینه مشخص نمائید.متغیر واردشونده و خارج‌شونده را در هر مرحله تعیین کنید.

ب. اگر جواب بهینه منحصربه‌فرد باشد، آیا روش سیمپلکس در مراحل طی شده مثبت‌ترین $z_j - c_j$ را انتخاب نموده است؟

۲۵) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq ۰ \end{array}$$

فرض کنید x یک جواب اساسی شدنی متناظر پایه B باشد. روش سیمپلکس با افزایش متغیر غیراساسی که بیشترین $z_j - c_j$ را دارد پیش می‌رود.

الف. روشی ارائه نمائید که در آن روش تمامی متغیرهای غیراساسی که $z_j - c_j$ آن‌ها مثبت است افزایش داده شوند. چگونه متغیرهای اساسی در این‌صورت تعدیل می‌گردند؟ چقدر می‌توان متغیرهای غیراساسی را افزایش داد؟ تفسیر افزایش همزمان متغیرهای غیراساسی چیست؟

ب. در تکراری، ممکن است، بیش از m متغیر مثبت موجود باشد، چگونه می‌توانید

نقطه متناظر را در جدول نشان دهید؟

ج. در تکراری ممکن است متغیر غیراساسی x_j مقدار مثبت و $z_j - c_j$ منفی داشته باشد. چه اتفاقی می‌افتد اگر متغیر غیراساسی را کاهش دهید؟

د. با به‌کار بردن مطالبی که در بندهای (الف) تا (ج) مطرح گردید الگاریتم کاملی برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که در آن چندین متغیر غیراساسی همزمان تعدیل می‌گردند، طراحی نمائید. چگونه می‌توانید بگوئید که به جواب بهینه رسیده‌اید؟ امتیاز یا عدم امتیاز این روش چه می‌باشد. مطلب را با حل مسأله‌ی زیر توضیح دهید:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Min} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 12 \\
 & x_1 & +2x_2 & & \leq & 6 \\
 & x_1 & & +x_3 & \leq & 8 \\
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ه. روش ذیل را برای تعدیل متغیرهای غیراساسی درنظر بگیرید. برای هر متغیر غیراساسی x_j، فرض کنید:

$$d_j = \begin{cases} z_j - c_j & \text{اگر } x_j > 0 \\ \text{Max}\{0, z_j - c_j\} & \text{اگر } x_j = 0 \end{cases}$$

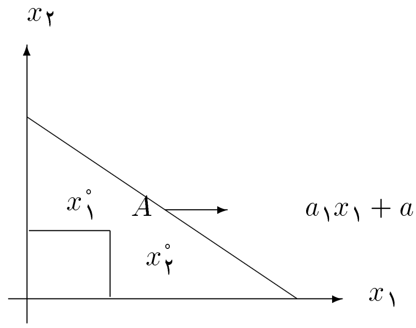
متغیرهای غیراساسی را بر طبق dهای فوق و اساسی‌ها را طبق رابطه:

$$x_B = \hat{b} - \lambda \sum_{j \in R} \bar{a}_j d_j$$

تعدیل نمائید، که در آن $\hat{b}$ بردار مقادیر متغیرهای اساسی و $\lambda \geq 0$ بایستی مشخص گردد. این روش را تفسیر نموده و آن را با روش قسمت (د) مقایسه نمائید. مسأله‌ی (*) را با این روش نیز حل نمائید.

۲۶) نمودار ذیل نمایش ناحیه‌ای است که به‌وسیله‌ی قید $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ و $x_1, x_2 \geq 0$

مشخص گردیده است. فرض کنید $A(x_۱^\circ, x_۲^\circ)$ نقطه‌ای باشد که در شکل نشان داده شده است.



در این نقطه (نقطه A) مقدار متغیر کمکی را مشخص نمائید. چگونه می‌توان مسأله را برای حالتی با n متغیر تعمیم داد؟

۲۷) کشاورزی دارای مرغداری است که او در رابطه با تهیه خوراک آن‌ها علاقمنداست از کیفیتی برخوردار باشد که در جدول زیر اطلاعات مربوط به آن‌ها آمده است.

	اجراء خوراک			
	ذرت	پودر ماهی	آلفاآلفا	حداقل موردنیاز
پروتئین	۸	۴	۴	۱۰
کربوهیدرات	۴	۲	۴	۶
ویتامین	۲	۳	۴	۵
قیمت	$۰/۱$ \$	$۰/۰۶$ \$	$۰/۰۴$ \$	

مخلوط بهینه را با به‌کاربردن سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل‌ضربی عکس ماتریس مشخص نمائید. فقط یک متغیر تصنعی به‌کاربرید.

۲۸) یک کارخانه اتومبیل‌سازی قرارداد بسته است که ۴۰۰ دستگاه اتومبیل از مدل A و ۵۰۰ دستگاه اتومبیل از مدل B را به خارج ازکشور صادر نماید. اتومبیل مدل A ۱۲ مترمکعب و اتومبیل مدل B، ۱۵ مترمکعب جا اشغال می‌نماید. سه کشتی برای حمل اتومبیل‌ها به خارج ازکشور در اختیار می‌باشند. این کشتی‌ها در ابتدای ژانویه، اواسط

فوریه و اواخر ماه مارس وارد بندر می‌شوند. کشتی اول فقط اتومبیل از نوع مدل A را حمل می‌کند و هزینه حمل هر اتومبیل ۴۵۰$ می‌باشد. کشتی دومی و سومی هر دو نوع مدل را حمل می‌کنند که هزینه حمل آن‌ها برای هر مترمکعب جای(فضا) اشغال شده به‌ترتیب ۳۵$ و ۴۰$ می‌باشد کشتی اول فقط می‌تواند ۲۰۰ اتومبیل حمل نماید و فضای کشتی دوم و سوم برای حمل بار به‌ترتیب ۴۵۰۰ و ۶۰۰ مترمکعب می‌باشد. اگر سازنده در قرارداد طی نموده باشد که حداقل ۲۵۰ اتومبیل از نوع مدل A و ۲۰۰ اتومبیل از نوع مدل B برای اواسط فوریه و بقیه را در اواخر مارس تحویل دهد، طرح تحویل اتومبیل بایستی چگونه باشد؛ که هزینه کلی می‌نیمم گردد. با به‌کاربردن روش سیمپلکس اصلاح شده، جواب بهینه مسأله را به‌دست آورید.

۲۹) یک کمپانی مایل است برنامه تولید محصول خود را برای ماه‌های آگست، سپتامبر، اکتبر ونوامبر مشخص نماید. محصول تولید شده فصلی می‌باشند و تقاضا برای این محصول برای ماه‌های مذکور به‌ترتیب عبارت است از ۵۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰، ۱۲۰۰ واحد. ظرفیت فعلی کارخانه ماهیانه ۶۰۰ واحد به قیمت هر واحد ۲۵ دلار می‌باشد. مدیریت تصمیم گرفته است که یک دستگاه جدیدی جهت تولید محصول با ظرفیت ماهیانه ۱۱۰۰ واحد و با هزینه تولید ۳۰ دلار برای هر واحد نصب نماید. به‌هرحال دستگاه جدید تا اواسط نوامبر قابل نصب نمی‌باشد. فرض کنیم که شروع تولید با ۲۵۰ واحد موجودی باشد و ظرفیت ذخیره‌سازی ۴۰۰ واحد در ماه. اگر هزینه ذخیره‌سازی (نگهداری کالا[1]) ۳ دلار برای هر واحد باشد، خط‌مشی بهینه تولید را به‌صورتی مشخص نمائید که هزینه کلی تولید برای تحویل تقاضا می‌نیمم گردد. با فرض این‌که در انتهای کار ۱۰۰ واحد کالا در انبار موجود باشد. با به‌کاربردن سیمپلکس اصلاح شده برای متغیرهای کران‌دار مسأله را حل نمائید. جزئیات حل را در هر مرحله توضیح دهید.

1) Holding Cost

مراجع

[1] G.B.Dantizing,"Computational Algorithm of the Revised Simplex Method,"RM-1266, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.

[2] G.E.Forsythe and C. B. Moler, Computer Solutions of Linear Algebraic Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

[3] A. M. Frieze, "Bottleneck Linear Programming,"Operational Research Quarterly 26, 4, ii (1975), 871-874.

[4] W. Orchard-Hays,"Background, Development and Extensions of the Revised Simplex Method,"RM-1433, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif. 1954.

[5] G. M. Roodman, "Post-Infeasibility Analysis in Linear Programming, "Management Science 25, 9 (September 1979), 916-922.

[6] D. M. Smith and W. Orchard-Hays, "Computational Efficiency in Product Form LP Codes,"in Recent Advances in Mathematical Programming, R. L. Graves and P. Wolfe (Ed.), McGraw-Hill, New York, 1963.

[7] H. M. Wagner, "A Comparison of the Original and Revised Simplex Methods,"Operations Research 5 (1957), 361-369.

[8] D. Gale The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York, 1960. D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, Computational Methods of Linear Algebra, Freeman San Francisco, Calif. 1963.

[9] P. R. Halmos, Finite Dimensional Vector Spaces, D. Van Nostrand, New York, 1969

[10] C. R. Bector, “Programming Problems with Convex Fractional Function, ”Opetations Re-search 16, 1968, pp. 383-391.

[11] A. Charnes and W. W. Cooper, “Nonlinear Power of Adjacent Extreme Point Methods in Linear Programming,”Econometrica 25, 1956, pp. 132-153.

[12] A. Charnes and W. W. Cooper, “Programming with Linear Fractional Functionals,”Naval Research Logistics Quarterly 9, 1962, pp. 181-186.

[13] J. B. J. Fourier, Memoires de L’acaemie Royale des Sciences de I’institutee de France 7, 1824, pp. XIVII-IV; also, Second Extrait in G. Darboux (Ed.) Oeuvres de Fourier 2, 1890, pp. 324-328.

[14] A. J. Goldman, “Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets”in Linear Inequalities and Related Systems, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[15] I. Grattan-Guinness, “Joseph Fourier’s Anti-cipation of Linear Programming,”Operational Research Quarterly 21, 3, 1970, pp. 361-364. B. Grunbaum, Convex Polytopes, Wiley, New York, 1967.

[16] D. A. Kohler, “Translation of a Report by fourier on His Work on Linear Inequalities,”OPSEARCH 10, 1973, pp. 38-42, M.

Manas and J. Nedoma, "Finding all Vertices of a Convex Polyhedron,"Numerische Mathematic 12. 1968, pp. 226-229.

[17] T. H. Matheiss and D. S. Rubin, "A Survey and Comparison of Methods for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets,"Mathematics of Operations Research 5, 2 May 1980, 167-185.

[18] P. G. McKeown, "A Vertex Ranking Procedure for Solving the Linear Fixed Charge Problem,"Operations Research 23, 6, 1975, pp. 1183-1191.

[19] C. B. Millham, "Fast Feasibility Methods for Linear Programming,"OPSEARCH 13, 3-4, 1976, pp, 198-204.

[20] K. G. Murty, "Solving the Fixed Charge Problem by Ranking the Extreme Points,"Operations Research 16, 1968, pp. 268-279.

[21] K. G. Murty, "Adjacency on Convex Polyhedra, "SIAM Review 13, 3 (July 1971), 377-386.

[22] H. Raiffa, G. l. Thompson, and R. M. Thrall, "The Double Description Methos,"in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics study No. 28, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.

[23] D. S. Rubin, "Neighboring Vertices on convex Polyhedral Sets,"Graduate School of Busi

[24] B. Noble and J. W. Daniel, Appled Linear Algebra, 2nd Ed.,Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.

[25] D. I. Steinberg, Computational Matrix Algebra, McGraw-Hill, New York, 1974.

[26] R. M. Thrall and L. Tornheim, Vector Spaces and Matrices, Wiley, New York, 1957. R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Prentics-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[27] I. Adlter, "Equivalent Linear programs, "Dept of IE & OR, University of California, Berkeley, 1976.

[28] M. L. Balinski, "An Algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets, "SIAM Journal on Applied Mathematics IX, 1961, pp. 72-88.

[29] C. A. Burdet, "Generating all the Faces of a Polyhedron, "SIAM Journal on Applied Mathematics XXVI, 1974, pp. 479-489.

[30] N. V. Chernikova, "Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Equations, "U. S. S. R. Computational Mathematics and Mathematical Physics IV, No. 4, 1964, pp. 151-158.

[31] N. V. Chernikova, "Algorithm for Finding a Generak Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Inequalities,"U. S. S. R. Computational Mathematics and Mathematical Physics V, no. 2, 1965, pp. 228-233.

[32] G. B. Dantizig and B. C. Eavas, "Fourier-Motzkin Elimination and its Dual," Journal of Combinatorial Theory, Series A XIV 1973, pp. 228-237.

[33] R. J. Duffin, "On Fourier's Analysis of linear Inquality Systems," Mathematical Programming Study 1, Elsevier, New York, 1974. M. E. Dyer and L. G. Proll, "An Algorithm for Determining all Extreme Points of a Convex Polytops," Mathematical Programming 12, 1977, pp. 81-96.

[34] U. Eckhardt, "Theorems on the Dimension of Convex Sets," Linear Algebra and Its Applications 12, 1975, pp. 63-76.

فصل چهارم

تحلیل حساسیت در برنامه‌ریزی خطی[1]

۴-۱ مقدمه

فرض کنید یک مسأله‌ی عملی را به‌صورت زیر فرموله نموده باشیم

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه‌ی m باشد. مسأله را با الگاریتم سیمپلکس حل می‌نمائیم و جواب بهینه شدنی برای مسأله به‌دست می‌آوریم. در مسائل حقیقی زندگی ضرایب A، c و b، با مشاهدات عملی تقریب زده می‌شوند. پس از این‌که جواب بهینه نهائی به‌دست آمد، ممکن است معلوم گردد که اعضای A، b و c بایستی عوض شوند و یا این‌که قید اضافی

1) Sensitive Analysis in Liner Programming

به مسأله افزوده گردد، یا متغیر جدیدی به مسأله معرفی شود. حل مسأله از ابتدای کار، باعث تلف شدن وقت می‌گردد و کار از راندمان خوبی برخوردار نخواهد بود. **تحلیل حساسیت** (**تحلیل پس از بهینگی** نیز نامیده می‌شود) در جهت به‌دست آوردن جواب بهینه شدنی برای مدل تعدیل یافته (**مدل تعدیل** یافته مدلی است که در آن بعضی از اعضای A، b و c تغیر می‌کند یا قیدی به مسأله افزوده می‌گردد یا متغییر جدیدی در مسأله ظاهر می‌شود) به‌کار گرفته می‌شود. کار بدین‌صورت انجام می‌گیرد که از جواب بهینه مسأله قدیمی شروع می‌نمائیم و با انجام عملیاتی به جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته (در صورت وجود می‌رسیم). مسأله را بدین‌صورت درنظر می‌گیریم که هر دفعه یک تغییر در آن داده باشیم. مثلاً یکی از c_jها تغییر می‌کند یا یک قید به مسأله افزوده می‌گردد. اگر قرار باشد چندین تغییر در مسأله صورت گیرد، هر دفعه یک تغییر در مسأله می‌دهیم. البته می‌توان مدل را توسعه داد و چندین تغییر را با هم درنظرگرفت که این کار، کمی پیچیده‌تر می‌باشد. در مسأله برنامه‌ریزی پارامتری نوعی از تحلیل حساسیت را که در آن بردار سمت راست یا بردار ضرایب قیمت به‌طور تابع خطی از یک پارامتر λ که λ می‌توانست تمام مقادیر حقیقی را اختیار نماید؛ مورد بحث قرار دادیم (مسأله‌ی برنامه‌ریزی پارامتری). اکنون به بررسی مسأله مطرح شده می‌پردازیم .

فرض کنیم:

$$S = \{x \mid Ax = b \;\&\; x \geq ۰\}$$

در حقیقت مجموعه‌ی جواب‌های شدنی مسأله‌ی (۱) می‌باشد و فرض کنیم $\tilde{B}$ پایه بهینه نهائی به‌دست آمده برای مسأله ۴-۱ باشد. که بردار اساسی متناظر آن و ضرایب متغیرهای اساسی چنین است

$$x_B = (x_۱, \ldots, x_m)$$

و

$$c_B = (c_۱, \ldots, c_m)$$

$$\tilde{x} = (\tilde{B}^{-۱}b, ۰) \quad , \quad \tilde{w} = c_{\tilde{B}}\tilde{B}^{-۱}$$

یک BFS برای مسأله‌ی ۴-۱ می‌باشد برای توضیح مساله‌ای را درنظر بگیرید که متناظر جدول زیر می‌باشد.

جدول شماره (۴-۱)

$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	$x_{۵}$	$x_{۶}$	$-z$	b
۱	۲	۰	۱	۰	-۶	۰	۱۱
۰	۱	۱	۳	-۲	-۱	۰	۶
۱	۲	۱	۳	-۱	-۵	۰	۱۳
۳	۲	-۳	-۶	۱۰	-۵	۱	۰

z می‌نیمم می‌گردد. $x_j \geq ۰ \quad j = ۱, \ldots, ۶$

پس از حل مسأله با الگاریتم سیمپلکس $x_{\tilde{B}} = (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ یک بردار اساسی بهینه برای مسأله خواهد بود که در جدول زیر اطلاعات مربوط به عکس $\tilde{B}^{-۱}$ و مقادیر متغیرهای اساسی داده شده است.

(مسأله را با روش سیمپلکس اصلاح شده با جدول معکوس حل نموده‌ایم)

جدول شماره (۴-۲)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس				مقادیر متغیرهای اساسی
$x_{۱}$	-۱	-۲	۲	۰	۳
$x_{۲}$	۱	۱	-۱	۰	۴
$x_{۳}$	-۱	۰	۱	۰	۲
$-z$	-۲	۴	-۱	۱	-۱۱

بنابراین $\tilde{x} = (۳, ۴, ۲, ۰, ۰, ۰)^t$ یک جواب بهینه برای مسأله می‌باشد که مقدار بهینه تابع مقصود $z(\tilde{x}) = ۱۱$

۴-۱-۱ معرفی فعالیت جدید[1](افزودن متغیر جدید) فرض کنیم متغیر جدیدی را به مسأله معرفی می‌نمائیم (در حقیقت فعالیت جدیدی مانند $x_{n+۱}$ را به مدل می‌افزائیم)

و فرض کنیم. بردار متناظر آن a_{n+1} و ضریب آن در تابع مقصود c_{n+1} باشد. پس مدل تعدیل یافته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx + c_{n+1}x_{n+1} \\ \text{s. t.} \quad & [A, a_{n+1}]x = b \qquad (۲\text{-}۴) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن

$$x = (x^t, x_{n+1})$$

$\tilde{B}$ برای مسأله‌ی ۴-۲ شدنی می‌باشد، که BFS متناظر آن برای مسأله‌ی ۴-۲ عبارت است از:

$$x^\circ = (\tilde{x}^t, 0)$$

با توجه به میزان بهینگی؛ x° برای مسأله‌ی ۴-۲بهینه می‌ماند اگر داشته باشیم:

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - \tilde{w}a_{n+1} \geq 0$$

اگر $\bar{c}_{n+1} < 0$ مسأله ۴-۲ را با وارد نمودن x_{n+1} به عنوان متغیر واردشونده حل می‌نمائیم (با الگاریتم سیمپلکس اصلاح شده) اغلب اتفاق می‌افتد که با آوردن x_{n+1} به پایه، به جواب بهینه مسأله‌ی ۴-۲ می‌رسیم و کار خاتمه می‌پذیرد. ولی هیچ تئوری حمایت کننده‌ای که این‌کار را تضمین نماید موجود نمی‌باشد. در بعضی از مسائل ممکن است ضرورت داشته باشد که چندین عمل محوری تا رسیدن به جواب بهینه مسأله ۴-۲ ضروری باشد.

۴-۱-۲ تمرین.

۱) ثابت کنید که مقدار بهینه مسأله‌ی ۴-۲ کوچک‌تر یا مساوی مقدار بهینه مسأله‌ی ۴-۱ می‌باشد (مقدار بهینه مسأله عبارت است مقدار بهینه‌ی تابع مقصود یعنی مقدار تابع مقصود بازاء جواب بهینه). مثالی بسازید که مسأله ۴-۱ محدود باشد ولی مسأله ۴-۲ از پائین نامحدود باشد.

1) Introduced a New Activitiy

۲) چه رابطه‌ای بین ناحیه‌ی شدنی مسأله‌ی ۴-۱ و ۴-۲ وجود دارد؟ مطلب را از نظر جبری بیان و با آوردن مثال مطلب را کاملاً توضیح دهید.

توجه حل تمرینات که در متن درس می‌آید، برای خوانندگان بسیار ضروری است در حقیقت مقصود از آوردن تمرین آن است که سنجیده شود که خواننده چقدر مطلب را گرفته است. از این‌رو توصیه می‌گردد قبل از ادامه بحث حتماً تمرینات را دقیقاً حل نموده و حل آن را یادداشت نمائید.

۴-۱-۳ مثال. مسأله جدول شماره‌ی (۴-۱) را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید متغیر جدیدی مانند x_7 به مسأله معرفی می‌گردد، که ستون متناظر آن $a_7 = (1, 2, -3)^t$ و $c_7 = -7$ می‌باشد. ضریب سود نسبی این متغیر نسبت به پایه بهینه قبلی، عبارت است از :

$$\bar{c}_7 = c_7 + (-\tilde{w})a_7 = -7 + (-2, 4, -1)(1, 2, -3)^t = 2$$

از این‌رو، جواب بهینه قبلی با مقدار $x_7 = 0$، بهینه می‌باشد. جواب بهینه مسأله‌ی جدید عبارت است از $\tilde{x} = (3, 4, 2, 0, 0, 0, 0)$ و مقدار بهینه تابع مقصود $\tilde{z} = 11$ می‌باشد. بنابراین، اگر x_7 سطح فعالیت جدید در مدل تعدیل یافته صورت نمی‌پذیرد (در جواب بهینه).

۴-۱-۴ مثال. مجدداً مسأله متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) را درنظر می‌گیریم. متغیر جدید x_7 را با بردار $a_7 = (3, -1, 1)$ و $c_7 = 4$ معرفی می‌نمائیم. ضرایب سود نسبی متغیر جدید نسبت به پایه بهینه مسأله‌ی قدیمی

$$\bar{c}_7 = c_7 + (-\tilde{w})a_7 = 4 + (-2, 4, -1)(3, -1, 1)^t = -7 < 0$$

در نتیجه با معرفی متغیر جدید، جواب بهینه قبلی، در **مدل تعدیل یافته** جدید؛ بهینه نخواهد بود. با وارد نمودن x_7 به پایه و انجام عمل محوری، با توجه به جدول شماره (۴-۲) داریم :

$$\begin{pmatrix}\bar{a}_7\\ \bar{c}_7\end{pmatrix} = \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix}a_7\\ c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{a}_7\\ \bar{c}_7\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\\ -7\end{bmatrix}$$

این ستون، ستون محوری است. با استفاده از قاعده می‌نیمم مشخص می‌گردد که متغیر x_1 ، متغیر خارج‌شونده می‌باشد.

جدول شماره (۴-۳)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس				مقادیر متغیرهای اساسی
x_7	-۱	-۲	۲	۰	۳
x_2	۲	۳	-۳	۰	۱
x_3	-۳	-۴	۵	۰	۸
$-z$	-۹	-۱۰	۱۳	۱	۱۰

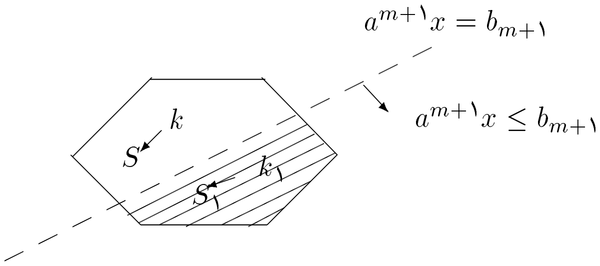
۴-۱-۵ تمرین. ادامه عملیات مسأله فوق را تا رسیدن به جواب بهینه ادامه دهید. در هر مرحله تمامی عملیات را به دقت انجام داده و عکس پایه بهینه را به‌دست آورید.

۴-۲ افزودن یک قید نامساوی[1]

مسأله شماره ۴-۱ را درنظر و مجدداً فرض کنید $\tilde{B}$ پایه بهینه مسأله‌ی باشد. فرض کنیم قیدی به‌صورت زیر به مسأله می‌افزائیم

$$a^{m+1}x \leq b_{m+1} \qquad (۴\text{-}۳)$$

1) Introducing an Additional Inequality Constraint



شکل (۴-۱)

با ملحوظ داشتن این نامساوی به عنوان قید افزوده شده، نقاطی از ناحیه S ممکن است نشدنی گردد، به عبارت دیگر ناحیه ممکن است کوچک‌تر شود. فرض کنیم S_1 ناحیه جدید شدنی باشد، واضح است که $S_1 \subseteq S$. شکل (۴-۱) ملاحظه گردد. از این‌رو، اگر ناحیه اصلی (اولیه) جواب بهینه شدنی داشته باشد ناحیه شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته یا خالی است، یا جواب بهینه شدنی دارد. هم‌چنین داریم:

$$z(\tilde{x}) = \mathrm{Min}\{z(x) \mid x \in S\} \leq \mathrm{Min}\{z(x) \mid x \in S_1\}$$

اگر $\tilde{x} \in S_1$؛ یعنی $\tilde{x}$ در ۴-۳ صدق نماید، در این‌صورت $\tilde{x}$ با افزودن قید جدید جواب بهینه باقی می‌ماند. از طرف دیگر، اگر $\tilde{x}$ در قید افزوده شده صدق ننماید، یعنی:

$$\tilde{x}_{n+1} = -a^{m+1}\tilde{x} + b_{m+1} \leq 0 \qquad (۴-۴)$$

که در آن x_{n+1} متغیر کمکی متناظر ۴-۳ می‌باشد. مسأله‌ی تعدیل یافته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathrm{Min} \quad & Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0 x_{n+1} \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ a^{m+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \\ & x_j \geq 0 \quad \text{بازاء هر } j \end{aligned} \qquad (۵-۴)$$

فرض کنید A **ماتریس تکنولوژی** از مرتبه‌ی $(m+1) \times (n+1)$ متناظر ۴-۵ باشد. با افزودن x_{n+1} به عنوان متغیر اساسی به متغیرهای اساسی قبلی می‌توان پایه $\tilde{B}$ را به پایه $\mathcal{B}$

وسعت دارد که متناظر $(\tilde{x}^t, x_{n+1})$ باشد طبق ۴-۱ $\tilde{B}$ یک پایه نشدنی برای مسأله تعدیل یافته می‌باشد. چون $c_{n+1} = 0$؛ بنابراین سود نسبی x_j نسبت به پایه جدید $\mathcal{B}$ همان قبلی خواهد بود که داریم $\bar{c}_j \geq 0$ بازاء هر j $(1, \ldots, n)$ بنابراین پایه جدید $\mathcal{B}$ دوآل شدنی می‌باشد، اما پرایمال شدنی نیست. با به‌کار بردن $\mathcal{B}$ **به عنوان پایه اولیه** و با به‌کار بردن الگاریتم سیمپلکس دوآل مسأله را حل می‌کنیم. چگونگی به‌دست آوردن عکس پایه جدید چنین خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & 0 \\ a_{m+1\,1} & \ldots & a_{m+1\,m} & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{-1} & \vdots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ -(a_{m+1,1} \ldots a_{m+1,m})\tilde{B}^{-1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\mathcal{B}^{-1}$ را می‌توان به آسانی از $\tilde{B}^{-1}$ به‌دست آورد. و واضح است که:

$$(\tilde{w}, 0) = \tilde{w}$$

۴-۲-۶ مثال. مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره (۴-۱) را درنظر بگیرید. فرض کنید قید

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -7$$

به مسأله افزوده می‌گردد. جواب بهینه $\tilde{x} = (3, 4, 2, 0, 0, 0)$ در قید فوق‌الذکر صدق نمی‌نماید. فرض کنیم x_7 متغیر کمکی متناظر قید فوق باشد؛ یعنی:

$$x_7 = -x_1 + x_2 - 3x_3 - 7$$

در جدول زیر که جدول معکوس می‌باشد، اطلاعات مربوط به جدول و افزودن قید آورده شده است.

جدول شماره (۴-۴)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس					مقادیر اساسی	ستون محوری x_4
x_1	-۱	-۲	۲	۰	۰	۳	-۱
x_2	۱	۱	-۱	۰	۰	۴	۱
x_3	-۱	۰	۱	۰	۰	۲	۲
x_7	۵	۳	-۶	۱	۰	-۱۲	$\boxed{-4}$
$-z$	-۲	۴	-۱	۰	۱	-۱۱	۱

x_7 متغیری است که بایستی از پایه خارج شود و متغیر x_4 واردشونده به‌صورت زیر مشخص می‌گردد.

جدول شماره (۵-۴)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
سطر چهارم به‌روز شده	۰	۰	۰	-۴	۰	-۳	۱	۰	-۱۲
سطر قیمت به‌روز شده	۰	۰	۰	۱	۳	۸	۰	۱	-۱۱
$\frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{4j}}\,\bar{a}_{4j} < 0$				$\frac{1}{4}$		$\frac{8}{3}$			

x_4 وارد پایه می‌گردد و x_7 از پایه خارج می‌گردد. این عملیات به این‌صورت آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا کار به اتمام رسد.

۴-۲-۷ تمرینات متن درس.

۱) مسأله‌ی فوق را تا تکمیل شدن عملیات ادامه دهید.

۲) نشان دهید افزودن یک قید به مسأله‌ی پرایمال در تحلیل حساسیت مانند معرفی یک متغیر در مسأله‌ی دوآل آن می‌باشد.

۳) ثابت کنید تمامی نقاط رأسی S_1 شامل نقاط زیر می‌باشد.

الف. تمامی نقاط رأس S است که در شرط ۴-۳ صدق می‌کند

ب. نقاطی از تقاطع یال‌های S با ابرصفحه H که آن یال‌ها کاملاً روی ابرصفحه H قرار نمی‌گیرند. که

$$H = \{x \mid a^{m+1}x = b_{m+1}\}$$

۴) اگر هر نقطه‌ی بهینه‌ی شدنی ۴-۱ که در شرایط ۴-۳ صدق نکند و اگر $S_1 \neq \phi$، ثابت کنید که هر جواب بهینه شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته که در شرایط ۴-۳ به‌صورت تساوی صدق نماید، روی ابرصفحه H که در مسأله ۴-۴ تعریف شد قرار می‌گیرد.

۴-۳ معرفی یک قید اضافی به‌صورت تساوی[1]

مجدداً برمی‌گردیم به مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) فرض کنید یک قید اضافی به‌صورت زیر به مسأله افزوده می‌گردد.

$$a^{m+1}x = b_{m+1}$$

فرض کنید:

$$H = \{x \mid a^{m+1}x = b_{m+1}\}$$

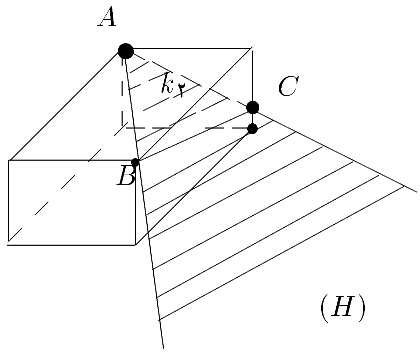
مجموعه‌ی جواب‌های شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته عبارت است از مجموعه تمامی نقاطی که $H \cap S = S_2$ قرار می‌گیرد. شکل (۴-۲) ملاحظه گردد. فرض کنید $\tilde{x} \in H$ در این صورت واضح است که $\tilde{x}$ جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته می‌باشد.

اگر $\tilde{x} \notin H$، آن‌گاه:

$$a^{m+1}\tilde{x} \neq b_{m+1}$$

فرض کنید $a^{m+1}\tilde{x} > b_{m+1}$. آن‌گاه مسأله‌ی اصلی را با افزودن قید $a^{m+1}x - x_{n+1} = b_{m+1}$ تغیر دهید که در آن $x_{n+1} \geq 0$.

1) Intrducing an Additional Equality Constraint



شکل (۴-۲)

(اگر $a^{m+1}\tilde{x} < b_{m+1}$ با قید $a^{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}$ و $x_{n+1} \geq 0$ عوض نمائید) مسأله جدید، یعنی مسأله تعدیل یافته به‌صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx + Mx_{n+1} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ a^{m+1} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix} \\ & x = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{۴-۶}$$

که در آن M عدد دلخواه بسیار بزرگی می‌باشد. بردار $X_{\tilde{B}}$ به‌صورت

$$x_B = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

یک بردار اساسی شدنی برای مسأله‌ی ۴-۶ خواهد بود. BFS متناظر آن عبارت خواهد بود از:

$$x^t = (\tilde{x}^t, \tilde{x}_{n+1})$$

که در آن

$$\tilde{x}_{n+1} = a^{m+1}\tilde{x} - b_{m+1}$$

هم‌چنین $\tilde{\mathcal{B}}$ عبارت خواهد بود از:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & -10 \end{bmatrix}$$

از این‌رو عکس $\tilde{B}^{-1}$ چنین خواهد بود:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{-1} & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m+1,1} \ldots, a_{m+1,m}) & \tilde{B}^{-1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

با شروع از پایه شدنی $\mathcal{B}$ مسأله‌ی تعدیل یافته ۴-۶ حل می‌گردد تا جواب بهینه حاصل (در صورت وجود) به‌دست آید.

اگر $\tilde{x}_{n+1} > 0$ دراین‌صورت $S_2 = \phi$. اگر $\tilde{x}_{n+1} = 0$ آن‌گاه $\tilde{x}$ جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته خواهد بود.

۴-۳-۸ تمرینات متن درس.

۱) فرض کنید در مسأله متناظر جدول شماره (۴-۱) قید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

به مسأله افزوده شد. جواب بهینه شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته را به‌دست آورید.

۲) با به‌کار بردن روش سیمپلکس دوآل به جای روش M بزرگ که در بالا توضیح داده شد، چگونه می‌توان مسأله را حل نمود. در جزئیات بحث نمائید.

۳) ثابت کنید نقاط رأسی مجموعه S_2 شامل نقاط زیر است:

الف. تمامی نقاط رأسی S که روی ابرصفحه H قرار دارند.

ب. تقاطع یال‌های S با H، آن یال‌هائی که تماماً در H قرار ندارند.

۴) فرض کنید H و $S_۲$ همان باشند که در متن درس تعریف شد.

$$S_۱ = S \cap \{x \mid a^{m+۱}x \leq b_{m+۱}\}$$

$$S_۳ = S \cap \{x \mid a^{m+۱}x \geq b_{m+۱}\}$$

اگر $S_۲ \neq \phi$ ثابت کنید $S_۲$ شامل حداقل یک جواب بهین شدنی یکی از مسائل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} ۱)\ \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & x \in S_۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲)\ \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s.t.} \quad & x \in S_۳ \end{aligned}$$

۴-۴ تغیرات قیمت متغیرهای غیراساسی در تابع مقصود[۱]

مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) را درنظر می‌گیریم. فرض کنید x_r یک متغیر غیراساسی است و فرض کنیم ضرایب تمامی متغیرهای غیراساسی جز c_r که ضرایب x_r در تابع مقصود ثابت بماند. می‌خواهیم بدانیم اگر $\tilde{B}$ پایه بهینه مسأله‌ی ۴-۱ باشد، می‌خواهیم بدانیم که تغیرات c_r چقدر باشد تا $\tilde{B}$ برای مسأله‌ی ۴-۱ باز هم بهینه بماند یعنی:

$$\bar{c}_r = c_r - \tilde{w}a^r \geq ۰$$

یعنی:

$$c_r \geq \tilde{w}a^r$$

سود نسبی قیمت بقیه‌ی متغیرها مستقل از c_r می‌باشند، از این‌رو تغییر نخواهند کرد.

اگر c_r در بازه $[\tilde{w}a^r, \infty)$ نباشد، x_r تنها متغیر غیراساسی است که سود نسبی آن منفی می‌باشد (نسبت به پایه $\tilde{B}$). x_r را وارد پایه می‌کنیم و عملیات را با روش سیمپلکس تا پایان کار ادامه می‌دهیم.

1) Cost Ranging of a Nonbasic Cost Coefficieint

۴-۴-۹ مثال. مجدداً مسألهی متناظر جدول شمارهی (۴-۱) را درنظر میگیریم. میخواهیم بدانیم c_5 چقدر (که مقدار فعلی آن ۱۰ است) میتواند تغییر کند که بردار $x_B = (x_1, x_2, x_3)$ اساسی باقی بماند. برای این منظور بایستی داشته باشیم:

$$c_5 + (-2, 4, -1)(0, -2, -1)^t \geq 0$$

یعنی:

$$c_5 \geq 7$$

به عبارت دیگر اگر مقدار c_5 در $[7, \infty)$ پایه بهینه میماند.

فرض کنیم که c_5 مقدار ۶ را به خود میگیرد. واضح است که پایه بهینه قبلی دیگر پایه بهینه نیست. متغیر x_5 را وارد پایه میکنیم، با بهکار بردن قاعدهی مینیمم مشخص میگردد که متغیر x_1 از پایه خارج میگردد و جدول جدید بهروز شده بهصورت زیر خواهد بود:

جدول شماره (۴-۶)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس				مقادیر اساسی
x_5	$-\frac{1}{2}$	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{11}{2}$
x_3	$-\frac{3}{2}$	-1	2	0	$\frac{7}{2}$
$-z$	$-\frac{5}{2}$	3	0	1	$-\frac{19}{2}$

به سادگی میتوان بررسی نمود که جدول فوق، جدول بهینه مسألهی تعدیل یافته میباشد.

۴-۵ تغییر ضرایب یک متغیر اساسی[1]

مجدداً مسأله متناظر جدول شمارهی (۴-۱) را درنظر میگیریم. فرض کنیم تمامی ضرایب تابع مقصود جز c_1 ثابت میمانند. c_1 ضریب متغیر اساسی x_1 میباشد. اگر c_1 را به عنوان یک پارامتر درنظر بگیریم، میخواهیم دامنه تغییرات آن را که $\tilde{B}$ پایه بهینه باقی بماند، مشخص نمائیم. چون c_1 ضریب یکی از متغیرهای اساسی میباشد، هر نوع تغییر در آن باعث تغییر در

1) Cost Ranging of a Basic Cost Coefficient

جواب دوآل متناظر پایه $\tilde{B}$ خواهد شد و همین‌طور باعث می‌گردد که سود نسبی کلیه متغیرهای غیراساسی نیز تغییر نماید. برای تسهیل در بیان فرض می‌کنیم γ_1، نشان‌دهنده سطح پارامتر c_1، و فرض کنیم $w(\gamma_1)$ و $\bar{c}_j(\gamma)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی جواب‌های دوآل و **سود نسبی** متغیرها نسبت به پایه $\tilde{B}$ باشند. پس:

$$w(\gamma_1) = (\gamma_1, c_2, \ldots, c_m)\tilde{B}^{-1}$$

از این‌رو بردار دوآل یک تابع آفینی از γ_1 می‌باشد. اگر این جواب دوآل را به‌کار گیریم، سود نسبی متغیرها چنین خواهد بود:

$$\bar{c}_j(\gamma_1) = c_j - w(\gamma_1)a_j \quad\quad j = 1, \ldots, n$$

پس هر کدام از $\bar{c}_j(\gamma_1)$ نیز خود تابع آفینی از γ_1 خواهند شد. لهذا دامنه‌ی تغییرات γ_1 که برای آن مقادیر $\tilde{B}$ پایه بهین بماند، عبارت است از دامنه‌ی تغییرات γ_1 که $\bar{c}_j(\gamma_1)$ها نامنفی بمانند. این دامنه‌ی تغییرات بازه بسته‌ی غیرخالی می‌باشد. (چرا؟)

اگر لازم باشد که c_1 در خارج از این بازه تعدیل یابد، مثلاً مقدار $c'_1 = \gamma_1$ را بگیرید. با به‌کار بردن فرمول‌های $\bar{c}_j(c'_1)$ تمامی سود نسبی متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌گردد و متغیری که سود نسبی آن منفی باشد وارد پایه می‌شود و عملیات الگاریتم سیمپلکس در جهت رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

۴-۵-۱۰ مثال. مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم γ_1 نشان‌دهنده‌ی ضریب x_1 در تابع مقصود باشد، که مقدار آن ۳ می‌باشد (در جدول حاضر ۳ می‌باشد). جواب دوآل متناظر بردار اساسی (x_1, x_2, x_3) به‌عنوان تابعی از γ_1 به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w(\gamma_1) =&(\gamma_1, 2, -3)(\tilde{B}^{-1}) \\ =&(-\gamma_1 + 5, -2\gamma_1 + 2, 2\gamma_1 - 5) \end{aligned}$$

با به‌کار بردن فرمول:

$$\bar{c}_j(\gamma_1) = c_j - w(\gamma_1)a_j$$

بردار سود نسبی چنین خواهد بود:

$$\bar{c}(\gamma_1) = (0, 0, 0, \gamma_1 - 2, -2\gamma_1 + 9, 2\gamma_1 + 2) \geq 0 \iff 2 \leq \gamma_1 \leq \frac{9}{2}$$

بنابراین $\tilde{B}$ پایه بهینه می‌باشد، وقتی که ضریب x_1 در تابع مقصود در بازه‌ی $[2, \frac{9}{2}]$ قرارگیرد با فرض این‌که تمام ضرایب تابع مقصود ثابت می‌مانند (در مقدار فعلی خودشان در جدول (۴-۱))

فرض کنید γ_1 مقدار ۵، با تغییر c_1 از ۳ به ۵، جواب دوآل تعدیل یافته چنین خواهد بود:

$$w(\gamma_1 = 5) = (0, -8, 5)$$

با این تغییر، جدول معکوس چنین خواهد بود

جدول شماره (۴-۷)

ستون محوری (x_5)	مقادیر اساسی	جدول معکوس				متغیرهای اساسی
$\boxed{۲}$	۳	۰	۲	-۲	-۱	x_1
-۱	۴	۰	-۱	۱	۱	x_2
-۱	۲	۰	۱	۰	-۱	x_3
-۱	-۱۷	۱	-۵	۸	۰	$-z$

سود نسبی تعدیل یافته x_5، برابر با (-۱) می‌باشد. از این جهت x_5 وارد پایه می‌گردد که جدول به‌روز شده پس از عملیات محوری و اطلاعات مربوط به متغیرهای اساسی بعدی چنین خواهد بود

جدول شماره (۴-۸)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس				مقادیر اساسی
x_5	$-\frac{1}{2}$	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{11}{2}$
x_3	$-\frac{3}{2}$	-1	2	0	$\frac{7}{2}$
$-z$	$-\frac{1}{2}$	7	-4	1	$-\frac{31}{2}$

به خاطر بیاورید که ضریب x_1 در تابع مقصود ۵ می‌باشد، و بررسی نمائید که آیا پایه جدید در میزان اختتام صدق می‌نماید. در صورت ضرورت الگاریتم را ادامه دهید.

۴-۵-۱۱ تغییرات سمت راست[1] در مسأله متناظر جدول شماره (۴-۱) می‌خواهیم معین کنیم دامنه تغییرات مقدار یکی از ثابت‌های سمت راست، مثلاً b_1 را که برای این فاصله‌ی تغییرات $\tilde{B}$ پایه بهینه باقی ماند. ثابت سمت راست را به عنوان یک پارامتر تلقی نمائید و آن را با β_1 نشان دهید. b_1 مقدار β_1 در جدول شماره‌ی (۴-۱) می‌باشد که $b_1 = 11$ می‌باشد. فرض کنیم که b_2 و b_3 تغییر ننماید. $\tilde{B}$ پایه بهینه است وقتی مقدار پارامتر β_1 مساوی b_1 است. از این‌رو $\tilde{B}$ دوآل شدنی می‌باشد. بنابراین $\tilde{B}$ برای تمامی مقادیر β_1 که مسأله پرایمال شدنی باشد، بهینه خواهد ماند. و مقدار این متغیرهای اساسی یعنی $x_{\tilde{B}}i$ها تابعی از پارامتر β خواهد بود. $\tilde{B}$ پرایمال شدنی است اگر:

$$x_{\tilde{B}}(\beta_1) = \tilde{B}^{-1}(\beta_1, b_2, \ldots, b_m)^t \geq 0$$

چون تمامی این نامساوی‌ها برحسب β_1 خطی می‌باشند، این مطلب یک فاصله بسته‌ی به‌صورت $\bar{\lambda} \leq \beta_1 \leq \lambda$را برای بهینه ماندن $\tilde{B}$ برای تمام مقادیر β_1 در این فاصله مشخص خواهد نمود.

اگر ضرورت داشته باشد که مسأله را برای $\beta_1 = b_1$ که خارج از فاصله فوق باشد حل نمائیم. با توجه به این‌که مسأله برای پایه $\tilde{B}$ دوآل شدنی است ولی برای مقدار فوق پرایمال شدنی نمی‌باشد، با به‌کار بردن سیمپلکس دوآل می‌توان مسأله را حل نمود و بازاء مقدار داده شده پایه بهینه را در صورت شدنی بودن مسأله معین کرد.

1) Right Hand Side Ranging

۴-۵-۱۲ مثال. در مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱)، مقادیر متغیرهای اساسی $(x_۱, x_۲, x_۳)$ به عنوان تابعی از پارامتر $\beta_۱$ چنین می‌باشد.

$$\tilde{B}^{-۱}\begin{pmatrix}\beta_۱\\ ۶\\ ۱۳\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-۱ & -۲ & ۲\\ ۱ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_۱\\ ۶\\ ۱۳\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta_۱+۱۴\\ \beta_۱-۷\\ -\beta_۱+۱۳\end{pmatrix}$$

$$۱۳ \le \beta_۱ \le ۷ \Longleftrightarrow \text{(بردار اساسی شدنی است)}$$

از این‌رو $[۷, ۱۳]$ فاصله‌ای است که بردار اساسی $(x_۱, x_۲, x_۳)$ بهینه می‌ماند.

۴-۵-۱۳ تمرین. یک جواب بهینه شدنی برای مسأله‌ی متناظر جدول (۴-۱) بیابید وقتی $b_۱$ از ۱۱ به ۶ تغییر می‌نماید.

۴-۵-۱۴ تغییر در ماتریس تکنولوژیکی A در ستون‌های متغیرهای غیراساسی[1]

فرض کنید x_j یک متغیر غیراساسی است، یعنی در بردار $x_{\tilde{B}}$ نمی‌باشد. a_{ij} یکی از اعضای ماتریس تکنولوژی (ماتریس ورودی و خروجی) می‌باشد، که در ستون a_j قرار داد (ستون a_j متناظر x_j است). اگر در ماتریس تکنولوژی تمامی اعضاء جز a_{ij} ثابت بمانند و a_{ij} تغییر نماید، دامنه تغییرات آن چقدر می‌تواند باشد، که پایه بهینه $\tilde{B}$ بهینه بماند.

اگر a_{ij} را به عنوان یک پارامتر تلقی نمائیم و آن را به α_{ij} نشان دهیم. در جدول حاضر سطح α_{ij} همان a_{ij} می‌باشد. چون x_j متغیر غیراساسی می‌باشد، تغییرات در a_{ij} در پرایمال شدنی $\tilde{B}$ تغییری نمی‌دهد. تغییر در α_{ij}، تنها سود نسبی متغیر x_j را عوض می‌نماید، به‌صورت زیر:

$$\bar{c}_j(\alpha_{ij}) = c_j + (\sum_{r\neq i}(-\tilde{w}_r)a_{rj}) - \tilde{w}_i\alpha_{ij}$$

1) Change in The Input- output Coefficient in a Nonbasic Column Vectors

تا زمانی‌که $\bar{c}_j(\alpha_{ij}) \geq \circ$، $\tilde{B}$ پایه بهینه باقی می‌ماند. رابطه اخیر یک فاصله‌ی بسته برای α_{ij} مشخص می‌نماید، به‌طوری‌که اگر تغییرات α_{ij} در این فاصله باشد، $\tilde{B}$ پایه بهینه مسأله خواهد بود. اگر α_{ij} قرار باشد، مقداری مانند a'_{ij} را که خارج از فاصله فوق باشد بگیرد، واضح است که سود نسبی این متغیر، یعنی متغیر x_jمنفی می‌گردد که با انجام عمل محوری در الگاریتم سیمپلکس پایه بهینه دیگری را می‌توان برای مسأله به‌دست آورد.

۴-۵-۱۵ مثال. در مسأله متناظر جدول شماره (۴-۱) مقدار فعلی $a_{۲۵}$، برابر با (-۲) می‌باشد.

$$\begin{aligned}\bar{c}_۵(\alpha_{۲۵}) &= ۱۰ + (-۲, ۴, -۱)(\circ, \alpha_{۲۵}, -۱)^t \\ &= ۱۱ + ۴\alpha_{۲۵} \geq \circ \iff \alpha_{۲۵} \geq -\frac{۱۱}{۴}\end{aligned}$$

بنابراین $\tilde{B}$ پایه بهینه باقی ماند اگر $\alpha_{۲۵} \geq -\frac{۱۱}{۴}$.

فرض کنید $\alpha_{۲۵}$ از مقدار فعلی (-۲) به (-۳) تغییر یابد. ستون به‌روز شده متناظر $x_۵$ عبارت خواهد بود از $(۴, -۲, -۱, -۱)^t$. با وارد نمودن متغیر $x_۵$ و خارج نمودن متغیری که از قاعده‌ی می‌نیمم به‌دست می‌آید کار را با مرحله ختم ادامه می‌دهیم.

۴-۶ تغییر در ضریب یکی از اعضای ستون‌های اساسی[1]

فرض کنید $x_۱$، یک متغیر اساسی در $x_{\tilde{B}}$ برای مسأله ۴-۱ باشد می‌خواهیم $a_{۱۱}$ را از مقدار فعلی خود تغییر دهیم و آن را به $a'_{۱۱}$ برسانیم.

ستون تعدیل یافته $a'_۱ = (a'_{۱۱}, a_{۱۲}, \ldots, a_{m۱})^t$ جایگزین $a_۱ = (a_{۱۱}, a_{۱۲}, \ldots, a_{m۱})^t$ می‌گردد. فرض کنید $x'_۱$ سطح فعالیت بردار ستونی جدید باشد. بنابراین $x'_۱$ جایگزین $x_۱$ می‌گردد. مسأله‌ی جدید تغییر یافته را، مسأله‌ی اصلاح شده می‌نامیم.

مسأله‌ی جدید را با وسعت دادن جدول اصلی بسازید. در مسأله جدید متغیر $x'_۱$ با ستون $a'_۱$ درنظر بگیرید و در تابع مقصود ضریب آن را $c_۱$ قرار دهید و ضریب $x_۱$ را عدد بسیار

1) Change in a Basic Column Input- Output Coeffieint

بزرگ M قرار دهید. این کار باعث به وجود آمدن مسالهای بهصورت زیر میگردد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1 x'_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + M x_1 \\ \text{s.t.} \quad & a'_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_1 x_1 = b_1 \\ & x_1, \ldots, x_n, x'_1 \geq 0 \end{aligned}$$

در حقیقت x_1 نقش یک متغیر تصنعی را بازی میکند. که با حل این مسأله مطلب مورد نظر عاید میگردد.

۴-۶-۱۶ کاربردهای عملی تحلیل حساسیت[1] در مطالعهی یک سیستم در بهکارگیری مسألهی برنامهریزی خطی، تکنیک تحلیل حساسیت را میتوان در ارزیابی محصول جدید بهکار برد. همچنین این روش در معرفی تکنولوژی جدید و یا بهکارگیری منابع جدید بهکار گرفته میشود. برای اطلاع از جزئیات امر به منابع آخر فصل مراجعه شود.

۷-۴ تمرینات فصل چهارم

۱) جدول سیمپلکس زیر را درنظر بگیرید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$R.H.S$
	۱	۰	۲	۲	۱	۲	۱-	۰	۹
	۰	۱	۳	۱	۳	۲	۰	۱-	۱۹
c_j	۳۵	۳۰	۶۰	۵۰	۲۷	۲۲	۰	۰	

در جدول فوق متغیرهای x_7 و x_8 متغیرهای کمکی میباشند.

۱ـ بررسی نمائید که $B = [a_5, a_6]$ پایه بهینه مسأله فوق است. قیمتهای سایه را بهدست آورید. آیا مسأله **بهینهی دگرین** دارد؟

۲ـ متغیر x_9 به مسأله افزوده میگردد که در آن $a_9 = \binom{2}{4}$، آیا مقدار بهینهی تابع مقصود تغییر میکند؟ (مقدار $c_9 = 7$ میباشد)

1) Practical Applications of Sensitivity Analysis

۳ـ $c_۹$ چقدر باشد تا جواب بهینه تغییر نکند؟

۴ـ $c_۴$ در چه فاصله‌ای تغییر کند تا جواب بهینه تغییر نکند؟

۵ـ فرض کنید که عدد ۹ سمت راست تبدیل می‌شود به $۹ + \alpha$ $(\alpha \geq ۰)$ α چقدر باشد تا پایه $[a_۵, a_۶]$ شدنی بماند؟

۶ـ فرض کنید $a_۳$ به $\binom{۳}{۴}$ تبدیل می‌گردد، آیا جواب بهینه تغییر می‌کند؟

۷ـ اگر ۱۹ به $۱۹ + \beta$ تبدیل شود، β باید چقدر باشد تا جواب شدنی بماند؟

۲) در جدول زیر داده‌های مربوط به حلال شیمیایی مختلف داده شده است:

	حلال‌های ۱	۲	۳	۴	خواسته‌شده
ماده۱ شیمیایی در هر کیلوگرم)	۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۶۰	$\geq$ ۹۰
ماده ۲ شیمیایی در هر کیلوگرم	۳	۲	۶	۵	$\leq$ ۴
قیمت به سنت برحسب کیلوگرم	۱۶	۱۲	۱۰	۱۱	

فرض کنید x_j کسری از حلال نوع j در ترکیب j باشد $(j = ۱, ۲, ۳, ۴)$. $x_۵$ و $x_۶$ متغیرهای کمکی می‌باشند. جدول اولیه به‌صورت زیر خواهد بود.

$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	b
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۶۰	-۱	۰	۹۰
۳	۲	۶	۵	۰	۱	۴
۱۶	۱۲	۱۰	۱۱	۰	۰	

جدول اولیه

۱ـ جواب بهینه‌ی مسأله را به‌دست آورید. پایه بهینه را مشخص کنید و عکس آن را به‌دست آورید.

۲ـ دوآل مسأله را نوشته و با به‌کار بردن شرایط مکمل زاید برای بهینگی یک جواب برای دوآل به‌دست آورید.

۳ـ اگر مقدار ۹۰ در بردار سمت راست به ۸۸ تقلیل پیدا کند چه مقدار، مقدار بهینه تابع مقصود تغییرمی‌کند.

۴ـ اگر ۹۰ به $\alpha + ۹۰$ تبدیل شود $(\alpha \in R)$ مقدار α در چه فاصله می‌تواند تغییر کند تا جواب شدنی باقی بماند.

۵ـ اگر در سمت راست ۴، تبدیل به $\beta + ۴$ دامنه تغییرات β را به‌صورتی مشخص کنید که بهینه تغییر نکند.

۳) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min} \quad Z = & -۲x_۱ & -۴x_۲ & -x_۳ & -x_۴ & \\
\text{s.t.} & x_۱ & +۳x_۲ & & +x_۴ & \leq ۸ \\
 & ۲x_۱ & +x_۲ & & & \leq ۶ \\
 & & +x_۲ & +۴x_۳ & +x_۴ & \leq ۶
\end{array}
$$

$$x_j \geq ۰ \qquad j = ۱, ۲, ۳, ۴$$

با معرفی متغیرهای $x_۵$ و $x_۶$ و $x_۷$، پایه و عکس پایه‌ی بهینه را به‌دست آورید.

۱ـ اگر بخواهیم یکی از مؤلفه‌های بردار b (بردار سمت راست) را افزایش دهیم، کدام را بایستی انتخاب کنیم؟

۲ـ اگر $b_۱ = ۸$ تبدیل به $\alpha + ۸ \quad (\alpha \geq ۰)$ بازاء چه مقدار یا مقادیری از α پایه حاصل بهینه خواهند ماند؟

۳ـ اگر $b_۱ = ۲۰$ مقدار بهینه تابع مقصود چقدر خواهد بود؟

۴ـ یک کمپانی دستگاه جدیدی خریداری نموده است که به وسیله‌ی آن می‌تواند محصول جدیدی تولید نماید. فرض‌کنید $x_۸$ مقداراین محصول و $b_۴ = -۲۵ + \frac{\lambda}{۴}$ و $a_۴ = (۱۰, ۲۰, ۲۴ - ۳\lambda)^t$ که $۰ \leq \lambda \leq ۶$ بازاء چه مقدار λ، محصول جدید قابل تولید است؟ بازاء $\lambda = ۴$، مقدار بهینه تابع مقصود چقدر می‌باشد؟

۴) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل آن را بنویسید. بحث نمائید چه اثراتی روی پرایمال و دوآل و مقادیر بهینه پرایمال دوآل خواهیم داشت اگر:

۱ـ به مسأله‌ی پرایمال متغیر جدیدی معرفی گردد.

۲ـ به مسأله‌ی پرایمال قید نامساوی تحمیل شود.

۳ـ به مسأله‌ی پرایمال یک قید به‌صورت تساوی افزوده شود.

در هر سه حالت پس از استدلال کلی مثالی نیز بیاورید.

۵) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید. جدول داده‌های مسأله چنین است.

حداقل	اجزاء موجود در یک کیلوگرم				
خواسته‌شده	ذرت	سیب‌زمینی	سبزیجات		
۵	۹	۱	۱۰	A	
۵۰	۱۰	۱۰	۱۰	B	ویتامین‌ها
۱۰	۱۱	۱۱	۱۰	C	
	۵۱	۱۰۰	۵۰	قیمت به کیلوگرم برحسب سنت	

مسأله را به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی فرموله نمائید و جواب بهینه را به‌دست آورید. پایه بهینه B و عکس آن را مشخص کنید. آیا مساله، بهینه‌ی دگرین دارد یا نه؟

قیمت‌های سایه را مشخص نمائید. حدود تغییرات مؤلفه‌های b را چنان به‌دست آورید که پایه بهینه تغییر نکند.

۶) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $g(b_1)$ مقدار بهینه تابع مقصود باشد وقتی از بردار b فقط مؤلفه‌ی b_1 تغییر می‌کند و بقیه مؤلفه‌های b بدون تغییر می‌مانند. ثابت کنید $g(b_1)$ یک تابع قطعه قطعه خطی محدب است (البته فرض بر این بوده که b_1 به‌صورتی تغییر می‌کند که مسأله شدنی باقی می‌ماند و دوآل آن مسأله نیز شدنی است). به چه صورت می‌توان $g(b_1)$ را محاسبه نمود.

۷) فرض کنید

$$S = \{x \mid Ax = b \,\&\, x \geq 0\}$$

فرض کنید $f_1(x) = c_1 x$ و $f_2(x) = c_2 x$. اگر:

$$\forall x \,\{x \in S \Longrightarrow f_1(x) > 0 \,\&\, f_2(x) > 0\}$$

الگاریتمی جهت حل مسأله‌ی زیر ارائه دهید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_1(x) f_2(x) \\ \text{s. t.} \quad & x \in S \end{aligned}$$

(تحت شرایط فوق).

۸) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad Z = cx \\ (p) \qquad & \text{s. t.} \quad a^i x \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

فرض کنیم $x^{۱}$ جواب بهینه‌ی LP زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & a^i x \geq b_i \quad i = ۲, \ldots, m \end{aligned}$$

و فرض کنیم $x^{۲}$ جواب بهینه‌ی مسأله‌ی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & a^{۱} x = b_{۱} \\ & a^i x \geq bi \quad i = ۲, \ldots, m \end{aligned}$$

ثابت کنید یکی از نقاط $x^{۱}$ یا $x^{۲}$ بایستی جواب بهینه‌ی مسأله (p) باشد.

۹) مسأله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \qquad\qquad (*) \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

و فرض کنید

$$S = \{x \mid Ax = b \,\&\, x \geq ۰\}$$

فرض می‌کنیم $S_{۱}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$S = \{x \mid x \in S \,\&\, x_n = ۰\}$$

فرض می‌کنیم که مسأله LP $(*)$ غیرتبه‌گن می‌باشد و S و $S_{۱}$ هر دو غیرخالی و محدود می‌باشند. تمامی داده‌ها به‌جزء c_n ثابت هستند. ثابت کنید عددی مانند γ موجود است، به‌طوری‌که بازاء هر $c_n > \gamma$، x_n یک جواب غیراساسی در تمامی جواب‌های بهینه $(*)$ است و بازاء هر $c_n < \gamma$، x_n یک جواب اساسی در تمامی جواب‌های بهینه $(*)$ می‌باشد. چگونه γ قابل محاسبه است؟

۱۰) برای حل مسألهی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \qquad\qquad (**) \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

نوعی از الگاریتم سیمپلکس را بهصورت زیر درنظر بگیرید. با یک جواب اساسی شدنی مانند $\bar{x}$ شروع نمائید. و فرض کنید:

$$\bar{c} = \{\bar{c}_۱, \ldots, \bar{c}_n\}$$

سود نسبی مسأله نسبت به پایه موردنظر که آن را B مینامید باشد. اگر $\bar{c}_j \geq ۰ \quad (j = ۱, \ldots, n)$ در اینصورت $\bar{x}$ جواب بهینه است و B پایهی بهینهی متناظر آن میباشد. و عملیات قطع میشود. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی kی یافت شود که $\bar{c}_k < ۰$ مجموعهی J را بهصورت زیر درنظر میگیریم:

$$J = \{j \mid \bar{c}_j < ۰\}$$

فرض کنید:

$$a_{n+۱} = \sum_{j \in J} w_j a_j$$
$$c_{n+۱} = \sum_{j \in J} w_j c_j$$

که در آن:

$$\forall j \ \ (j \in J \Longrightarrow w_j > ۰)$$

متغیری مانند $x_{n+۱}$ به $(**)$ اضافه نمائید که ستون آن $a_{n+۱}$ و ضریب آن در تابع مقصود $c_{n+۱}$ باشد. فرض کنیم:

$$x = \{x_۱, \ldots, x_n, x_{n+۱}\}$$

x_{n+1} را وارد پایه نمائید و جواب حاصل را $\tilde{X}$ بنامید که

$$\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}\}$$

با ملحوظ داشتن این‌که:

$$x_{n+1} = \sum_{j \in J} w_j x_j$$

می‌باشد.

یک جواب شدنی $\hat{x}$ از مسأله‌ی (**) متناظر $\tilde{x}$ برای **مسأله‌ی وسعت یافته**[1] به‌دست آورید. در حالت کلی، ممکن است $\hat{x}$ برای (**) جواب اساسی شدنی نباشد. با روش قضیه‌ی هل دادن از این جواب یک جواب اساسی شدنی برای مسأله (**) به‌دست آورید به‌طوری که مقدار تابع مقصود در این جواب اساسی که آن را x^* می‌نامید از مقدار تابع مقصود در $\hat{x}$ بیشتر نباشد. کار را با شروع از x^* تکرار نمائید تا به BFS جدیدی برسید. مقادیر wها را می‌توان یا $w_j = 1$ برای $j \in J$ یا $w_j = -\bar{c}_j$ برای $j \in J$ یا هر عدد مثبت دیگر. این روش را با روشی که برای حل مسأله (**) از یک جواب اساسی شدنی شروع می‌نمودید مقایسه نمائید و بگوئید که از نظر محاسباتی کدام کارا می‌باشد. از نقطه‌نظر هندسی چه فرقی با روش سیمپلکس دارد؟

---
1) Augmented Problem

نمایه